C. R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série I, n° 6, 1985 165

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Solutions des problèmes Sturm-Liouville indéfinis dans un demi-espace.* Note de **Martin Klaus, Cor van der Mee** et **Vladimir Protopopescu**, présentée par Jacques-Louis Lions.

On considère des équations de diffusion du type Sturm-Liouville et on construit leur solutions de deux manières différentes : (i) par un développement suivant les fonctions propres et (ii) en utilisant une équation intégrale et factorisation de Wiener-Hopf.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Half-range Solutions of Indefinite Sturm-Liouville Problems.

We consider diffusion equations of Sturm-Liouville type and construct their solutions in two different ways: (i) by means of an eigenfunction expansion and (ii) by using an integral equation and Wiener-Hopf factorization.

Cette Note concerne l'étude des équations de diffusion du type Sturm-Liouville indéfini. On se propose de développer deux méthodes équivalentes pour construire des représentations explicites des solutions de ces équations. La première méthode est basée sur un développement suivant les fonctions propres, alors que la seconde utilise une équation intégrale de convolution, qui se résout par la factorisation de Wiener-Hopf.

1. Formulation du problème. — Soit $\mathrm{I}=(a, b)$ un intervalle fini ou infini, et soient $p(\mu)$ une fonction positive, localement absolument continue, $q(\mu)$ une fonction réelle continue définie sur I et $w(\mu)$ une fonction poids continue avec un nombre fini de changements de signes, $a<c_1<c_2<\ldots<c_N<b$. On considère le problème :

$$(1)\quad \begin{cases} (a) & w(\mu)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x, \mu)=\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(p(\mu)\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu}(x, \mu)\right)-q(\mu)\psi(x, \mu) \qquad (0<x<\infty,\ \mu\in\mathrm{I}), \\ (b) & \psi(0, \mu)=\varphi_+(\mu) \quad \text{si} \quad w(\mu)>0, \\ (c) & \displaystyle\int_{\mathrm{I}}|\psi(x, \mu)|^2|w(\mu)|\,d\mu=O(1) \text{ ou } o(1) \text{ lorsque } x\to\infty, \end{cases}$$

où $\psi(x, \mu)$ satisfait les conditions aux limites auto-adjointes de l'opérateur différentiel $\mathrm{A}\,h\to-(ph')'+qh$.

On suppose que le spectre $\sigma(\mathrm{A})$ de A est dans $\{0\}\cup[\varepsilon, \infty)$ pour un $\varepsilon>0$. De plus on suppose que :

$$\int_{\mathrm{I}}|w(\mu)h(\mu)|^2\,d\mu\leqq \mathrm{C}\int_{\mathrm{I}}|((\mathrm{A}+\varepsilon)h)(\mu)|^2\,d\mu,$$

pour tout h dans le domaine de A. Avec l'hypothèse que dans un voisinage de chaque point c_j il existe $\alpha_j>-(1/2)$ et une fonction $v_j(\mu)\in\mathrm{C}^1$ tels que :

$$w(\mu)=\pm\operatorname{sgn}(\mu-c_j).|\mu-c_j|^{\alpha_j}v_j(\mu) \qquad \text{et} \qquad v_j(c_j)\neq 0,$$

Beals [1] a montré que le problème aux limites susmentionné a une solution unique dans $\mathrm{H_T}=\mathrm{L}_2(\mathrm{I};\ |w(\mu)|\,d\mu)$ pour chaque $\varphi_+\in\mathrm{H_T}$ avec son support dans $\mathrm{I}_+=\{\mu\in\mathrm{I}/w(\mu)>0\}$. Si $0\notin\sigma(\mathrm{A})$ on peut choisir soit $O(1)$ ou $o(1)$ dans (1) (*c*). Cependant, si $0\in\sigma(\mathrm{A})$ et φ_0

0249-6321/85/3000165 $ 2.00

est l'unique fonction propre de A associée à la valeur propre 0, nous devons choisir :

$$O(1) \text{ dans le cas } \Delta_0 = \int_I w(\mu) |\varphi_0(\mu)|^2 d\mu \geqq 0$$
$$\text{et } \quad o(1) \quad \text{si } \Delta_0 < 0.$$

Dans le cadre d'une utilisation possible d'un développement selon les fonctions propres, il suffit de calculer l'opérateur albedo réduit E_+ qui est donné par :

$$(E_+ \varphi_+)(\mu) = \psi(0, \mu) \qquad (\mu \in I).$$

2. Solution utilisant les fonctions propres. — Il est bien connu ([1], [2]) que le problème (singulier) aux limites :

$$\begin{cases} -(p\,\varphi_\lambda')' + q\,\varphi_\lambda = \lambda\, w\,\varphi_\lambda, \\ \varphi_\lambda \text{ satisfait les conditions auto-adjointes du A,} \end{cases}$$

a son spectre Σ dans l'ensemble $\{0\} \cup [\delta, \infty) \cup (-\infty, -\delta]$ pour un $\delta > 0$. De plus, $0 \in \Sigma$ si et seulement si $0 \in \sigma(A)$. Si $0 \in \sigma(A)$ et $\Delta_0 = 0$, on peut trouver un ψ_0 unique satisfaisant :

$$-(p\,\psi_0')' + q\,\psi_0 = w\,\varphi_0 \qquad \text{et} \qquad \int_I w\,|\psi_0|^2 d\mu = 0.$$

On désigne par P_+ le projecteur de H_T sur le sous-espace fermé des fonctions propres associées aux valeurs propres positives en direction du sous-espace fermé des fonctions propres associées aux valeurs propres non positives. On définit $\tilde{P}_+ = P_+$ si $0 \notin \sigma(A)$. Dans le cas où $0 \in \sigma(A)$ on définit :

$$\tilde{P}_+ h = P_+ h \quad \text{si } \Delta_0 < 0, \qquad \tilde{P}_+ h = P_+ h + \left(\int_I w\,\varphi_0\,\bar{\psi}_0\, d\mu \right)^{-1} \varphi_0 \cdot \int_I w h\,\bar{\psi}_0\, d\mu \quad \text{si } \Delta_0 = 0,$$

et :

$$\tilde{P}_+ h = P_+ h + \left(\int_I w\,|\varphi_0|^2 d\mu \right)^{-1} \varphi_0 \cdot \int_I w h\,\bar{\varphi}_0\, d\mu \quad \text{si } \Delta_0 > 0.$$

Théorème 1. — *Pour* $h_\pm \in H_T$ *avec son support dans* $I_\pm = \{\mu \in I \mid \pm w(\mu) > 0\}$ *on définit les opérateurs* $K_\pm$ *par :*

$$(K_\pm h_\pm)(\mu) = \pm (\tilde{P}_+ h_\pm)(\mu) \qquad \textit{pour} \quad \mu \in I_-.$$

Alors l'opérateur albedo réduit E_+ *est de la forme* $E_+ \varphi_+ = \varphi_+ + g$ *où* g *est la solution unique dans* H_T *(avec support dans* I_-*) de l'équation :*

$$g + K_- g = K_+ \varphi_+.$$

Lorsque $\tilde{P}$ est exprimé en termes des fonctions propres φ_λ comme on peut le faire pour l'équation Fokker-Planck [3], on obtient une équation intégrale qui doit être résolue numériquement.

3. Solution par une factorisation de Wiener-Hopf. — Sur chaque intervalle (a_1, c_1), $(c_1, c_2) \ldots, (c_N, b)$ on peut construire des opérateurs strictement positifs auto-adjoints

$\hat{A}_0, \ldots, \hat{A}_N$ en imposant à l'opérateur $h \to -(ph')' + qh$ des conditions aux limites additionnelles aux points $c_1, \ldots, c_N$. Lorsqu'on écrit $\hat{A} \equiv \hat{A}_0 \oplus \ldots \oplus \hat{A}_N$ et suppose $0 \notin \sigma(A)$, l'opérateur $C h = (A^{-1} - \hat{A}^{-1})(wh)$ est borné dans H_T, est de rang fini ($\leqq N$) et est la différence des opérateurs : $T_1 h = \hat{A}^{-1}(wh)$ et $S h = A^{-1}(wh)$. Pré-multipliant le problème aux limites original par l'opérateur $\hat{A}^{-1}$, le problème modifié a la même unique solution dans H_T. De plus on peut montrer que la problème modifié est équivalent à l'équation intégrale de Wiener-Hopf :

$$\varphi(x) + \frac{d}{dx}\int_0^\infty \mathscr{H}_1(x-x')\, C\, \varphi(x')\, dx' = \mathscr{H}_1(x)\, \varphi_+, \qquad 0 < x < \infty,$$

où :

$$\psi(x) = \int_x^\infty \varphi(x')\, dx'$$

et :

$$\begin{cases} (\mathscr{H}_1(x) h)(\mu) = |w(\mu)|^{-1} \exp(-x/w(\mu))\, h(\mu) & \text{si } xw(\mu) > 0 \\ (\mathscr{H}_1(x) h)(\mu) = 0 & \text{si } xw(\mu) < 0. \end{cases}$$

On peut aussi montrer que l'équation intégrale est équivalente à l'équation de Wiener-Hopf à valeurs matrices $N \times N$:

$$\zeta(x) + \frac{d}{dx}\int_0^\infty \pi\, \mathscr{H}_1(x-x')\, C j\, \zeta(x')\, dx' = \pi\, \mathscr{H}_1(x)\, \varphi_+, \qquad 0 < x < \infty,$$

avec $\zeta(x) = \pi\varphi(x)$ où $j : \operatorname{Ran} C^+ \to H_T$ est l'injection naturelle, $\pi : H_T \to \operatorname{Ran} C^+$ est le projecteur H_T-orthogonal et C^+ est l'opérateur adjoint de C dans H_T. En utilisant le principe géométrique de factorisation de Bart et coll. [4] et la théorie des équations de Wiener-Hopf on obtient :

THÉORÈME 2. — *Il existe des fonctions matricielles* H_l *et* H_r *d'ordre* N *satisfaisant :*

$$\Lambda(z) = I - \pi(z^{-1} - T_1)\, C j = H_l(-1/z)\, H_r(1/z),$$

où les facteurs ont les propriétés suivantes :

(1) $H_l(z)$ et $H_r(z)$ *ainsi que leurs inverses sont continues dans le demi-plan fermé de droite (sauf à l'infini) et analytiques dans le demi-plan ouvert de droite;*

(2) $H_l(0^+)$ *and* $H_r(0^+)$ *(lorsqu'on tend vers zéro par valeurs prises dans le demi-plan de droite) sont des opérateurs d'identité;*

(3) $H_l(z)$ *et* $H_r(z)$ *ainsi que leur inverses sont* $o(z)$ *lorsque* $z \to \infty$ *dans le demi-plan fermé de droite.*

THÉORÈME 3. — *Soit* $\sigma_1(.)$ *la résolution d'identité de* T_1 *considérée comme opérateur* H_T*-auto-adjoint. Alors l'opérateur albedo réduit* E_+ *est donné par :*

$$E_+\, \varphi_+ = \varphi_+ + \int_{-\infty\,(\mu)}^{0} \int_{0\,(\nu)}^{\infty} \frac{\mu\nu}{\mu - \nu}\, \sigma_1(d\mu)\, C j\, H_l(-\mu)\, H_r(\mu)\, \pi\sigma_1(d\nu)\, \varphi_+.$$

Le lecteur trouvera le développement des calculs dans [5].

Remise le 17 décembre 1984.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. BEALS, Indefinite Sturm-Liouville Problems and Half-range Completeness, *J. Diff. Eqs.* (à paraître).

[2] M. S. BAOUENDI et P. GRISVARD, *J. Funct. Anal.*, 2, 1968, p. 352-367.

[3] C. D. PAGANI, *Boll. Un. Mat. Ital.*, A3, 1970, p. 961-986.

[4] H. BART, I. GOHBERG et M. A. KAASHOEK, *Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions*, Birkhäuser, Basel, 1979.

[5] M. KLAUS, C. V. M. VAN DER MEE et V. PROTOPOPESCU, *J. Funct. Anal.* (soumis à publication).

M. K. : *Department of Mathematics, VPI, Blacksburg, VA* 24061, *U.S.A.;*

C. van der M. : *Department of Mathematics, Texas Tech University, Lubbock, Texas* 79409;

V. P. : *Department of Chemistry, Boston University, Boston, MA* 02215.