ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA

Corso di 6 Crediti
Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Versione 2006-2007

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 335-5287988 (cell.)

cornelis@krein.unica.it
http:\\bugs.unica.it\~cornelis
oppure: http:\\krein.unica.it\~cornelis

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \cdots, & u_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \text{[Dirichlet]} \\ \\ n = 0, 1, 2, \cdots, & u_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right). \quad \text{[Neumann]} \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione transcedente[4]

$$\operatorname{cotg}(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrisponde all'autofunzione

$$u_n(x, \lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n}\,\cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1\sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente in modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

b. Riduzione del problema di Sturm-Liouville ad un'equazione integrale. Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema IV.11 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \qquad u \in \mathcal{D}(\overline{L}), \qquad f \in C(0, \ell) \cap L^2(0, \ell), \tag{IV.31}$$

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y)\,dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y)\,dy, \qquad u \in L^2(0, \ell), \tag{IV.32}$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L. Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (IV.31) *e* (IV.32) *appartengono ad $\mathcal{M}_L$.*

[4]Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\operatorname{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

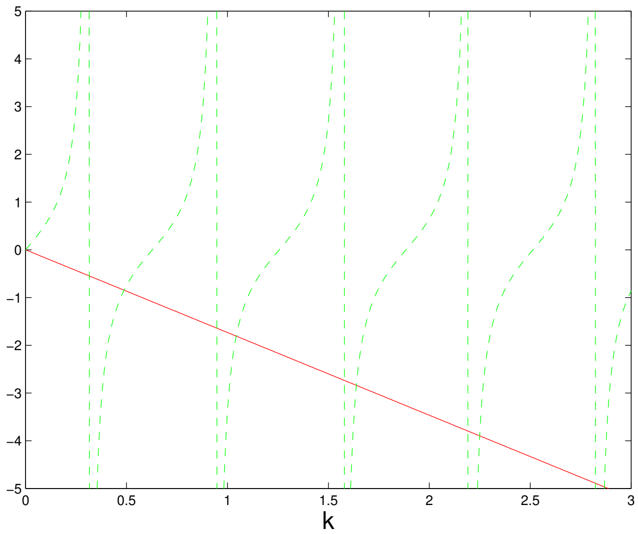

Figura IV.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan\alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (IV.31), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)[\lambda u(y) + f(y)]\,dy, \qquad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (IV.32).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L^2(0,\ell)$ soddisfi l'equazione integrale (IV.32). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x,y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in \mathcal{D}(\overline{L})$ e $\overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = -\frac{v_1(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2(x)\displaystyle\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0,\ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L_1(0,\ell)$ e la primitiva di una funzione sommabile è continua. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0,\ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = -\frac{v_1'(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2'(x)\displaystyle\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}.$$

$J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right]+\left(\mu_1^2 x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(\mu_1 x)=0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right]+\left(\mu_2^2 x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(\mu_2 x)=0.$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&(\mu_2^2-\mu_1^2)\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx\\
&=\int_0^1\left[J_\nu(\mu_2 x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right)-J_\nu(\mu_1 x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right)\right]dx\\
&=\left[\mu_1 xJ_\nu(\mu_2 x)J_\nu'(\mu_1 x)-\mu_2 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu'(\mu_2 x)\right]_{x=0}^1. \qquad \text{(IV.50)}
\end{aligned}$$

Dalla (IV.41) [vedi anche la (IV.45)] abbiamo per $x\to 0^+$

$$J_\nu(\mu x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu+O(x^{\nu+2}),\ \mu xJ_\nu'(\mu x)=\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu+O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 xJ_\nu(\mu_2 x)J_\nu'(\mu_1 x)-\mu_2 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu'(\mu_2 x)=O(x^{2\nu+2}),\qquad x\to 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu>-1$, il primo membro della (IV.50) si annulla per $x=0$ e si ottiene

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx=\frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2)J_\nu'(\mu_1)-\mu_2 J_\nu(\mu_1)J_\nu'(\mu_2)}{\mu_2^2-\mu_1^2}. \qquad \text{(IV.51)}$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (IV.48) dove $\alpha,\beta\geq 0$ e $\alpha+\beta>0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1)+\beta\mu_1 J_\nu'(\mu_1)=0,\qquad \alpha J_\nu(\mu_2)+\beta\mu_2 J_\nu'(\mu_2)=0,$$

per (α,β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (IV.51) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2\neq\mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (IV.51)).

Per dimostrare la (IV.49) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \to \mu_1$ nella (IV.51) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2\,dx &= \lim_{\mu_2\to\mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2)J_\nu'(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1)J_\nu'(\mu_2)}{\mu_2^2-\mu_1^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[J_\nu'(\mu_1)\right]^2 - \frac{1}{2\mu_1}J_\nu(\mu_1)\left[J_\nu'(\mu_1)+\mu_1 J_\nu''(\mu_1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[J_\nu'(\mu_1)\right]^2 + \frac{1}{2}J_\nu(\mu_1)^2\left(1-\frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right).\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (IV.49) per $\mu_1 = \mu_2$. La dimostrazione per $\mu_1 = -\mu_2$ è analoga. □

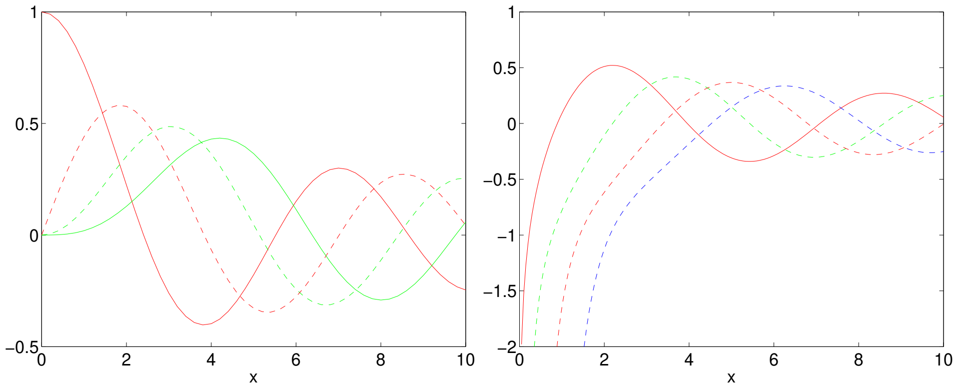

Figura IV.2: Panello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0,1,2,3$. Panello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0,1,2,3$.

d. Relazioni di ricorrenza. Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$\boxed{J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x).} \tag{IV.52}$$

Infatti, la prima formula (IV.52) segue dalla (IV.41):

$$\begin{aligned}&J_\nu'(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{(-1)^k(2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}\right] \\ &= -\frac{\nu}{x}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x}J_\nu(x).\end{aligned}$$

1. tramite la formula generatrice
$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h+h^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\xi)h^l, \qquad |h|<1,$$
2. tramite l'equazione differenziale,
$$\boxed{-[(1-x^2)P_l']'(x)=l(l+1)P_l(x),}\ -1<x<+1; \qquad \boxed{P_l(1)=1,}$$
3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che
$$\boxed{\int_{-1}^{1}P_l(\xi)P_{l'}(\xi)\,d\xi=\delta_{ll'}\frac{2}{2l+1},}$$
4. tramite la formula di Rodrigues
$$\boxed{P_l(\xi)=\frac{1}{2^l\,l!}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^l(\xi^2-1)^l,}$$
5. tramite la formula di ricorrenza
$$\boxed{(2l+1)\xi P_l(\xi)=(l+1)P_{l+1}(\xi)+lP_{l-1}(\xi),}\quad P_0(\xi)=1, \quad P_1(\xi)=\xi.$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

$\underline{4\Rightarrow 2}$. Consideriamo l'equazione differenziale
$$-[(1-x^2)u']'(x)=\lambda u(x), \qquad -1<x<+1, \tag{IV.65}$$
sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x\to\pm1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda=l(l+1)$ dove $l=0,1,2,\cdots$. Verifichiamo se i polinomi
$$P_l(x)=\frac{1}{2^l\,l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l(x^2-1)^l, \qquad l=0,1,2,\cdots, \tag{IV.66}$$
soddisfano la (IV.65) per $\lambda=l(l+1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (IV.66) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti,[7] ponendo $W_l(x)=(x^2-1)^l$ e derivando l'identità
$$(x^2-1)W_l'(x)-2l\,xW_l(x)=0$$

[7]Vale la *formula di Leibnitz* $(fg)^{(m)}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}f^{(j)}g^{(m-j)}$. Quindi $(xf)^{(m)}=xf^{(m)}+mf^{(m-1)}$ e $((x^2-1)f)^{(m)}=(x^2-1)f^{(m)}+2mxf^{(m-1)}+m(m-1)f^{(m-2)}$.

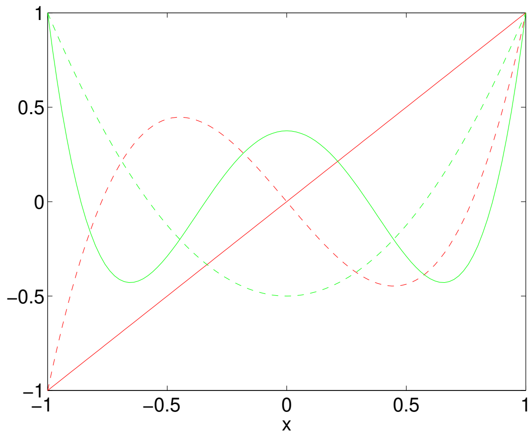

Figura IV.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

$l+1$ volte, si ottiene

$$(x^2-1)W_l^{(l+2)}(x)+2xW_l^{(l+1)}(x)-l(l+1)W_l^{(l)}(x)=0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x)=2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (IV.65). Inoltre,

$$\begin{aligned}P_l(x)&=\frac{1}{2^l\,l!}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^s(x-1)^l\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-s}(x+1)^l\right)\\&=\frac{1}{2^l\,l!}\sum_{s=0}^{l}\left(\frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}\right)\left(\frac{l!}{s!}(x+1)^s\right),\end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1)=1$ e $P_l(-1)=(-1)^l$.

<u>$2\Rightarrow 4$</u>. Sostituendo $u(x)=P_l(x)z(x)$ e $w(x)=z'(x)$ nella (IV.65) con $\lambda=l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)}=-2\frac{P_l'(x)}{P_l(x)}+\frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x)=c_1P_l(x)+c_2P_l(x)\int_0^x\frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espessione è divergente in $x=\pm1$ (poichè $P_l(\pm1)^2=1]$. Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (IV.65) con $\lambda=$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (IV.78) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$, mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di ortogonalità:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = 2^n(n!)\sqrt{\pi}\,\delta_{n,m},} \tag{IV.79}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (IV.77) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H_n'(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H_n'(z) = \text{cost.}H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n\,z^n + \dots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1}\,z^{n-1} + \dots$, risulta $n\,2^n = \text{cost.}2^{n-1}$ e quindi cost. $= 2n$. In altre parole,

$$\boxed{H_n'(z) = 2n\,H_{n-1}(z).} \tag{IV.80}$$

Dalle equazioni (IV.78) e (IV.80) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$\boxed{2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z),} \tag{IV.81}$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$. In Fig. IV.4 abbiamo tracciato alcuni grafici dei polinomi di Hermite.

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\,t^n, \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{IV.82}$$

Infatti, ponendo $F(z,t) = e^{2zt-t^2}$ e scrivendo

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!}\,t^n \tag{IV.83}$$

per opportuni coeffienti $h_n(z)$, risultano

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2tF(z,t)$$

e [poichè?]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n'(z)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!}\,t^n.$$

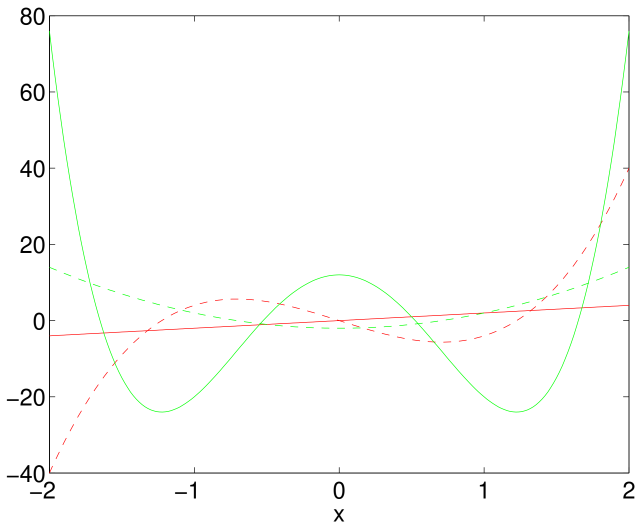

Figura IV.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Quindi $h_n(z)$ è un polinomio in z di grado n e

$$h_n'(z) = 2nh_{n-1}(z). \tag{IV.84}$$

Dalla (IV.83) risulta che $h_n(0)$ coincide con la derivata n-esima di e^{-t^2} per $t = 0$, cioè con 0 se n è dispari, e con $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$ se n è pari. Dalla formula di Rodrigues (IV.76) si vede facilmente che $H_n(0) = h_n(0)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Utilizzando le espressioni (IV.80) e (IV.84) arriviamo alla identità $H_n(z) = h_n(z)$ e quindi alla formula generatrice (IV.82).

6 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre* si definiscono tramite la seguente formula di Rodrigues:

$$\boxed{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\}.} \tag{IV.85}$$

Si dimostra facilmente che la (IV.85) rappresenta un polinomio di grado n per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^n/n!) + \ldots$. Ci limitiamo al caso $\alpha > -1$.

La funzione $w(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \tag{IV.86}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$
\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\, x^\alpha e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+1+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \dots$. Poi calcoliamo il seguente integrale:

$$
\begin{aligned}
D_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2\, x^\alpha e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^{n}}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (-1)^{n-j} (n-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^{n}}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{(-1)^{n}}{n!} \int_0^\infty ((n+1)!\, x - n(n+\alpha) n!)\, x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$
$$= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},$$

dove abbiamo utilizzato $xL_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n((x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n)/n!) + \ldots$. Dalla (IV.93) e le espressioni per $C_n^{(\alpha)}$ e $D_n^{(\alpha)}$ seguono $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$, $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$ e $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$. Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x),} \qquad \text{(IV.94)}$$

dove $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$. In Fig. IV.5 abbiamo tracciato i grafici di alcuni polinomi di Laguerre.

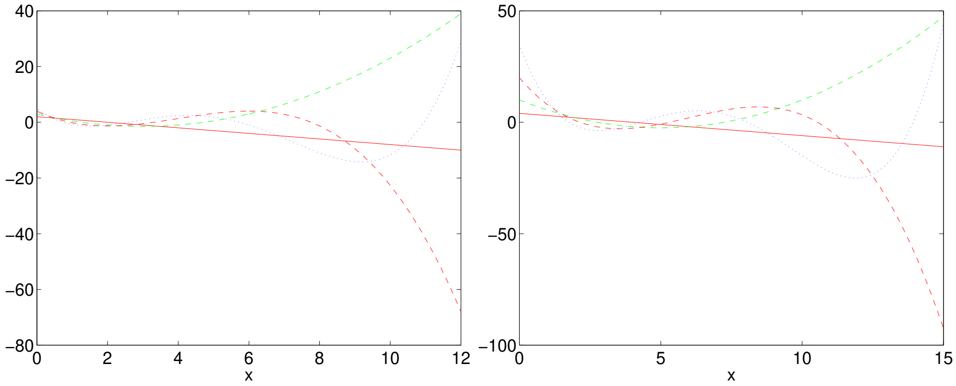

Figura IV.5: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$(1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n, \qquad |t| < 1, \qquad \text{(IV.95)}$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$F(x,t) = (1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n, \qquad |t| < 1, \qquad \text{(IV.96)}$$

dove $c_n(x)\, n!$ è la derivata parziale n-esima di $F(x,t)$ rispetto a t per $t = 0$. Sostituendo la serie (IV.96) nella equazione

$$(1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} + [x - (1+\alpha)(1-t)]\, F = 0,$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti t^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) e per il coefficiente di t^0:

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x - 2n - \alpha - 1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x - \alpha - 1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove $c_0(x) = 1$. Quindi $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ per $n = 0, 1, 2, \cdots$ (vedi la (IV.94)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione $x = t^2$:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^\infty L_n^{(\alpha)}(t^2)L_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha+1}e^{-t^2}\,dt, \tag{IV.97}$$

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^\infty tL_n^{(\alpha)}(t^2)tL_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha-1}e^{-t^2}\,dt. \tag{IV.98}$$

Per fare scomparire i fattori $|t|^{2\alpha\pm1}$ in (IV.97) e (IV.98) scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (IV.97) e $\alpha = \frac{1}{2}$ in (IV.98). Quindi $H_{2n}(t)$ è proporzionale a $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$ e $H_{2n+1}(t)$ è proporzionale a $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$. Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n}\,n!(-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \tag{IV.99}$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1}\,n!(-1)^n\,tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \tag{IV.100}$$

7 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev di prima specie $T_n(x)$ e di seconda specie $U_n(x)$ si definiscono nel seguente modo:[8]

$$\boxed{T_n(x) = \cos(nt),} \qquad \boxed{U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t},} \tag{IV.101}$$

where $x = \cos(t)$. Allora $T_n(x)$ e $U_n(x)$ sono polinomi di x di grado n che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

[8]Per $x = \cosh t$ valgono le identità $T_n(x) = \cosh(nt)$ e $U_n(x) = (\sinh((n+1)t)/\sinh t)$.

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t)+\cos((n-1)t)\\
&= 2\cos(t)\cos(nt) = 2xT_n(x),\\
U_{n+1}(x)+U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)}+\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\\
&= \frac{2\cos(t)\sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x).
\end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1,1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \ldots$ per $n \in \mathbb{N}$. In Fig. IV.6 abbiamo tracciato i grafici di $T_n(x)$ e $U_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, 4$.

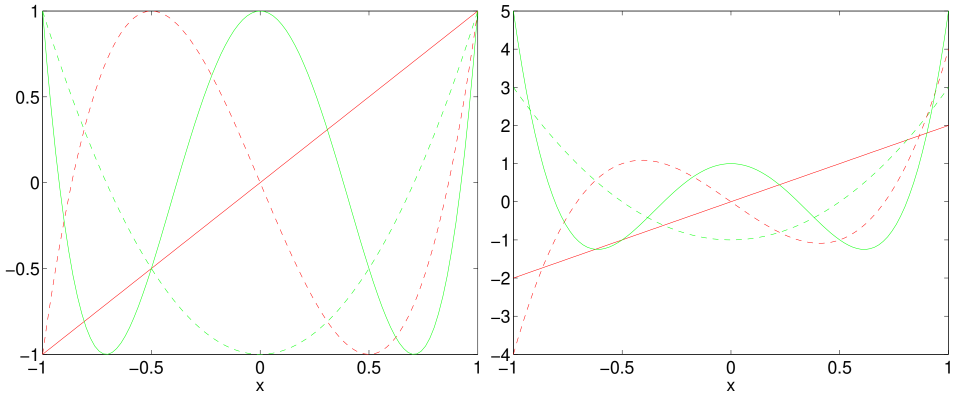

Figura IV.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specia di grado 1, 2, 3 e 4. Nel panello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel panello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev di prima specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,dt &= \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m},\\
\int_0^\pi \sin((n+1)t)\sin(m+1)t)\,dt &= \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m}, \tag{IV.102}$$

dove $K_\nu(z)$ è la funzione di MacDonald di ordine ν. Per $\nu, z > 0$ la funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ è decrescente.

Per $0 < r < r_0$ la situazione è più complicata. Siccome $S(0^+)$ esiste, risulta per $0 < r < r_0$

$$S(r) \sim \begin{cases} J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), & V_0 > \kappa^2, \\ r^{l+\frac{1}{2}}, & V_0 = \kappa^2, \\ I_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\kappa^2 - V_0}), & V_0 < \kappa^2, \end{cases} \tag{V.58}$$

dove $J_\nu(z)$ è la funzione di Bessel di ordine ν e $I_\nu(z)$ è la funzione di Bessel imaginaria di ordine ν.

Per trovare i stati limite richiediamo che la derivata logaritmica della S (cioè, S'/S) sia continua in $r = r_0$. Grazie al decadimento della funzione di MacDonald, si vede subito che $S'(r)/S(r)$ ha un limite negativo se $r \to (r_0)^+$. D'altra parte, $r^{l+\frac{1}{2}}$ e la funzione di Bessel immaginaria sono crescenti per $r > 0$, mentre la funzione di Bessel stessa è oscillatoria. Quindi gli stati limiti possono esistere soltanto per $V_0 > \kappa^2$. In tal caso

$$S(r) \sim J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), \tag{V.59}$$

dove

$$\kappa r_0 \frac{K'_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)}{K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)} = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}\, \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{J_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}. \tag{V.60}$$

Le energie $\lambda = -\kappa^2$ corrispondenti agli stati limite si trovano dal numero finito di zeri della (V.60) per $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$; ci sono zeri per soltanto un numero finito di $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Per $l = 0$ abbiamo

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}, \qquad J_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}}\, \sin(w).$$

Allora (V.60) si riduce all'identità

$$\frac{\tan(\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2})}{\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2}} = -\frac{1}{1+z},$$

dove $z = \kappa r_0$. Gli zeri $z = \kappa r_0 \in (0, r_0\sqrt{V_0})$ si ottengono graficamente.

Per $l = 0$ si può ottenere i risultati in modo più semplice senza utilizzare le funzioni di Bessel. Partendo dall'equazione di Schrödinger (V.52) per $V(r)$ in (V.55), otteniamo per $S(r) = rR(r)$

$$\begin{cases} S''(r) + (V_0 - \kappa^2)S(r) = 0, & 0 < r < r_0, \\ S'' - \kappa^2 S(r) = 0, & r > r_0, \end{cases} \tag{V.61}$$

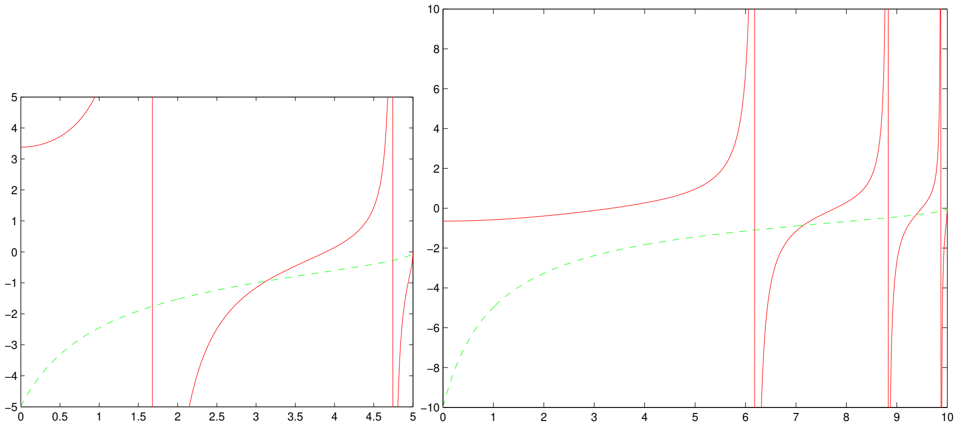

Figura V.2: Per $l = 0$ e per $r_0\sqrt{V_0} = 5$ (pannello sinistro) o 10 (pannello destro) vengono calcolati graficamente i valori di $z = \kappa r_0$ per cui l'equazione di Schrödinger per la buca sferica ha stato limite.

dove $\int_0^\infty |S(r)|^2 dr < \infty$, $S(0) = 0$[5] e S è di classe C^1 in $r = r_0$. Per $r > r_0$ risulta $S(r) \sim e^{-\kappa r}$. Quindi ci vuole $(S'/S)(r_0) = -\kappa < 0$.

Se $0 \leq V_0 < \kappa^2$, per $0 < r < r_0$ risulta $S(r) \sim \sinh(r\sqrt{\kappa^2 - V_0})$ [grazie alla condizione $S(0) = 0$] per $0 < r < r_0$ e quindi è impossibile avere $(S'/S)(r_0) < 0$. Per $\kappa = \sqrt{V_0}$ risulta $S(r) \sim r$ [grazie alla condizione $S(0) = 0$] e quindi $(S'/S)(r_0) = (1/r_0) > 0$. Di conseguenza, siamo costretti a limitarci al caso $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$. In tal caso la condizione $S(0) = 0$ conduce a $S(r) \sim \sin(r\sqrt{V_0 - \kappa^2})$ per $0 < r < r_0$. Dalla condizione di derivabilità continua in $r = r_0$ si trova

$$\sqrt{V_0 - \kappa^2}\,\frac{\cos(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{\sin(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})} = -\kappa.$$

Per studiare quest'ultima equazione, poniamo $\xi = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}$ (che appartiene all'intervallo $(0, r_0\sqrt{V_0})$ e scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{\xi}{\tan(\xi)} = -\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}, \qquad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0},$$

oppure

$$\tan(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}}, \qquad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0}.$$

Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $(n - \frac{1}{2})\pi < r_0\sqrt{V_0} \leq (n + \frac{1}{2})\pi$ ci sono n soluzioni ξ di quest'equazione e quindi n stati limite.

[5] Una condizione tecnica mai spiegata dal punto di vista fisico per costringere ad una successione finita di autovalori.