ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA

Corso Facoltativo di 6 Crediti
Corso di Laurea in Matematica
Versione 2004-2005

Cornelis VAN DER MEE
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX)
cornelis@bugs.unica.it

Indice

Capitolo I

EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA

1 Classificazione delle equazioni alle derivate parziali

Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare (lineare in tutte le sue derivate di ordine superiore) del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x,u,\nabla u) = 0 \tag{I.1}$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$ definiti su un aperto $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (I.1) soddisfa la condizione di simmetria

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ reale}, \qquad x \in G. \tag{I.2}$$

Esempi importanti dell'equazione (I.1) sono l'equazione di Poisson n-dimensionale[1]

$$\Delta u = -f, \tag{I.3}$$

dove $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (la delta di Kronecker), l'equazione delle onde n-dimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \tag{I.4}$$

dove $a_{00}(x) = 1$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = -c^2$ ($i = 1, \cdots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$, e l'equazione del calore n-dimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{I.5}$$

[1] Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div}\operatorname{grad}$.

dove $a_{00}(x) = 0$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = a^2$ ($i = 1, \cdots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$.

All'equazione (I.1) si associa la matrice $n \times n$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}, \tag{I.6}$$

che dipende soltanto dai termini con le derivate parziale del secondo ordine. Grazie alla (I.2), la matrice $A(x)$ è reale e simmetrica. Quindi $A(x)$ ha n autovalori reali $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_n(x)$. Inoltre esiste una matrice ortogonale $O(x)$ (cioè, $O(x)^T = O(x)^{-1}$ e la $O(x)$ è reale) tale che

$$O(x)^{-1}A(x)O(x) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(x), \cdots, \lambda_n(x)), \tag{I.7}$$

dove la parte a destra è una matrice diagonale. La colonna j-esima della $O(x)$ è un autovettore (di norma euclidea 1) della $A(x)$ corrispondente all'autovalore $\lambda_j(x)$ ($j = 1, \cdots, n$). Le colonne della $O(x)$ costituiscono una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Introduciamo la seguente classificazione delle equazioni (I.1) che soddisfano la (I.2). Tale equazione si dice

a. *ellittica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero e hanno lo stesso segno.

b. *iperbolica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero, ma non tutti hanno lo stesso segno. La (I.1) si dice *di tipo iperbolico normale* se è iperbolica e tutti gli autovalori tranne uno hanno lo stesso segno.

c. *parabolica* se almeno uno degli autovalori (ma non tutti) si annullano. La (I.1) si dice *di tipo parabolico normale* se è parabolica e tutti gli autovalori non nulli hanno lo stesso segno.

Torniamo agli esempi (I.3), (I.4) e (I.5):

(I.3): Si ha $A(x) = \mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1)$ di ordine n. Tutti gli autovalori sono uguali ad 1 e quindi l'equazione di Poisson è ellittica.

(I.4): Si ha $A(x) = \mathrm{diag}\,(1, -c^2, \cdots, -c^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori è uguale ad 1 e gli altri sono uguali a $-c^2$. Quindi l'equazione delle onde è di tipo iperbolico normale.

(I.5): Si ha $A(x) = \mathrm{diag}\,(0, -a^2, \cdots, -a^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori si annulla e gli altri sono uguali a $-a^2$. Quindi l'equazione del calore è di tipo parabolico normale.

Osserviamo che in principio la classificazione della (I.1) dipende dalla scelta del punto $x \in G$. Per molte equazioni importanti della fisica matematica il segno degli autovalori (spesso gli autovalori stessi) e dunque la classificazione non dipende da $x \in G$ (tranne in qualche punto eccezionale, spesso di frontiera). Un'eccezione notevole è *l'equazione di Tricomi*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{I.8}$$

dove $(x, y) \in G = \mathbb{R}^2$. In tal caso $A(x, y) = \operatorname{diag}(y, 1)$, $\lambda_1(x, y) = y$ e $\lambda_2(x, y) = 1$. Quindi la (I.8) è ellittica se $y > 0$, parabolica se $y = 0$ e iperbolica se $y < 0$.

Dimostriamo ora che una trasformazione delle variabili nella (I.1) non influisce sulla classificazione. Consideriamo la sostituzione

$$\begin{cases} y_l = y_l(x_1, \cdots, x_n), \ y_l \in C^2(G), & l = 1, \cdots, n \\ D(x_1, \cdots, x_n) = J\left(\dfrac{y_1, \cdots, y_n}{x_1, \cdots, x_n}\right) \neq 0, & l = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{I.9}$$

$D(x_1, \cdots, x_n)$ essendo lo Jacobiano della trasformazione $x \mapsto y$. Visto che $D \neq 0$, in un certo intorno di $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ (con $y^0 = y(x^0)$) le variabili $x_1, \cdots, x_n$ si possono esprimere in termini delle nuove variabili $y_1, \cdots, y_n$, cioè $x = x(y))$, dove $x = x(y)$ è di classe C^2. Denotiamo $\tilde{u}(y) = u(x(y))$. Abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}, \tag{I.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_1 \partial x_j}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}. \tag{I.11}$$

Sostituendo le espressioni (I.10) and (I.11) nell'equazione (I.1), si ottiene

$$\sum_{l,k=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) = 0, \tag{I.12}$$

dove

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y))\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \tag{I.13}$$

e tutti i termini contenenti soltanto le derivate del primo ordine ed il termine $\Phi(x, u, \nabla u)$ in (I.1) sono stati raccolti nella $\tilde{\Phi}$.

Sia $y = y(x)$ una trasformazione delle variabili di classe C^2 tale che

$$\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x^0)\right)_{j,k=1}^{n}$$

è una matrice ortogonale, dove le colonne costituiscono una base ortonormale di autovettori della matrice $A(x) = (a_{ij}(x^0))_{i,j=1}^n$. In tal caso, per $y = y^0 = y(x^0)$ la (I.12) avrà la forma

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l(x^0) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) = 0, \tag{I.14}$$

$\lambda_1(x^0), \cdots, \lambda_n(x^0)$ essendo gli autovalori della $A(x^0)$. Gli autovalori si possono ordinare tali che $\lambda_1(x^0), \cdots, \lambda_r(x^0)$ sono positivi, $\lambda_{r+1}(x^0), \cdots, \lambda_m(x^0)$ sono negativi, e $\lambda_{m+1}(x^0), \cdots, \lambda_n(x^0)$ si annullano. In tal caso, usando l'ulteriore trasformazione delle variabili $z = z(y)$ di classe C^2,

$$z_l = \begin{cases} y_l / \sqrt{\lambda_l(x^0)}, & l = 1, \cdots, r \\ y_l / \sqrt{-\lambda_l(x^0)}, & l = r+1, \cdots, m \\ y_l, & l = m+1, \cdots, n, \end{cases}$$

si arriva all'equazione

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_l^2} - \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_l^2} + \hat{\Phi}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0, \tag{I.15}$$

dove $\hat{u}(z) = \tilde{u}(y(z)) = u(x(y(z)))$ e $\hat{\Phi}(z, \hat{u}, \nabla_z \hat{u}) = \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u})$.

Nella scelta della trasformazione $y = y(x)$ abbiamo soltanto diagonalizzato la matrice $A(x^0)$. Ciò risultava nell'equazione (I.14) valida in $y = y^0$ e nell'equazione (I.15) valida in $z^0 = z(y^0) = z(y(x^0))$.

2 Alcune equazioni della fisica matematica

Una descrizione di molti processi fisici porta ad equazioni differenziali ed integrali o persino ad equazioni integro-differenziali. Una classe sufficientemente vasta di processi fisici viene descritta mediante equazioni lineari del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = F(x). \tag{I.16}$$

In questo paragrafo consideriamo processi fisici tipici che si possono ridurre a diversi problemi al contorno per le equazioni differenziali.

1. Equazione di vibrazioni. Molti problemi di meccanica (vibrazione di corde, di barre, di membrane e di volumi tridimensionali) e di fisica (onde acustiche e elettromagnetiche) sono descritte da equazione di vibrazioni della forma

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) - qu + F(x,t), \tag{I.17}$$

dove la funzione incognita $u(x,t)$ dipende da n ($n = 1, 2, 3$ nella maggior parte delle applicazioni) coordinate spaziali $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e dal tempo t; i coefficienti ρ, p e q sono determinati dalle proprietà del mezzo in cui si svolgono le vibrazioni; il termine noto $F(x,t)$ esprime l'intensità della perturbazione esterna. Nell'equazione (3.2), conformemente alla definizione degli operatori di divergenza e di gradiente, si ha

$$\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Illustriamo la deduzione dell'equazione (I.17) con l'esempio di piccole vibrazioni trasversali di una corda. Si dice corda un filo teso che non resiste alla flessione.

Supponiamo che nel piano (x,u) la corda esegua piccole vibrazioni trasversali vicino alla sua posizione di equilibrio coincidente con l'asse x. Denotiamo con $u(x,t)$ il valore dello spostamento della corda dalla posizione di equilibrio nel punto x all'istante t in modo che $u = u(x,t)$ descrive l'equazione della corda all'istante t. Limitandoci all'esame delle piccole vibrazioni della corda, trascureremo infinitesimi di ordine superiore in confronto con $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$. Visto

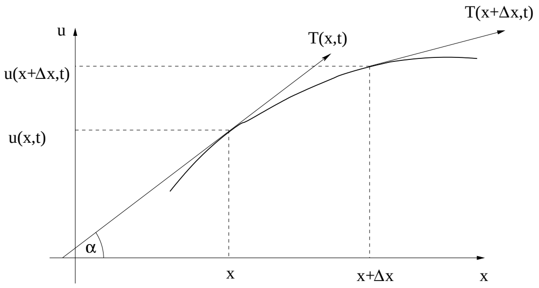

Figura I.1: Derivazione dell'equazione di vibrazioni

che la corda non resiste alla flessione, la sua tensione $T(x,t)$, nel punto x all'istante t, è diretta lungo la tangente alla corda al punto x (Vedi Fig. I.1). Qualunque sezione della corda (a,b) dopo lo spostamento dalla posizione di equilibrio nei limiti della nostra approssimazione non cambia la sua lunghezza

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \simeq b - a$$

e, per conseguenza, conformemente alla legge di Hooke, il valore della tensione $|T(x,t)|$ rimarrà costante ed indipendente sia da x che da t, cioè $|T(x,t)| = T_0$. Indichiamo con $F(x,t)$ la densità delle forze esterne agenti sulla corda, nel punto x all'istante t, dirette perpendicolarmente all'asse x nel piano (x,u). Infine, sia $\rho(x)$ la densità lineare della corda nel punto x, in modo che $\rho(x)\Delta x$ rappresenti approssimativamente la massa dell'elemento della corda $(x, x+\Delta x)$.

Costruiamo l'equazione del moto della corda. Sul suo elemento $(x, x+\Delta x)$ agiscono le forze di tensione $T(x+\Delta x, t)$ e $-T(x,t)$ e la forza esterna, la cui somma, conformemente alle leggi di Newton, dev'essere uguale al prodotto della massa di quest'elemento per la sua accelerazione. Proiettando quest'uguaglianza vettoriale sull'asse u, in base ai ragionamenti precedenti, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$T_0 \sin\alpha\big|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha\big|_x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{I.18}$$

Ma nell'ambito della nostra approssimazione si ha

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

e perciò otteniamo dalla (I.18)

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t),$$

da cui, per $\Delta x \to 0$, segue l'uguaglianza

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \tag{I.19}$$

Questa è l'*equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una corda.* Per $F \neq 0$, le vibrazioni della corda sono dette *forzate* e, per $F = 0$, *libere.*

Se la densità ρ è costante, cioè $\rho(x) = \rho$, l'equazione di vibrazioni della corda assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{I.20}$$

dove $f = F/\rho$ e $a^2 = T_0/\rho$ è una costante. L'equazione (I.20) è detta anche *equazione delle onde unidimensionale.*

Equazioni della forma (I.17) descrivono anche le piccole vibrazioni trasversali di una barra elastica:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t), \tag{I.21}$$

dove $S(x)$ è l'area della sezione trasversale della barra ed $E(x)$ è il modulo di Young nel punto x.

Dalle considerazioni fisiche segue che, per una descrizione univoca delle vibrazioni di una corda o di una barra, è anche necessario assegnare supplementarmente i valori dello spostamento u e della velocità u_t all'istante iniziale (*condizioni iniziali*) ed anche il regime di comportamento alle estremità (*condizioni di frontiera*). Riportiamo alcuni esempi di condizioni di frontiera.

a) Se l'estremità x_0 della corda o della barra si muove conformemente alla legge $\mu(t)$, si ha

$$u|_{x=x_0} = \mu(t).$$

b) Se sull'estremità destra x_0 della corda agisce una forza data $v(t)$, si ha

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{v(t)}{T_0}.$$

Infatti, in questo caso si ha

$$T_0 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} \simeq T_0 \sin\alpha|_{x=x_0} = v(t).$$

c) Se l'estremità destra x_0 è elasticamente fissata ed α è il coefficiente di rigidità del fissaggio, si ha

$$\left. E\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right|_{x=x_0} = 0,$$

conformemente alla legge di Hooke.

In modo analogo si deduce l'*equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una membrana*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + F. \tag{I.22}$$

Se la densità ρ è costante, l'equazione di vibrazioni di una membrana assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f, \qquad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \qquad f = \frac{F}{\rho}, \tag{I.23}$$

ed è detta *equazione delle onde bidimensionale.*

L'*equazione delle onde tridimensionale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f \tag{I.24}$$

descrive i processi di propagazione del suono in un mezzo omogeneo e delle onde elettromagnetiche in un mezzo omogeneo non conduttore. Soddisfano questa equazione la densità di un gas, la sua pressione ed il potenziale di velocità, nonché le componenti d'intensità dei campi elettrico e magnetico ed i corrispondent potenziali.

Scriveremo le equazioni delle onde (I.20), (I.23) e (I.24) con la singola formula

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta \qquad (\Box \equiv \Box_1), \tag{I.25}$$

e Δ è l'*operatore di Laplace*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

2. Equazione di diffusione. I processi di diffusione del calore o di diffusione delle particelle in un mezzo vengono descritti mediante la seguente *equazione di diffusione* generale:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t). \tag{I.26}$$

Deriviamo l'*equazione di diffusione del calore* (o l'equazione del calore). Denotiamo con $u(x,t)$ la temperatura del mezzo nel punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ all'istante t. Considerando isotropo il mezzo, denotiamo con $\rho(x)$, $c(x)$ e $k(x)$ rispettivamente la densità, la capacità termica specifica ed il coefficiente di conducibilità termica del mezzo nel punto x. Indichiamo con $F(x,t)$ l'intensità delle sorgenti termiche nel punto x all'istante t. Calcoliamo il bilancio termico in un volume V arbitrario per un intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$. Denotiamo con S la frontiera di V e sia $\boldsymbol{n}$ una normale esterna a questa frontiera. Conformemente alla legge di Fourier, attraverso la superficie S del volume V, entra una quantità di calore

$$Q_1 = \int_S k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS\,\Delta t = \int_S (k \operatorname{grad} u, \boldsymbol{n})\, dS\,\Delta t,$$

che è uguale, secondo il teorema di Gauss (della divergenza), a

$$Q_1 = \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dx\,\Delta t.$$

Le sorgenti termiche nel volume V producono una quantità di calore

$$Q_2 = \int_V F(x,t)\, dx\,\Delta t.$$

Visto che la temperatura in V durante l'intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$ cresce di
$$u(x, t+\Delta t) - u(x,t) \simeq \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$
ciò richiede una quantità di calore uguale a
$$Q_3 = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, \Delta t.$$
D'altra parte, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ il che significa che
$$\int_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right] dx\, \Delta t = 0,$$
da cui, in virtù del carattere arbitrario di V, si ottiene l'equazione di diffusione del calore
$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{I.27}$$
Se il mezzo è omogeneo, cioè se c, ρ e k sono costanti, l'equazione (I.27) assume la forma
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{I.28}$$
dove $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ e $f = \frac{F}{c\rho}$. L'equazione (I.28) è detta *equazione di conduzione termica*. Il numero n di variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in quest'equazione può essere arbitrario.

Come nel caso delle equazioni delle variazioni, per una completa descrizione del processo di diffusione del calore, si deve assegnare la distribuzione iniziale della temperatura u nel mezzo (la condizione iniziale) ed il comportamento del mezzo nella frontiera (le condizioni di frontiera).

a) Se sulla frontiera S va mantenuta una data distribuzione di temperatura u_0, si ha allora
$$u\big|_S = u_0. \tag{I.29}$$

b) Se su S va mantenuto un dato flusso di calore u_1, si ha allora
$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = u_1. \tag{I.30}$$

c) Se su S ha luogo lo scambio di calore, conformemente alla legge di Newton, allora si ha
$$\left. k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + h(u-u_0)\right|_S = 0, \tag{I.31}$$
dove h è il coefficiente di scambio di calore ed u_0 è la temperatura dell'ambiente.

In modo analogo si può dedurre l'*equazione di diffusione* delle particelle. In questo caso al posto della legge di Fourier si deve utilizzare la legge di Nerst per il flusso di particelle attraverso un elemento di superficie ΔS per unità di tempo: $\Delta Q = -D\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Delta S$, dove $D(x)$ è il coefficiente di diffusione ed $u(x,t)$ è la densità di particelle nel punto x all'istante t. L'equazione per la densità u avrà la forma della (I.26) dove ρ denota il coefficiente di porosità, $p = D$ e q caratterizza l'assorbimento del mezzo.

3. Le equazioni di Laplace, Poisson e Helmholtz. Per i processi stazionari $F(x,t) = F(x)$ and $u(x,t) = u(x)$, le equazioni delle vibrazioni (I.17) e di diffusione (I.26) assumono la forma

$$-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) + qu = F(x). \tag{I.32}$$

Per $p =$ costante e $q = 0$ l'equazione (I.32) è detta *equazione di Poisson*:

$$\Delta u = -f, \qquad f = F/\rho; \tag{I.33}$$

per $f = 0$ l'equazione (I.33) si dice *equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0. \tag{I.34}$$

Un processo stazionario è completamente definito se è fissata una delle condizioni di frontiera (I.29)-(I.31).

Supponiamo che, nell'equazione delle onde (I.25), la perturbazione esterna $f(x,t)$ sia periodica di frequenza ω e di ampiezza $a^2 f(x)$:

$$f(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Se cerchiamo perurbazioni periodiche $u(x,t)$ della stessa frequenza e di ampiezza incognita $u(x)$, cioè

$$u(x,t) = u(x) e^{i\omega t},$$

per la funzione$u(x)$ si ottiene l'equazione di stato stazionario

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \tag{I.35}$$

detta *equazione di Helmholtz*.

Problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz sorgono dai problemi di diffrazione. Supponiamo, per esempio, che sia data un'onda piana $e^{ik(a\cdot x)}$, $|a| = 1$, $k > 0$, che arrivi dall'infinito e sia sottoposta ad una certa variazione dovuta ad un ostacolo sulla frontiera S di una regione limitata G (Vedi Fig. I.2). Questo ostacolo può essere assegnato, per esempio, mediante la condizione

$u|_S = 0$ o $(\partial u/\partial \boldsymbol{n})|_S = 0$. L'ostacolo genera un'onda diffusa $v(x)$. Lontano dai centri diffondenti quest'onda sarà prossima ad un'onda sferica divergente

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \tag{I.36}$$

Per questa ragione per $|x| \to \infty$ l'onda $v(x)$ deve soddisfare condizioni della forma

$$v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \tag{I.37}$$

dette *condizioni di radiazione di Sommerfeld*. La perturbazione totale $u(x)$ all'infuori della regione G rappresenta la somma di un'onda piana e di un'onda diffusa:

$$u(x) = e^{ik(\sigma\cdot x)} + v(x). \tag{I.38}$$

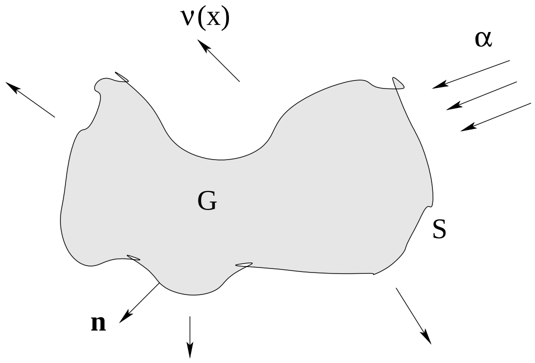

Figura I.2: Scattering di un'onda piana da un ostacolo

Osserviamo di passaggio che la funzione $f(s)$, $s = x/|x|$, che figura nella (3.21), è detta ampiezza di diffrazione; l'ampiezza di diffrazione è anche una funzione dell'impulso ka.

4. Equazione di trasporto. Se la lunghezza del percorso libero delle particelle è molto più grande delle loro dimensioni, per descrivere il processo di propagazione delle particelle, al posto dell'equazione di diffusione è utilizzata la cosiddetta *equazione del trasporto* (*equazione cinetica*). Scriviamo le equazioni del trasporto sulle seguenti ipotesi:

a) Le velocità di tutte le particelle sono uguali a v.

b) Si possono trascurare le collisioni tra le particelle.

c) Le particelle collidono con i nuclei immobili del mezzo e $\ell(x)$ è la lunghezza media del percorso libero nel punto x.

d) Quando una particella collide con un nucleo immobile del mezzo, ha luogo uno dei seguenti eventi:

   d1) la particella viene diffusa dal nucleo con probabilità $p_1(x)$ rimbalzando da questo nucleo come una pallina elastica;

   d2) con la probabilità $p_2(x)$ la particella viene catturata dal nucleo;

   d3) con probabilità $p_3(x) = 1-p_1(x)-p_2(x)$ la particella divide il nucleo ed in conseguenza di questa divisione appaiono $\nu(x) \geq 1$ particelle simili (in questo caso si suppone che la particella che ha diviso il nucleo, sparisce).

e) La distribuzione delle particelle rispetto alle direzioni è isotropa sia dopo la diffusione che dopo la divisione.

Denotiamo con $n(x, \boldsymbol{s}, t)$ la densità delle particelle nel punto x che volano nella direzione $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $|\boldsymbol{s}| = 1$, all'istante t, e con $F(x, \boldsymbol{s}, t)$ la densità delle sorgenti. In questo caso la funzione $\psi = vn$, flusso delle particelle, verifica la seguente equazione integro-differenziale:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\boldsymbol{s} \cdot \operatorname{grad} \psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, \boldsymbol{s}', t)\, d\boldsymbol{s}' + F, \tag{I.39}$$

dove $\alpha = 1/\ell$ e $h = p_1 + \nu p_3$. Questa è l'equazione del trasporto a velocità unica per i processi a diffusione isotropa.

Se il processo di trasporto è stazionario, cioè

$$F(x, \boldsymbol{s}, t) = f(x, \boldsymbol{s}), \qquad \psi(x, \boldsymbol{s}, t) = \psi(x, \boldsymbol{s}),$$

l'equazione del trasporto (I.39) assume la forma

$$(\boldsymbol{s} \cdot \operatorname{grad} \psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, \boldsymbol{s}')\, d\boldsymbol{s}' + f. \tag{I.40}$$

Per una descrizione completa del processo di trasporto delle particelle si deve assegnare la distribuzione iniziale del flusso di particelle ψ nel mezzo (condizione iniziale) ed il regime di comportamento silla frontiera di questo mezzo (condizione di frontiera). Per esempio, se la regione G dove ha luogo il processo di trasporto, è convessa, una condizione di frontiera della forma

$$\psi(x, \boldsymbol{s}, t) = 0, \qquad x \in S, \qquad (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}_x) < 0, \tag{I.41}$$

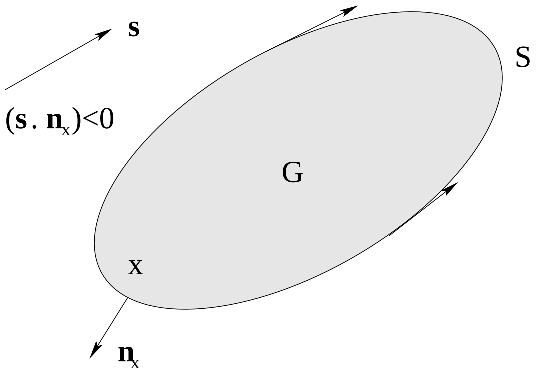

Figura I.3: Descrizione del processo di trasporto

esprime l'assenza di flusso di particelle incidente sulla regione G dall'esterno (Vedi Fig. I.3).

Infine, notiamo che l'equazione del trasporto descrive il trasporto di neutroni in un reattore nucleare, il trasporto di energia elettromagnetica (luce, senza rendersi conto della possibile polarizzazione della luce), il passaggio di quanti γ attraverso una sostanza (senza rendersi conto della possibile polarizzazione del quanto), e il moto della distribuzione di un gas rispetto alla velocità e la direzione (senza rendersi conto dell'interazione tra le particelle del gas; si rende conto soltanto dell'interazione di una particella con l'intero gas). Per descrivere il trasferimento della luce non polarizzata si assume che lo scattering nella direzione di propagazione sia coerente e quello nelle altre direzioni sia incoerente.

5. Equazioni della dinamica dei fluidi. Consideriamo il moto di un fluido perfetto (gas), cioè di un fluido in cui non esiste la viscosità. Siano $\boldsymbol{V}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ il vettore velocità del fluido, $\rho(x,t)$ la sua densità, $p(x,t)$ la sua pressione, $f(x,t)$ l'intensità delle sorgenti e $\boldsymbol{F}(x,t) = (F_1, F_2, F_3)$ l'intensità delle forze di massa. Allora queste quantità soddisfano il seguente sistema (non lineare) di equazioni dette *equazioni di dinamica dei fluidi*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{V}) = f, \tag{I.42}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{V} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p = \boldsymbol{F}. \tag{I.43}$$

Le equazioni (I.42) e (I.43) sono rispettivamente dette *equazione di continuità* ed *equazione* (*del moto*) *di Eulero*. Per completare questo sistema di equazioni è necessario assegnare una relazione tra la pressione e la densità:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \tag{I.44}$$

la cosiddetta *equazione di stato*. Per esempio, per un liquido incompressibile l'equazione di stato ha la forma $\rho =$ costante, mentre per il moto adiabatico di un gas

$$p\rho^{-\kappa} = \text{costante}, \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

dove c_p e c_v sono rispettivamente i calori specifici del gas a pressione ed a volume costanti.

In particolare, se un liquido è incompressibile ($\rho =$ costante) ed il suo moto è conservativo (cioè, esiste un potenziale V tale che $V = -\operatorname{grad} u$), dall'equazione di continuità (I.42) segue che il potenziale u soddisfa l'equazione di Poisson (I.33).

6. Equazioni di Maxwell. Supponiamo che in un mezzo sia immerso un campo elettromagnetico alternato. Siano $\boldsymbol{E}(x,t) = (E_1, E_2, E_3)$ l'intensità di campo elettrico, $\boldsymbol{H}(x,t) = (H_1, H_2, H_3)$ l'intensità di campo magnetico, $\rho(x)$ la densità di cariche elettriche, ε la costante dielettrica del mezzo, μ il coefficiente di permeabilità magnetica del mezzo e $I(x,t) = (I_1, I_2, I_3)$ la corrente di conduzione. Allora queste quantità soddisfano il seguente sistema lineare di equazioni differenziali dette *equazioni di Maxwell*:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \tag{I.45}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t}, \tag{I.46}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{I}, \tag{I.47}$$

dove $e = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec è la velocità della luce nel vuoto.

L'equazione (I.46) esprime la legge di Faraday e l'equazione (I.47) le legge di Ampère.

Riportiamo alcuni casi particolari delle equazioni di Maxwell.

a) $\rho = 0$, ε, μ e λ sono costanti ed $\boldsymbol{I} = \lambda\boldsymbol{E}$ (legge di Ohm). Applicando alle equazioni (I.46) e (I.47) l'operatore rot ed utilizzando le equazioni (I.45), si ottiene per le componenti dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ la cosiddetta *equazione del telegrafista*

$$\Box_a u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{I.48}$$

b) $\boldsymbol{I} = 0$, e ε e μ sono costanti. Introducendo il *potenziale elettromagnetico* a quattro componenti (φ_0, φ), $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, rappresentiamo la soluzione delle equazioni di Maxwell nella forma

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\varphi. \tag{I.49}$$

Le componenti del potenziale elettromagnetico debbono in questo caso verificare le equazioni delle onde

$$\Box_a \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2 \mu}\rho, \qquad \Box_a \varphi = 0, \tag{I.50}$$

e la condizione di Lorentz

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div}\varphi = 0. \tag{I.51}$$

c) Se il processo è stazionario, le equazioni di Maxwell si trasformano nelle *equazioni dell'elettrostatica*

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{I.52}$$

e nelle *equazioni della magnetostatica*

$$\operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} I. \tag{I.53}$$

Per $\varepsilon =$ costante il potenziale elettrostatico φ_0 soddisfa, in virtù della (I.50), l'equazione di Poisson (I.33) per $f = -(4\pi/\varepsilon)\rho$.

Per trasformare le equazioni di Maxwell abbiamo utilizzato le seguenti formule dell'analisi vettoriale:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta,\ \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta I,\ \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0,\ \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0,$$

dove I è la matrice unità.

7. Equazione di Schrödinger. Supponiamo che una particella quantistica di massa m_0 si muova in un campo di forza esterno con potenziale $V(x)$. Denotiamo con $\psi(x,t)$ la funzione d'onda di questa particella, di modo che $|\psi(x,t)|^2\,\Delta x$ sia la probabilità che la particella si trovi nell'intorno $U(x)$ del punto x all'istante t; qui Δx è il volume infinitesimo di $U(x)$. Allora la funzione ψ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi, \tag{I.54}$$

dove $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ erg $\cdot$ sec; $h = 2\pi\hbar$ si dice costante di Planck.

Se l'energia E di una particella ha un valore definito, questo stato di particella è detto *stazionario*, grazie al principio d'incertezza di Heisenberg. In questo caso la funzione d'onda $\psi(x,t)$ ha la forma

$$\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x),$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$, in virtù della (I.54), verifica l'equazione stazionaria di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi = E\psi. \tag{I.55}$$

Per $V = 0$ (particella libera) l'equazione di Schrödinger (I.55) si trasforma nell'equazione omogenea di Helmholtz (I.35).

Se l'energia E è negativa, si deve richiedere che l'integrale della densità di probabilità $|\psi(x)|^2$ sia uguale ad 1, siccome la probabilità totale che la particella si trovi nello spazio è uguale ad 1. In tal caso possono esistere soltanto soluzioni per opportuni valori di E, spesso solo per un numero finito (numerabile) di valori negativi di E. D'altra parte, se l'energia E è non negativa, l'equazione (I.55) descrive lo scattering della particella all'energia E. In tal caso, come per l'equazione di Helmholtz, si deve richiedere che siano verificate le condizioni di radiazione di sommerfeld (I.37) all'infinito (per $k = \sqrt{2m_0E}\,/\hbar$). In tal caso la funzione $f(x/|x|)$ nella (I.36) si dice intersezione di scattering ed il suo valore assoluta (tranne un fattore banale) ampiezza.

8. Equazioni di Klein-Gordon e di Dirac. L'equazione di Schrödinger è verificata sotto condizioni non relativistiche, cioè a velocità modesta. Sotto condizioni relativistiche, si distinguono varie equazioni per ciascun valore (necessariamente uno dei numeri 0, 1/2, 1, $\cdots$) dello spin. Per esempio, la funzione d'onda $\varphi(x_0, x)$, dove $x_0 = ct$ (essendo c la velocità della luce nel vuoto) e $x = (x_1, x_2, x_3)$, che descrive una particella relativistica libera di massa m_0, verifica l'*equazione di Klein-Gordon*

$$(\Box + m_0^2)\varphi = 0. \tag{I.56}$$

Per descrivere una particella relativistica libera di massa m_0 a spin 1/2 (elettrone, protone, neutrone, neutrino ed altre) serve una funzione d'onda a quattro componenti (un cosiddetto spinore):

$$\Psi(x_0, x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4).$$

Questa funzione soddisfa l'*equazione di Dirac*, cioè un sistema di quattro equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right)\psi(x_0, x) = 0, \tag{I.57}$$

dove I è la matrice unità di ordine 4 e γ^k sono le matrici di Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale matrici hanno tutte la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, 3,$$

dove σ^k, $k = 0, 1, 2, 3$, sono matrici di Pauli:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione di Dirac è il risultato della fattorizzazione matriciale dell'equazione di Klein-Gordon:

$$\left(i \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right) \left(i \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 I\right) = -(\Box + m_0^2) I. \tag{I.58}$$

3 Separazione delle variabili

1. Trasformazioni Ortogonali. Sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una trasformazione delle variabili in $\mathbb{R}^3$, dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ sono le coordinate cartesiane, $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$ $(j = 1, 2, 3)$ sono funzioni di classe C^2 e la matrice Jacobiana è invertibile (per x in un aperto di $\mathbb{R}^3$). La trasformazione si dice *ortogonale* se le righe della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_3} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \qquad k \neq l.$$

Siccome J^{-1} è la matrice Jacobiana della trasformazione inversa, risulta la sua ortogonalità. Ponendo

$$h_k = \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

si vede facilmente che la matrice $\operatorname{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3)\, J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

L'operatore di Laplace

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

si rappresenta nella seguente forma:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right].$$

Esempi:

a. **Coordinate Cilindriche**: $x = r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \tag{I.59}$$

Sostituendo per ψ una funzione $\psi = \psi(r, \theta)$ che non dipende da z si trova l'operatore di Laplace in coordinate polari:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \tag{I.60}$$

b. **Coordinate Sferiche**: $x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = r \cos\varphi$, dove $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_\theta = r \operatorname{sen}\varphi$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right). \tag{I.61}$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos\varphi \in [-1,1]$ (tale che $d\xi = -\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$, $1-\xi^2 = \operatorname{sen}^2\varphi$) otteniamo[2]

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2(1-\xi^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right). \quad \text{(I.62)}$$

c. **Coordinate Parabolico-cilindriche** (vedi [9]): $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2)$, $y = cuv$, $z = z$, dove $u \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{u^2+v^2}, \qquad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad \text{(I.63)}$$

d. **Coordinate Ellittico-cilindriche** (vedi [9]): $x = c\cosh u\cos v$, $y = c\operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{\cosh^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{senh}^2 u \cos^2 v}, \qquad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2[\cosh^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{senh}^2 u\cos^2 v]}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad \text{(I.64)}$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo ora l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in due variabili (x,y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{(x,y) : 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq L\right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0,L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

[2] Usando le coordinate ortogonali (r,θ,ξ) direttamente si trovano le espressioni $h_r = 1$, $h_\theta = r\sqrt{1-\xi^2}$ e $h_\xi = (r/\sqrt{1-\xi^2})$.

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+k^2r^2+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=0.$$

L'espressione precedente è la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione I.1 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2, non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-C,\qquad \Theta(\theta+2\pi)\equiv\Theta(\theta).$$

Allora $C=m^2$ per qualche $m=0,1,2,\cdots$ e

$$\Theta(\theta)=\begin{cases}\text{costante}, & m=0\\ \text{cost}_1\,\cos m\theta+\text{cost}_2\,\mathit{sen}\,m\theta, & m=1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

Dimostrazione. Per $C<0$ si ha la soluzione generale

$$\Theta(\theta)=c_1\cosh(\theta\sqrt{-C})+c_2\text{senh}\,(\theta\sqrt{-C}).$$

Sostituendo $\Theta(\theta+2\pi)\equiv\Theta(\theta)$ e le formule d'addizione

$$\begin{cases}\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\,\cosh\beta+\text{senh}\,\alpha\,\text{senh}\,\beta\\ \text{senh}\,(\alpha+\beta)=\text{senh}\,\alpha\,\cosh\beta+\cosh\alpha\,\text{senh}\,\beta,\end{cases}$$

risulta

$$\begin{aligned}&c_1\cosh(\theta\sqrt{-C})+c_2\text{senh}\,(\theta\sqrt{-C})\\ &=\left[c_1\cosh(2\pi\sqrt{-C})+c_2\text{senh}\,(2\pi\sqrt{-C})\right]\cosh(\theta\sqrt{-C})\\ &+\left[c_1\sinh(2\pi\sqrt{-C})+c_2\cosh(2\pi\sqrt{-C})\right]\text{senh}\,(\theta\sqrt{-C}),\end{aligned}$$

dove $\theta\in(0,2\pi)$ è arbitrario. Quindi

$$\begin{bmatrix}1-\cosh(2\pi\sqrt{-C}) & -\text{senh}\,(2\pi\sqrt{-C})\\ -\text{senh}\,(2\pi\sqrt{-C}) & 1-\cosh(2\pi\sqrt{-C})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

implicando $c_1=c_2=0$, poichè il determinante del sistema $2(1-\cosh(2\pi\sqrt{-C}))<0$.[3] D'altra parte, per $C>0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta)=c_1\cos(\theta\sqrt{-C})+c_2\text{sen}\,(\theta\sqrt{-C}).$$

[3]Dimostrazione alternativa per $C<0$: $\int_0^{2\pi}|\Theta(\theta)|^2\,d\theta=-C\int_0^{2\pi}\Theta''(\theta)\overline{\Theta(\theta)}\,d\theta=-C\left[\Theta'(\theta)\overline{\Theta(\theta)}\right]_0^{2\pi}+C\int_0^{2\pi}|\Theta'(\theta)|^2\,d\theta<0$, poichè il primo termine dell'ultima parte si annulla per ragioni di periodicità, $C<0$ e $\Theta'(\theta)\not\equiv 0$. Contraddizione.

Nella stessa maniera risulta il sistema

$$\begin{bmatrix} 1-\cos(2\pi\sqrt{C}) & -\mathrm{sen}\,(2\pi\sqrt{C}) \\ \mathrm{sen}\,(2\pi\sqrt{C}) & 1-\cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1-\cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie. Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. □

Sostituendo $\dfrac{1}{\Theta(\theta)}\dfrac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \cdots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \cdots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0.$$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \to 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m. Infatti $J_m(\rho)$ ha le seguenti proprietà: (i) $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = J_2(0) = \cdots = 0$, (ii) $J_m(\rho) \to 0$ se $\rho \to +\infty$, e (iii) $J_m(\rho)$ ha un numero infinito di zeri positivi: $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \cdots$.[4]

[4] Perchè gli zeri sono semplici?

Ciò implica che $R(L) = 0$ se e solo se $kL = \nu_{mn}$ per qualche $n \in \mathbf{N}$. In altre parole, si trovano le autofrequenze $k_{mn} = \nu_{mn}/L$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

Infine otteniamo la soluzione generale

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0 \left(\nu_{0n} \frac{r}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \operatorname{sen} m\theta\right] J_m \left(\nu_{mn} \frac{r}{L}\right).$$

Se consideriamo la condizione di Neumann al posto di quella di Dirichlet, arriviamo alla soluzione generale

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta) &= a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0 \left(\nu_{0n} \frac{r}{L}\right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \operatorname{sen} m\theta\right] J_m \left(\nu_{mn} \frac{r}{L}\right),\end{aligned}$$

dove $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \cdots$ sono gli zeri della derivata prima $J_m'(\rho)$ della funzione di Bessel di ordine m. La spiegazione per il termine costante a_{00} nello sviluppo per $\psi(r,\theta)$ è il fatto che la funzione costante soddisfa l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann per $k = 0$.

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)S(\theta,\varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta,\varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0,+\infty)$ e $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R} \times (0,\pi)$, si trova facilmente

$$\begin{aligned}0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V &= \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] \\ &\quad + \frac{1}{r^2 S(\theta,\varphi)} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)\right] + k^2 - V(r).\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) = -CS(\theta,\varphi)$$

e

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2}\right) R(r) = V(r)R(r),$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta,\varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per certi valori della costante C. Per tali valori di C le funzioni $S(\theta,\varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta,\varphi)$. Ponendo

$$S(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)+C=0.$$

Come di solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-m^2,$$

dove $m=0,1,2,\cdots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi)=\Phi(\arccos\xi)$, $\xi=\cos\varphi$ arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right)+\left(C-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right)X(\xi)=0.$$

Quest'equazione si chiama l'equazione per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi\to\pm1$ esistono soltanto per $C=l(l+1)$ dove $l=m,m+1,m+2,\cdots$. Nel caso particolare $m=0$ si ottiene l'equazione di Legendre

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right)+l(l+1)X(\xi)=0,$$

dove $l=0,1,2,\cdots$.

Ritorniamo all'equazione per $R(r)$ con $C=l(l+1)$:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+k^2R(r)=\left(V(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r),$$

dove $m=-l,-l+1,\cdots,l-2,l-1,l$.

Nella meccanica quantistica il dominio dell'equazione originale è $\mathbb{R}^3$. Per descrivere gli stati limite di una particella che si muove in un campo di potenziale $V(r)$, si richiede che $\psi\in L_2(\mathbb{R}^3)$. Siccome $dxdydz=r^2\operatorname{sen}\varphi\,drd\theta d\varphi=-r^2\,drd\theta d\xi$ e lo sviluppo come funzione di θ è una serie di Fourier, risulta una condizione del tipo $r\psi(r)\in L_2(0,+\infty)$ per ψ che dipende soltanto da r. Inoltre, l'andamento asintoto $J_m(\rho)\sim\text{cost}_m\,\rho^m$ con costante $\text{cost}_m\neq0$ implica la condizione al contorno $R(0^+)$ finito per $l=0$ e $R(0^+)=0$ per $l=1,2,\cdots$. Lasciamo perdere i dettagli.

Nel caso dell'equazione di Helmholtz $[V(r)\equiv0]$ nel dominio $D=\{(x,y,z):0\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le L\}$ richiediamo che $R(0^+)$ sia finito e che $R(L)=0$ [condizione di Dirichlet] oppure $R'(L)=0$ [condizione di Neumann].

Capitolo II

SPAZI DI BANACH E DI HILBERT

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari $\mathbb{F}$ che supponiamo uguale a $\mathbb{R}$ (numeri reali) oppure a $\mathbb{C}$ (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)

b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)

c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \, \|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)

d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Una successione $\{\varphi_n\|_{n=1}^\infty$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X. Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \to Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U che converge a φ. La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di $\mathbb{R}^n$,[1] sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω. Allora la funzione $\| \cdot \|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \max_{z\in\Omega} |f(x)|,$$

   introduce una norma completa in $C(\Omega)$.

2. Per ogni sottoinsieme limitato Ω di $\mathbb{R}^n$,[2] sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue **e limitate** in Ω. Allora la funzione $\| \cdot \|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(x)|,$$

   introduce una norma completa in $C(\Omega)$.

3. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\| \cdot \|_2 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

   è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

[1] In generale, per ogni spazio compatto di Hausdorff Ω

[2] In generale, per ogni spazio di Tychonoff Ω, cioè per ogni sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff.

4. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^p(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili alla potenza p-esima (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$,
$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$
è una norma completa in $L^p(\Omega)$.

5. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \to \mathbb{R}$,
$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \right)^{1/2},$$
è una norma completa in ℓ^2.

6. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia ℓ^p lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$,
$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p},$$
è una norma completa in ℓ^p.

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme
$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$
è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ. Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in X$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X, la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U.

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X. Dato il sottoinsieme U di X, la sua *chiusura* $\overline{U}$ è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U.

Dato il sottoinsieme U di X, la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una succesione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che
$$\partial U = \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\mathrm{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in X\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per un opportuno vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D. Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{F}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

a. $(\varphi, \varphi) \geq 0,$ (positività)

b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0,$ (definitezza)

c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X,$ (simmetria)

d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X,$ (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $(\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X.$

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*[3]

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare[4]

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \qquad \varphi, \psi \in X.$$

[3]Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4(\varphi, \chi)|^2 - 4\|\varphi\|^2 \, \|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$.

[4]Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\| \, \|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert.* Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert.*

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi+\psi\|^2+\|\varphi-\psi\|^2=2\left(\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2\right).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallologramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi,\psi)=\begin{cases}\frac{1}{4}(\|\varphi+\psi\|^2-\|\varphi-\psi\|^2), & \mathbb{F}=\mathbb{R}\\ \frac{1}{4}(\|\varphi+\psi\|^2-\|\varphi-\psi\|^2+i\|\varphi+i\psi\|^2-i\|\varphi-i\psi\|^2), & \mathbb{F}=\mathbb{C}.\end{cases}$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot,\cdot):L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\to\mathbb{C}$,

$$(f,g)=\left(\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx\right)^{1/2},$$

   è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot,\cdot):\ell^2\times\ell^2\to\mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty)=\left(\sum_{n=1}^\infty x_n\,\overline{y_n}\right)^{1/2},$$

   è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Contrazioni e Punti Fissi

Sia M un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach X. Una funzione $F:M\to M$ si dice *contrazione* se per un'opportuna costante $\varepsilon\in(0,1)$ vale la stima

$$\|F(x)-F(y)\|\le\varepsilon\|x-y\|,\qquad x,y\in X.$$

Ovviamente, una contrazione è una funzione uniformemente continua. Un punto $y \in M$ si dice *punto fisso* di una funzione $F : M \to M$ se $F(y) = y$. Ovviamente, una contrazione $F : M \to M$ non ha più di un punto fisso. Dimostriamo ora l'esistenza del punto fisso.

Teorema II.2 *Sia M un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach X e sia $F : M \to M$ una contrazione. Allora F ha un unico punto fisso.*

Dimostrazione. Scegliendo $x_0 \in M$ si definiscono i punti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ricursivamente da $x_{n+1} = F(x_n)$ per $n = 1, 2, \ldots$. Scrivendo, per $m = 1, 2, \ldots$, $F^m : M \to M$ per la funzione ottenuta applicando la F m volte in seguito, si vede subito che

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|F^m(x_1) - F^m(x_0)\| \leq \varepsilon^m \|x_1 - x_0\|.$$

Per dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ è di Cauchy, si faccia il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|x_{n+k+1} - x_{n+k}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{n+k} \|x_1 - x_0\| = \frac{1 - \varepsilon^p}{1 - \varepsilon} \varepsilon^n \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - \varepsilon} \varepsilon^n, \end{aligned}$$

mostrando che $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ è di Cauchy. Siccome M è un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach, esiste $y \in M$ tale che $\|y - x_n\| \to 0$ se $n \to \infty$. Di conseguenza e grazie alla continuità della F,

$$F(y) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y.$$

Quindi y è punto fisso della F. $\square$

Un'altra importante situazione che garantisce l'esistenza di un punto fisso, viene descritta dal teorema di Riesz-Schauder. Non diamo la sua dimostrazione.

Teorema II.3 *Sia M un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio di Banach e sia $F : M \to M$ una funzione continua. Allora F ha almeno un punto fisso.*

Sotto il teorema di Riesz-Schauder potrebbe esistere più di un punto fisso della F. Un suo caso particolare è il teorema di Brouwer che dice che ogni funzione continua $F : B_n \to B_n$, dove $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$, ha almeno un punto fisso. La dimostrazione dei due teoremi richiede l'applicazione di metodi geometrici.

4 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., un sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \\ \varphi_2 = \dfrac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \dfrac{\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \dfrac{\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{cases}$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \ldots, N$).

Per trovare la base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ dalla base $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ in modo non iterativo, si consideri la matrice di Gram

$$G = \{(\psi_n, \psi_m)\}_{n,m=1}^N.$$

Sostituendo

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_{nk}\psi_k, \quad \varphi_m = \sum_{l=1}^m c_{ml}\psi_l,$$

e richiedendo che $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ (essendo δ_{nm} la delta di Kronecker), otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{nk}\overline{c_{ml}}(\psi_k, \psi_l) = \delta_{nm}.$$

In altre parole, si cerchi una matrice sottotriangolare $C = (c_{nm})_{n,m=1}^N$ tale che

$$CGC^* = \mathbb{I},$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità e C^* è la trasposta coniugata di C. Quindi bisogna trovare una matrice sottotriangolare L (con trasposta coniugata L^*) tale che vale la cosiddetta fattorizzazione $G = LL^*$ e poi invertire la L: $C = L^{-1}$. Per ottenere un risultato unico si richiede che gli elementi diagonali $L_{11}, \ldots, L_{NN}$ siano positivi. In tal caso la fattorizzazione $G = LL^*$ si dice di Cholesky.

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N, si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X. Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione infinita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in X, risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

di dimensione N, si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se

$N \to \infty$.[5] Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \lambda_n)\lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N.

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \to \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2. Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2. Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2. Concludiamo che, tranne per una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

5 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

[5] Sia $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \left\|\varphi - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\varphi_n\right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ $(n = 1, \ldots, N)$.

ossia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\, e^{inx}\right|^2 dx = 0.$$

2. In $X = L^2(-\pi,\pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, & n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, & n = 1,2,3,\ldots, \end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\right|^2 dx = 0.$$

3. Sia $X = L^2(-1,1)$. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono le versioni normalizzate dei *polinomi di*

Tabella II.1: I polinomi ortogonali classici

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1,1)$	1
Chebyshev di 1^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1,1)$	$(1-x^2)^m$ per $m=1,2,3,\ldots$
Jacobi	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha,\beta>-1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1,1)$	$(1-x^2)^\lambda$ con $\lambda>-1$
Laguerre	$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha>-1$
Hermite	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}

Legendre. Infatti, moltiplicando questi polinomi da costanti positive tali che hanno il valore 1 in $x=1$, risultano i soliti *polinomi di Legendre*

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\,(n!)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n$$

soddisfacenti

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}.$$

Data una funzione $f\in L^2(-1,1)$ e definendo i coefficienti

$$\beta_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\,dx,\qquad l=0,1,2,\ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,dx=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}\,|\beta_l|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\beta_lP_l(x)$$

nel senso che

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\sum_{l=0}^{L}\beta_lP_l(x)\right|^2dx=0.$$

4. Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I|x|^{2n}w(x)\,dx<\infty$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ rispetto al peso w, dove il grado di p_n è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f \in L^2(I; w\,dx)$ e definendo i coeffienti

$$c_n = \int_I f(x)p_n(x)w(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n p_n(x) \right|^2 w(x)\,dx = 0.$$

6 Operatori lineari

Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \to Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \qquad x_1, x_2 \in X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\mathrm{Im}\,(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y. Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\mathrm{Ker}\,T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y.

Proposizione II.4 *Un operatore lineare $T : X \to Y$ è invertibile se e solo se $ImT = Y$ e $KerT = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se T è invertibile, si ha ovviamente $\operatorname{Im} T = Y$ e $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. D'altra parte, se $\operatorname{Im} T = Y$ e $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, per ogni $y \in Y$ l'equazione $Tx = y$ ha almeno una soluzione $x \in X$ (poichè $\operatorname{Im} T = Y$). Se ci fossero $x_1, x_2 \in X$ tali che $Tx_1 = Tx_2 = y$, allora $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$ e quindi $x_1 - x_2 = 0$ (poichè $\operatorname{Ker} T = \{0\}$) e $x_1 = x_2$. Quindi la soluzione $x \in X$ dell'equazione $Tx = y$ è unica per ogni $y \in Y$. □

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x \in X,\ \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T. Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \to Y$ è limitato.

a. Sia $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonica di F^n. Allora ogni operatore limitato $T : F^n \to Y$ può essere rappresentato come

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i.$$

Se si applica ad una matrice, la norma si chiama *norma spettrale*.[6] Utilizzando questa rappresentazione, si dimostri la limitatezza di T.

b. Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \to Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Si dimostri questo fatto.

Proposizione II.5 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. T è un operatore limitato.

b. $T : X \to Y$ è una funzione uniformemente continua.

c. $T : X \to Y$ è una funzione continua.

d. $T : X \to Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a)$\Longrightarrow$(b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T: $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[6] La norma spettrale di una matrice è uguale al suo numero singolare più grande.

[(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(d)] Ovvio.

[(d)$\Longrightarrow$(a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. $\square$

Consideriamo adesso lo spazio normato $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y, dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Se $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$), $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con lo spazio delle matrici $n \times m$.

Proposizione II.6 *Siano X, Y spazi di Banach. Allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$. In altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ per $n, m > \nu$. Per $x \in X$ abbiamo la successione di Cauchy $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ in Y. Per $x = 0$ questo è chiaro. Per $x \neq 0$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|$ se $n, m > \nu$, mentre $\varepsilon\|x\|$ è una costante positiva arbitraria. Siccome Y è uno spazio completo, esiste, per ogni $x \in X$, un vettore $Tx \in Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$. Si dimostra facilmente che T è un operatore lineare. Inoltre, per quel $\nu = \nu(\varepsilon)$ si ha $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ se $n > \nu$ (calcolando il limite se $m \to \infty$). Quindi per un opportuno $n_0 > \nu$ si ha

$$\|Tx\| \leq \|T_{n_0} x - Tx\| + \|T_{n_0}\|\|x\| \leq (\varepsilon + \|T_{n_0}\|)\, \|x\|, \qquad x \in X,$$

implicando la limitatezza di T. Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ se $n > \nu$, si ha $\|T_n - T\| \to 0$ se $n \to \infty$. In altre parole, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ è convergente in $\mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

Discutiamo due esempi.

a. Sullo spazio ℓ^1 definiamo l'operatore A come

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^\infty a_{i,j} x_j, \qquad \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty,$$

dove $\{a_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ è una matrice infinita. Allora A è limitato se

$$\|A\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^\infty |a_{i,j}| < +\infty.$$

Infatti, sotto questa condizione abbiamo

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |(A\mathbf{x})_i| \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}||x_j| \le \|A\| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|A\|\|\mathbf{x}\|_1.$$

Abbiamo infatti trovato il valore esatto della norma di A, ma questo non verrà dimostrato.

b. Sullo spazio $L^2(G)$ e per qualsiasi funzione misurabile limitata h su G definiamo l'operatore M da

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \qquad x \in G.$$

Allora hf è misurabile se f è misurabile. Inoltre,

$$\|hf\|^2 = \int_G |h(x)f(x)|^2\,dx \le \|h\|_\infty^2 \int_G |f(x)|^2\,dx = \|h\|_\infty^2\|f\|_2^2,$$

dove $\|h\|_\infty = \sup_{x\in G} |h(x)|$. Quindi M è limitato su $L^2(G)$. Si dimostra nella stessa maniera che M è limitato su $L^1(G)$. In entrambi i casi $\|h\|_\infty$ è un maggiorante della norma di M. Infatti $\|h\|_\infty$ è il valore esatto della norma, ma questo non verrà dimostrato.

Finora tutte le dimostrazioni sono state abbastanza elementari. Il prossimo teorema non è facile da dimostrare e richiede una certa proprietà topologica (quella di Baire) degli spazi metrici completi.

Teorema II.7 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.*

Il prossimo teorema fornisce un algoritmo per dimostrare l'invertibilità di un operatore limitato e per calcolare (almeno in principio) la sua inversa. L'operatore inverso verrà costruito come la somma della cosiddetta *serie di Neumann* che generalizza la serie geometrica. Abbiamo bisogno dell'operatore d'identità I_X (oppure I se non c'è pericolo di confusione) su uno spazio di Banach X: Si definisca $I_X x = x$ per ogni $x \in X$.

Teorema II.8 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora T è invertibile se $\|I - T\| < 1$. In tal caso*

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (I - T)^j,$$

dove $(I - T)^0 = I_X$ e la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$.

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali

$$S_n = I + (I-T) + (I-T)^2 + \cdots + (I-T)^n = \sum_{j=0}^{n} (I-T)^j.$$

Si vede subito (o quasi subito) che

$$TS_n = S_n T = S_n - (I-T)S_n = S_n - S_{n+1} + I. \tag{II.1}$$

Adesso facciamo la stima [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+p} (I-T)^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} \|I-T\|^j \leq \frac{\|I-T\|^{n+1}}{1-\|I-T\|},$$

ciò implica che $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$. Dalla Proposizione II.6 segue l'esistenza di $S \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|S_n - S\| \to 0$ se $n \to \infty$. Calcolando il limite in (II.1) se $n \to \infty$, otteniamo

$$TS = ST = S - (I-T)S = S - S + I.$$

Di conseguenza $TS = ST = I$, cioè $S = T^{-1}$. □

Dalla serie di Neumann si ottiene facilmente

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|I-T\|}$$

se $\|I-T\| < 1$.

Corollario II.9 *Siano X, Y spazi di Banach, $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ e T invertibile. Se*

$$\|T-S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

allora S è invertibile. In altre parole, l'insieme degli operatori invertibili in $\mathcal{L}(X,Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dimostrazione. Ovviamente, $T^{-1}S \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre,

$$\left\|I_X - T^{-1}S\right\| = \left\|T^{-1}[T-S]\right\| \leq \|T^{-1}\|\|T-S\| < \|T^{-1}\|\|T^{-1}\|^{-1} = 1$$

implica (secondo il teorema precedente) che $T^{-1}S$ è invertibile. In tal caso S è invertibile. □

7 Spettro di un operatore lineare

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ.

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ, più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$ implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$ per trovare tutti gli autovalori di T. Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo *spettro* di T, $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T. Il numero complesso λ appartiene al *risolvente* di T, $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$.

Teorema II.10 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto non limitato.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(T)$. Se $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\mu \in \rho(T)$. Questo segue subito dal Corollario II.9, poichè $(\mu - \lambda)I_X = (\mu - T) - (\lambda - T)$. Quindi $\rho(T)$ è un aperto in $\mathbb{C}$.

Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \tag{II.2}$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è un insieme chiuso contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$. $\square$

Utilizzando il teorema di Liouville dell'analisi complessa e il teorema di Hahn-Banach dell'analisi funzionale, si può dimostrare che lo spettro di un operatore lineare limitato non è mai vuoto. Quindi il suo risolvente non è mai l'intero piano complesso.

Sia $r(T)$, il *raggio spettrale* di T, il minimo di tutti gli r per cui la serie (II.2) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \leq \|T\|$ e $\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T. Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze, troviamo

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di $\mathbb{C}$ in quattro insiemi due a due disgiunti.

a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.

b. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) = \{0\}$, $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\mathrm{Im}\,(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo *spettro continuo* di T. In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.

c. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X, si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo *spettro residuo* di T].

d. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T. L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

   Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

   del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

Per determinare lo spettro continuo più facilmente, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma II.11 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Sia $\sigma_{ap}(T)$[7] l'insieme di tutti i λ tali che $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ per un'opportuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n\| = 1$. Allora*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $0 \neq x \in X$ è un corrispondente autovettore, prendiamo $x_n = (x/\|x\|)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso $(\lambda - T)x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $\lambda \in \alpha_{ap}(T)$. Quindi $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

[7]L'insieme si dice "approximate point spectrum.

Se $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon$ se $\|x\| = 1$. In tal caso si ha

$$\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon\|x\|, \qquad x \in X.$$

Quindi λ non è un autovalore di T. Se $y \in \mathrm{Im}\,(\lambda - T)$, esiste un unico vettore $x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = y$. In tal caso

$$\|(\lambda - T)^{-1}y\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\|, \qquad y \in \mathrm{Im}\,(\lambda - T). \tag{II.3}$$

Se $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ non è denso in X, ne segue che $\lambda \in \sigma_r(T)$. Se $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è denso in X, la stima (II.3) si estende ad $y \in X$ per continuità, e dunque $\lambda \in \rho(T)$. In altre parole, $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T) \subset \rho(T) \cup \sigma_r(T)$, oppure $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \rho(T)$, esistono $M, m > 0$ tali che $M\|x\| \geq \|(\lambda - T)x\| \geq m\|x\|$ per ogni $x \in X$ (infatti, $M = \|\lambda - T\|$ e $m = \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$). Quindi se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione con $\|x_n\| = 1$, non si ha $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Ne segue che $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. $\square$

8 Operatori lineari autoaggiunti e unitari

Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in X.$$

Utilizzando l'esercizio 1.3 si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< T^*x, y >| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< x, Ty >| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.

1.8. Si dimostrino le seguenti proprietà: $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ [$(\lambda T)^* = \lambda T^*$ in uno spazio di Hilbert reale], $(T + S)^* = T^* + S^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, $(T^*)^* = T$.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

a. Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.
b. Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.
c. Gli operatori *normali*: $TT^* = T^*T$. Osserviamo che gli operatori autoaggiunti e unitari sono ambedue normali.

1.9. Sia X uno spazio di Hilbert *complesso* e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si dimostri che T è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$. Si consiglia sviluppare il prodotto scalare $(T(x + iy), x + iy)$ per $x, y \in X$, utilizzando che $(Tz, z) \in \mathbb{R}$ per $z = x$, $z = y$ e $z = x + iy$. Il risultato non vale in uno spazio di Hilbert reale.

Teorema II.12 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Secondo il Lemma II.11 esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ se $n \to \infty$. Allora la stima $|((\lambda - T)x_n, x_n)| \leq \|(\lambda - T)x_n\|\|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{II.4}$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$, segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X, esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\overline{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\overline{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (II.4) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo chiuso e limitato più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \qquad x \in X.$$

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \geq ((\lambda - T)x, x) \geq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. $\square$

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo chiuso e limitato reale più piccolo che contiene lo spettro di T. In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema II.13 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \qquad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \to \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. □

Passiamo ora agli operatori unitari. Utilizzando la formula di polarizzazione si può dimostrare che un'isometria (cioè, un operatore lineare U su uno spazio di Hilbert X tale che $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ per ogni $\varphi \in X$) ha la proprietà

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X,$$

e quindi la proprietà

$$(U^*U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Quest'ultimo implica che U è un'isometria in X se e solo se $U^*U = I_X$. Nella stessa maniera si vede che un operatore U ha la proprietà che U^* è un'isometria se e solo se $UU^* = I_X$. Conclusione: U è un operatore unitario se e solo se U e U^* sono ambedue isometrie se e solo se U è un'isometria invertibile. Siccome in tal caso anche U^n e $U^{-n} = (U^{-1})^n$ sono isometrie ($n = 1, 2, 3, \ldots$) se U è unitario, risulta

$$\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Di conseguenza,

$$r(U) = r(U^{-1}) \leq 1,$$

e quindi $\sigma(U) \subset \{z \in C : |z| = 1\}$.

Capitolo III

EQUAZIONI INTEGRALI

0 Introduzione

Le equazioni contenenti la funzione incognita sotto il segno dell'integrale sono dette *equazioni integrali*. Molti problemi della fisica matematica possono essere ridotti ad equazioni integrali lineari della forma

$$\int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{III.1}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x), \tag{III.2}$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$ in una regione $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (III.1) si dice *equazione integrale di prima specie*, mentre l'equazione (III.2) si dice *equazione di Fredholm di seconda specie*. Le funzioni note $\mathcal{K}(x,y)$ e $f(x)$ sono dette *nucleo* e *termine noto* dell'equazione integrale; λ è un parametro complesso.

Le equazioni integrali di prima specie non saranno considerate nella nostra esposizione.

L'equazione integrale (III.2) per $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{III.3}$$

si dice equazione integrale di Fredholm *omogenea* di seconda specie corrispondente all'equazione (III.2). Le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy + g(x), \tag{III.4}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy, \tag{III.5}$$

dove $\mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$, sono dette *aggiunte* alle equazioni (III.2) e (III.3), rispettivamente. Il nucleo $\mathcal{K}^*(x,y)$ si dice *nucleo coniugato aggiunto* al nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si dice *hermitiano* se $\mathcal{K}^*(x,y) = \mathcal{K}(x,y)$, cioè se $\overline{\mathcal{K}(y,x)} = \mathcal{K}(x,y)$ quasi ovunque. Il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si dice *reale e simmetrico* se $\mathcal{K}(x,y)$ è reale e $\mathcal{K}(y,x) = \mathcal{K}(x,y)$ quasi ovunque. Ovviamente un nucleo reale e simmetrico è hermitiano.

Scriveremo le equazioni (III.2), (III.3), (III.4) e (III.5) in forma contratta, utilizzando la notazione d'operatore:

$$\begin{cases} \varphi = \lambda K\varphi + f, & \varphi = \lambda K\varphi, \\ \psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g, & \psi = \overline{\lambda} K^*\psi, \end{cases}$$

dove gli operatori integrali K e K^* sono determinati dai nuclei $\mathcal{K}(x,y)$ e $\mathcal{K}^*(x,y)$, rispettivamente:

$$(Kf)(x) = \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy, \qquad (K^*f)(x) = \int_G \mathcal{K}^*(x,y) f(y)\,dy.$$

Tra poco metteremo opportune condizioni sul dominio G e sul nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ affinché gli operatori lineari K e K^* siano limitati in un opportuno spazio di Banach (o di Hilbert) di funzioni $f(x)$ definite in G. In particolare, verranno considerati gli spazi $L_1(G)$, $L_2(G)$ e $C(\overline{G})$.

1 Metodo delle Approssimazioni Successive

a. Equazioni integrali con nucleo continuo. Supponiamo che nell'equazione integrale (III.2) la regione G sia limitata in $\mathbb{R}^n$, la funzione f sia continua nella regione chiusa $\overline{G}$ (oppure misurable e appartenente allo spazio $L_1(G)$ o $L_2(G)$) ed il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sia continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$ (diremo *continui* questi nuclei).

Ricordiamo le definizioni delle norme negli spazi di Banach $L_1(G)$, $L_2(G)$, $L_\infty(G)$ e $C(\overline{G})$ e del prodotto scalare in $L_2(G)$:

$$\begin{cases} \|f\|_1 = \int_G |f(x)|\,dx, & f \in L_1(G), \\ (f,g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\,dx, & f,g \in L_2(G), \\ \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\,dx}, & f \in L_2(G), \\ \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G} |f(x)|, & f \in L_\infty(G), \\ \|f\|_C = \|f\|_\infty = \max_{x\in\overline{G}} |f(x)|, & f \in C(\overline{G}). \end{cases}$$

Lemma III.1 *L'operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ trasferisce $L_1(G)$ in $C(\overline{G})$ (e, di conseguenza, $L_2(G)$ in $C(\overline{G})$, $L_\infty(G)$ in $C(\overline{G})$, $C(\overline{G})$ in $C(\overline{G})$, $L_1(G)$ in $L_1(G)$, $L_2(G)$ in $L_2(G)$, e $L_\infty(G)$ in $C(\overline{G})$). Dunque, K è limitato come operatore lineare tra questi spazi, ed inoltre*

$$\begin{cases} \|Kf\|_C \le M\|f\|_1, & f \in L_1(G), \\ \|Kf\|_C \le M\sqrt{m(G)}\|f\|_2, & f \in L_2(G), \\ \|Kf\|_C \le Mm(G)\|f\|_\infty, & f \in L_\infty(G), \end{cases} \tag{III.6}$$

$$\|Kf\|_C \le Mm(G)\|f\|_C, \qquad f \in C(\overline{G}), \tag{III.7}$$

$$\begin{cases} \|Kf\|_1 \le Mm(G)\|f\|_1, & f \in L_1(G), \\ \|Kf\|_2 \le Mm(G)\|f\|_2, & f \in L_2(G), \\ \|Kf\|_\infty \le Mm(G)\|f\|_\infty, & f \in L_\infty(G), \end{cases} \tag{III.8}$$

dove $M = \max_{x,y\in\overline{G}\times\overline{G}} |\mathcal{K}(x,y)|$ e $m(G)$ è la misura di G.

Dimostrazione. Siccome $\overline{G}\times\overline{G}$ è compatto, il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente continuo in $(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|\mathcal{K}(x_1,y_1)-\mathcal{K}(x_2,y_2)| < \varepsilon$ se $\|(x_1-x_2, y_1-y_2)\| < \delta$. Di conseguenza, se $f\in L_1(G)$, per $|x_1-x_2|<\delta$ si ha la stima

$$|(Kf)(x_1)-(Kf)(x_2)| \le \int_G |\mathcal{K}(x_1,y)-\mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|dy < \varepsilon \int_G |f(y)|dy = \varepsilon\|f\|_1,$$

e quindi K trasferisce $L_1(G)$ in $C(\overline{G})$.

Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz si trova

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\,dx \le \|f\|_2 \sqrt{\int_G dx} = \sqrt{m(G)}\,\|f\|_2, \qquad f \in L_2(G).$$

Ancora più facilmente si trova la stima

$$\|f\|_2^2 = \int_G |f(x)|^2\,dx \le \|f\|_\infty^2 \int_G dx = m(G)\|f\|_\infty^2, \qquad f \in L_\infty(G),$$

implicando $\|f\|_2 \le \sqrt{m(G)}\,\|f\|_\infty$ e $\|f\|_1 \le m(G)\|f\|_\infty$ per $f\in L_\infty(G)$. Inoltre, $C(\overline{G})$ è contenuto in $L_\infty(G)$, mentre $\|f\|_C = \|f\|_\infty$ per $f\in C(\overline{G})$. Di conseguenza, $C(\overline{G})$ è contenuto in $L_\infty(G)$, $L_\infty(G)$ in $L_2(G)$, e $L_2(G)$ in $L_1(G)$, dove i rispettivi operatori di immersione sono limitati di norma limitata superiormente da 1, $\sqrt{m(G)}$ e $\sqrt{m(G)}$.

Infine si trova la stima

$$\|Kf\|_C \leq \int_G |\mathcal{K}(x,y)|\,|f(y)|\,dy \leq M \int_G |f(y)|\,dy = M\|f\|_1, \qquad f \in L_1(G).$$

Abbiamo dimostrato il lemma. □

Lemma III.2 *Sia $\mathcal{K}(x,y)$ un nucleo continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$. Se $(Kf)(x) = 0$ per ogni $x \in \overline{G}$ e per ogni $f \in L_1(G)$, allora $\mathcal{K}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$.*

Dimostrazione. All'assurdo. Sia $\mathcal{K}(x_0,y_0) > 0$ per qualche $(x_0,y_0) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Dalla continuità del nucleo segue l'esistenza di un opportuno $\varepsilon > 0$ tale che $\mathcal{K}(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ per cui $\|(x-x_0, y-y_0)\| < \varepsilon$. Adesso consideriamo la funzione

$$f(y) = \begin{cases} 1 - (|y-y_0|/\varepsilon), & |y-y_0| \leq \varepsilon, \\ 0, & |y-y_0| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Si ha $f \in L_1(G)$. Risulta facilmente che

$$(Kf)(x_0) = \int_G \mathcal{K}(x_0,y) f(y)\,dy > 0.$$

Contraddizione. □

Nello stesso modo segue che $\mathcal{K}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ se $(Kf,g) = 0$ per ogni $f,g \in L_2(G)$.

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (III.2) mediante il metodo delle approssimazioni successive, ponendo $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi^{(p-1)}(y)\,dy + f(x) \equiv \lambda K\varphi^{(p-1)} + f, \qquad p = 1,2,\cdots. \tag{III.9}$$

Dimostriamo che

$$\varphi^{(p)} = \sum_{j=0}^{p} \lambda^j K^j f, \qquad p = 0,1,2,\cdots, \tag{III.10}$$

dove K^j denotano le potenze j-esime dell'operatore K. Infatti, per $p = 0$, la formula (III.10) è valida: $\varphi^{(0)} = f$. Supponendo che questa formula sia valida per p e sostituendo nella successione di ricorrenza (III.9) p con $p+1$, si ottiene la formula (III.10) per $p+1$:

$$\varphi^{(p+1)} = \lambda K\varphi^{(p)} + f = \lambda K \sum_{h=0}^{p} \lambda^h K^h f + f = f + \sum_{j=0}^{p} \lambda^{j+1} K^{j+1} f = \sum_{j=0}^{p+1} \lambda^j K^j f.$$

Dunque, la formula (III.10) è valida per tutti i valori di p.

Le funzioni $(K^p f)(x)$, $p = 0, 1, \cdots$, sono dette *iterazioni* della funzione f.

Secondo il Lemma III.1, le iterazioni di $f \in C(\overline{G})$ sono continue su $\overline{G}$ e, in virtù della (III.7), soddisfano la disuguaglianza

$$\begin{aligned}\|K^p f\|_C &= \|K(K^{p-1}f)\|_C \leq Mm(G)\|K^{p-1}f\|_C \\ &\leq (Mm(G))^2\|K^{p-2}f\|_C \leq \cdots \leq (Mm(G))^p\|f\|_C,\end{aligned}$$

cioè

$$\|K^p f\|_C \leq (Mm(G))^p\|f\|_C, \qquad p = 0, 1, 2, \cdots . \tag{III.11}$$

Da questa disuguaglianza segue che la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K^j f)(x), \qquad x \in \overline{G}, \tag{III.12}$$

detta *serie di Neumann*, è maggiorata dalla serie numerica

$$\|f\|_C \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j (Mm(G))^j = \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| Mm(G)}, \tag{III.13}$$

che converge nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Perciò, per questi valori di λ, la serie (III.12) è uniformemente (infatti, totalmente) convergente in $x \in \overline{G}$, definendo così una funzione $\varphi(x)$ continua su $\overline{G}$. Ciò vuol dire, in virtù della (III.10), che le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}(x)$ per $p \to \infty$ tendono in modo uniforme alla funzione $\varphi(x)$:

$$\lim_{p\to\infty} \max_{x\in\overline{G}} |\varphi^{(p)}(x) - \varphi(x)| = 0, \tag{III.14}$$

ed, inoltre, in virtù della (III.13), è valida la disuguaglianza

$$\|\varphi\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| Mm(G)}. \tag{III.15}$$

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente teorema.

Teorema III.3 *Ogni equazione integrale di Fredholm* (III.2) *con nucleo continuo* $\mathcal{K}(x, y)$*, per* $|\lambda| < 1/Mm(G)$*, ha un'unica soluzione* φ *nella classe* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $f \in C(\overline{G})$ *qualsiasi. Questa soluzione è rappresentata nella forma della serie di Neumann* (III.12) *uniformemente convergente in* $x \in \overline{G}$ *e soddisfa la disuguaglianza* (III.15). *In altre parole, nel disco* $|\lambda| < 1/Mm(G)$ *esiste ed è limitato l'operatore inverso* $(I - \lambda K)^{-1}$.

Nella stessa maniera si dimostra il seguente per $p = 1, 2, +\infty$: Ciascuna equazione integrale di Fredholm (III.2) con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$, per $|\lambda| < 1/Mm(G)$, ha un'unica soluzione φ nella classe $L_p(G)$ per un termine noto $f \in L_p(G)$ qualsiasi. Questa soluzione è rappresentata nella forma della serie di Neumann (III.12) convergente nella norma di $L_p(G)$ e soddisfa la disuguaglianza $\|\varphi\|_p \leq \|f\|_p/(1 - |\lambda|Mm(G))$. In altre parole, nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$ esiste ed è limitato nello spazio di Banach $L_p(G)$ l'operatore inverso $(I - \lambda K)^{-1}$.

Osserviamo infine che il metodo delle approssimazioni successive può essere utilizzato per una risoluzione approssimata dell'equazione integrale (III.2) per $|\lambda|$ sufficientemente piccole.

b. Nuclei iterati. Risolvente. Stabiliamo preliminarmente che è valida la seguente uguaglianza:

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \qquad f, g \in L_2(G). \tag{III.16}$$

Infatti, se f e g appartengono a $L_2(G)$, conformemente al Lemma III.1, anche Kf e K^*g appartengono a $L_2(G)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}(Kf, g) &= \int_G (Kf)(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_G \left[\int_G \mathcal{K}(x,y)f(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx \\ &= \int_G f(y)\left[\int_G \mathcal{K}(x,y)\overline{g(x)}\,dx\right]dy = \int_G f(y)\left[\overline{\int_G \mathcal{K}^*(y,x)g(x)\,dx}\right]dy \\ &= \int_G f(x)\overline{(K^*g)(x)}\,dx = (f, K^*g).\end{aligned}$$

Lemma III.4 *Se K_1 e K_2 sono operatori integrali con nuclei continui $\mathcal{K}_1(x,y)$ e $\mathcal{K}_2(x,y)$, rispettivamente, l'operatore $K_3 = K_2K_1$ è un operatore integrale con nucleo continuo*

$$\mathcal{K}_3(x,y) = \int_G \mathcal{K}_2(x,y')\mathcal{K}_1(y',y)\,dy'. \tag{III.17}$$

In questo caso è valida la seguente formula:

$$(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*. \tag{III.18}$$

Dimostrazione. Per tutte le $f \in L_2(G)$ abbiamo

$$\begin{aligned}(K_3f)(x) = (K_2K_1f)(x) &= \int_G \mathcal{K}_2(x,y')\int_G \mathcal{K}_1(y',y)f(y)\,dy\,dy' \\ &= \int_G\int_G [\mathcal{K}_2(x,y')\mathcal{K}_1(y',y)\,dy']\,f(y)\,dy,\end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.17). È evidente che il nucleo $\mathcal{K}_3(x,y)$ è continuo per $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, per $i = 1,2$ esiste $\delta_i > 0$ tale che $|\mathcal{K}_i(x_1,y_1) - \mathcal{K}_i(x_2,y_2)| < \varepsilon/([M_1 + M_2]m(G))$ se $\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta_i$. Quindi, se $\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, risulta

$$|\mathcal{K}_3(x_1,y_1) - \mathcal{K}_3(x_2,y_2)| \le \int_G |\mathcal{K}_2(x_1,y') - \mathcal{K}_2(x_2,y')||\mathcal{K}_1(y',y_1)|\,dy'$$
$$+ \int_G |\mathcal{K}_2(x_2,y')||\mathcal{K}_1(y',y_1) - \mathcal{K}_1(y',y_2)|\,dy' < \frac{[M_2 m(G) + M_1 m(G)]\varepsilon}{[M_1 + M_2]m(G)} = \varepsilon,$$

implicando la continuità uniforme di $\mathcal{K}_3(x,y)$.

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (III.16), per tutte le f e g appartenenti a $L_2(G)$ si ottiene

$$(f, K_3^* g) = (K_3 f, g) = (K_2 K_1 f, g) = (K_1 f, K_2^* g) = (f, K_1^* K_2^* g),\ \ f,g \in L_2(G),$$

cioè $(f, K_3^* g - K_1^* K_2^* g) = 0$ per tutte le $f,g \in L_2(G)$, e, quindi, $K_3^* = K_1^* K_2^*$, il che equivale all'uguaglianza (III.18). Il lemma è dimostrato. □

Dal Lemma III.4 appena dimostrato segue che gli operatori $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p = 2,3,\cdots$, sono operatori integrali ed i loro nuclei $\mathcal{K}_p(x,y)$ sono continui e soddisfano le relazioni di ricorrenza $\mathcal{K}_1(x,y) = \mathcal{K}(x,y)$,

$$\mathcal{K}_p(x,y) = \int_G \mathcal{K}(x,y')\mathcal{K}_{p-1}(y',y)\,dy' = \int_G \mathcal{K}_{p-1}(x,y')\mathcal{K}(y',y)\,dy'. \quad \text{(III.19)}$$

I nuclei $\mathcal{K}_p(x,y)$ sono detti *nuclei iterati* del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$.

Dalle relazioni di ricorrenza (III.19) segue che i nuclei iterati soddisfano la disuguaglianza

$$|\mathcal{K}_p(x,y)| \le M^p m(G)^{p-1}, \qquad p = 1,2,\cdots. \quad \text{(III.20)}$$

Dalla (III.20) segue che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}, \quad \text{(III.21)}$$

è maggiorata mediante la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} m(G)^k,$$

convergente nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Perciò la serie (III.21) è uniformemente (anche totalmente) convergente in $(x,y,\lambda) \in \overline{G} \times \overline{G} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| <$

$(1/Mm(G)) - \varepsilon\}$, per $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Di conseguenza, la sua somma è continua in $\overline{G} \times \overline{G} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(G))\}$ ed analitica in λ nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Indichiamo la somma della serie (III.21) con $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y).$$

La funzione $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ è detta *risolvente* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Teorema III.5 *La soluzione φ dell'equazione integrale* (III.2) *è unica nella classe $C(\overline{G})$ per $|\lambda| < 1/Mm(G)$ e per qualunque $f \in C(\overline{G})$ è rappresentata con il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ mediante l'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y)\, dy, \tag{III.22}$$

in altre parole, è valida la seguente equazione operatoriale:

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R(\lambda), \qquad |\lambda| < (1/Mm(G)), \tag{III.23}$$

dove $R(\lambda)$ è un operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$.

Dimostrazione. Conformemente al Teorema III.3, la soluzione φ dell'equazione (III.2) è unica nella classe $C(\overline{G})$ per $|\lambda| < 1/Mm(G)$ e per qualunque $f \in C(\overline{G})$ è rappresentata nella forma di una serie di Neumann convergente (III.12). Sostituendo in questa serie le espressioni di iterazione $K^k f$ in termini dei nuclei iterati $\mathcal{K}_k(x, y)$ ed utilizzando la convergenza uniforme della serie (III.21) per il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$, si ottiene la formula (III.22):

$$\varphi(x) = \int_G \left[\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y) \right] f(y)\, dy + f(x) = \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y)\, dy + f(x).$$

Il teorema è dimostrato. $\square$

Dimostriamo che i nuclei iterati $(K^*)_p(x, y)$ ed il risolvente $\mathcal{R}_*(x, y; \lambda)$ del nucleo coniugato $\mathcal{K}^*(x, y)$ sono espressi in termini dei nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x, y)$ e del risolvente del nucleo iniziale $\mathcal{K}(x, y)$ come segue:

$$(\mathcal{K}^*)_p(x, y) = \mathcal{K}_p^*(x, y), \qquad p = 1, 2, \cdots; \tag{III.24}$$

$$\mathcal{R}_*(x, y; \lambda) = \overline{\mathcal{R}(y, x; \overline{\lambda})}, \qquad |\lambda| < (1/Mm(G)). \tag{III.25}$$

L'uguaglianza (III.24) segue dalla formula (III.18), secondo la quale

$$(\mathcal{K}^*)_p(x, y) = (\mathcal{K}_p)^*(x, y), \qquad p = 1, 2, \cdots.$$

Visto che $|\mathcal{K}^*(x,y)| = |\mathcal{K}(y,x)| \le M$, si conclude che, da quanto abbiamo dimostrato, la serie (III.21) per il risolvente $\mathcal{R}_*(x,y;\lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}^*(x,y)$ converge per $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ e $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Da ciò, utilizzando l'uguaglianza (III.24), si ottiene la formula (III.25):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_*(x,y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathcal{K}^*)_{k+1}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}^*_{k+1}(x,y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overline{\mathcal{K}_{k+1}(y,x)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}^k \mathcal{K}_{k+1}(y,x)} = \overline{\mathcal{R}(y,x;\overline{\lambda})}.\end{aligned}$$

Dalla (III.25) si ottiene

$$\mathcal{R}_*(x,y;\lambda) = \overline{\mathcal{R}(y,x;\overline{\lambda})} = \mathcal{R}^*(x,y;\lambda), \qquad |\lambda| < 1/Mm(G),$$

e, di conseguenza, in virtù della (III.23), è valida la formula

$$(I - \lambda K^*)^{-1} = I + \lambda R(\overline{\lambda})^*, \qquad |\lambda| < 1/Mm(G). \tag{III.26}$$

Si può dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ ed inoltre i suoi poli sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Questa proposizione sarà dimostrata sotto per i nuclei degeneri ed hermitiani.

c. Equazioni integrali di Volterra. Supponiamo che $n = 1$, la regione G sia l'intervallo limtato $(0,a)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si annulli nel triangolo $0 < x < y < a$. Questo nucleo si dice *nucleo di Volterra*. Le equazioni (III.1) e (III.2) con nucleo di Volterra assumono la forma

$$\int_0^x \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{III.27}$$

e sono dette *equazioni integrali di Volterra* di prima e di seconda specie, rispettivamente. Ci ristringiamo alle equazioni di seconda specie.

Supponiamo che nell'equazione (III.27) di seconda specie sia $f \in C([0,a])$ e che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sia continuo nel triangolo chiuso $0 \le y \le x \le a$. In questo caso $|\mathcal{K}(x,y)| \le M$ per qualche costante M e l'operatore integrale

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x,y)f(y)\,dy$$

trasferisce $C([0,a])$ in $C([0,a])$.

Come per l'equazione di Fredholm, definiamo le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ conformemente alla seguente formula:

$$\varphi^{(0)} = f, \qquad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \qquad p = 1, 2, \cdots . \quad \text{(III.28)}$$

Le iterazioni $K^p f$ appartengono a $C([0,a])$ e soddisfano la stima

$$|(K^p f)(x)| \leq \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \qquad x \in [0,a], \qquad p = 0, 1, \cdots . \quad \text{(III.29)}$$

Dimostriamo la stima (III.29) per induzione rispetto a p. Per $p = 0$, la stima (III.29) è valida. Supponendola valida per $p-1$, dimostriamo la sua validità per p:

$$\begin{aligned} |(K^p f)(x)| &= \left|(K(K^{p-1}f))(x)\right| \leq \int_0^x |\mathcal{K}(x,y)||(K^{p-1}f)(y)|\,dy \\ &\leq M\|f\|_C M^{p-1} \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!}\,dy = \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}. \end{aligned}$$

Dalla stima (III.29) segue che la serie di Neumann (III.12) è maggiorata su $[0,a]$ mediante la serie numerica convergente

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda| Ma} \quad \text{(III.30)}$$

e per questa ragione è uniformente (infatti, totalmente) convergente in $x \in [0,a]$ per λ qualsiasi, definendo una funzione continua $\varphi(x)$. Dunque, in virtù della (III.28), le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ per $p \to \infty$ tendono uniformemente alla funzione φ:

$$\lim_{p\to\infty} \max_{x\in[0,a]} |\varphi^{(p)}(x) - \varphi(x)| = 0, \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x). \quad \text{(III.31)}$$

Qui, in virtù della (III.30), è valida la disuguaglianza

$$\|\varphi\|_C \leq \|f\|_C e^{|\lambda| Ma}. \quad \text{(III.32)}$$

Formuliamo i risultati ottenuti nella forma del seguente

Teorema III.6 *Ogni equazione integrale di Volterra* (III.27) *con nucleo continuo* $\mathcal{K}(x,y)$ *nel triangolo* $\{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq a\}$ *per* λ *qualsiasi ha un'unica soluzione* φ *nella classe* $C([0,a])$ *per qualunque termine noto* $f \in C([0,a])$. *Questa soluzione è data dalla serie di Neumann uniformemente convergente* (III.31) *soddisfa la disuguaglianza* (III.32). *Dunque un nucleo di Volterra continuo non ha numeri caratteristici.*

Esercizi.

1. Dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ soddisfa l'equazione di Fredholm

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y')\mathcal{R}(y', y; \lambda)\, dy' + \mathcal{K}(x, y)$$

per $|\lambda| < 1/Mm(G)$.

2. Calcolare esplicitamente il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ dell'equazione di Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(y)\, dy + f(x), \qquad 0 \leq x \leq a.$$

Si consiglia partire dalle ipotesi $\varphi \in C([0, a])$ e $f \in C^1([0, a])$ e di convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale con condizione iniziale $\varphi(0) = f(0)$. Il risultato finale è

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y)\, dy.$$

2 Teoremi di Fredholm

In questo paragrafo saranno dimostrati i teoremi di risolvibilità di Fredholm per l'equazione di Fredholm

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{III.33}$$

con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ e per la sua equazione aggiunta

$$\psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g. \tag{III.34}$$

a. Equazioni integrali con nucleo degenere. Il nucleo

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\overline{g_i(y)}, \tag{III.35}$$

dove f_i e g_i appartengono a $C(\overline{G})$, si dice *nucleo degenere*.

Senza perdere di generalità possiamo assumere i sistemi di funzioni $\{f_i\}_{i=1}^N$ e $\{g_i\}_{i=1}^N$ linearmente indipendenti. Infatti, se non è così, si ha allora, per esempio,

$$f_N(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_{N-1} f_{N-1}(x)$$

ed il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$, in virtù della (III.35), assume la forma

$$\mathcal{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)\overline{g_i(y)} + \left(\sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)\right)\overline{g_N(y)}.$$

Procedendo in modo simile, dopo un numero finito di passi, arriveremo ad una situazione nella quale i sistemi di funzioni $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$, nella rappresentazione (III.35), risulteranno linearmente indipendenti.

Consideriamo l'equazione integrale di Fredholm con nucleo degenere (III.2)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G \overline{g_i(y)}\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{III.36}$$

e l'equazione aggiunta

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} g_i(x) \int_G \overline{f_i(y)}\psi(y)\,dy + g(x). \tag{III.37}$$

Cercheremo le soluzioni φ e ψ delle equazioni integrali (III.35) e (III.37) nella classe $C(\overline{G})$.

Dimostriamo che queste equazioni si riducono a sistemi di equazioni algebriche lineari e possono, quindi, essere studiate e risolte mediante i metodi noti di algebra lineare.

Riscriviamo l'equazione (III.36) nella forma

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x), \tag{III.38}$$

dove

$$c_i = \int_G \varphi(y)\overline{g_i(y)}\,dy = (\varphi, g_i) \tag{III.39}$$

sono numeri incogniti. Moltiplicando l'uguaglianza (III.38) per $\overline{g_k(x)}$, integrando su G ed utilizzando la (III.39), si ottiene il seguente sistema di equazioni algebriche lineari per le incognite c_i:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_G \overline{g_k(x)} f_i(x)\,dx + \int_G \overline{g_k(x)} f(x)\,dx. \tag{III.40}$$

Introducendo le notazioni

$$\alpha_{ki} = \int_G \overline{g_k(x)} f_i(x)\,dx, \qquad a_k = \int_G f(x)\overline{g_k(x)}\,dx = (f, g_k), \tag{III.41}$$

riscriviamo il sistema (III.40) come segue:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} c_i + a_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, N.$$

Introducendo la matrice A ed i vettori $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{a}$:

$$A = (\alpha_{ki}), \qquad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_N), \qquad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_N), \tag{III.42}$$

rappresentiamo il sistema (III.42) nella forma matriciale

$$\boldsymbol{c} = \lambda A \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}. \tag{III.43}$$

Dimostriamo che l'equazione (III.39) e l'equazione algebrica (III.43) sono equivalenti. Infatti, se $\varphi \in C(\overline{G})$ è la soluzione dell'equazione (III.36), allora, come abbiamo appena dimostrato, i numeri $c_i = (\varphi, g_i)$, $i = 1, 2, \cdots, N$, soddisfano il sistema (III.42). Inversamente, se i numeri c_i, $i = 1, 2, \cdots, N$, soddisfano il sistema (III.42), la funzione $\varphi(x)$ costruita conformemente alla formula (III.38), è continua su $\overline{G}$ e, in virtù della (III.41), soddisfa l'equazione (III.36)

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G \overline{g_i(y)} \varphi(y)\, dy - f(x) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G \overline{g_i(y)} \left[\lambda \sum_{k=1}^{N} c_k f_k(y) + f(y) \right] dy - f(x) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \left(c_i - \lambda \sum_{k=1}^{N} c_k \alpha_{ik} - a_i \right) = 0.
\end{aligned}$$

Denotiamo con $D(\lambda)$ il determinante di sistema (III.43):

$$D(\lambda) = \det(I - \lambda A), \tag{III.44}$$

e con $M_{ki}(\lambda)$ i cofattori della matrice $I - \lambda A$. È chiaro che $D(\lambda)$ e $M_{ki}(\lambda)$ sono polinomi in λ, ed inoltre $D(\lambda) \not\equiv 0$, visto che $D(0) = \det I = 1$.

Conformemente al Teorema III.5, per λ sufficientemente piccoli (ed allora $D(\lambda) \neq 0$), questa soluzione è espressa in termini del risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ mediante la formula (III.22). Di conseguenza,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{N} M_{ik}(\lambda) f_i(x) \overline{g_k(y)}. \tag{III.45}$$

Dunque, il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo degenere è una funzione razionale di λ e, quindi, ammette un prolungamento meromorfo su tutto il piano della variabile complessa λ. I suoi poli accadono negli zeri di $D(\lambda)$.

b. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo degenere. Nel sottoparagrafo precedente abbiamo costruito in forma esplicita la soluzione di un'equazione integrale con nucleo degenere. Continuiamo lo studio di queste equazioni e stabiliamo le condizioni della loro risolubilità.

Come l'equazione (III.36), riduciamo l'equazione aggiunta (III.37) ad un sistema di equazioni algebriche lineari. Abbiamo

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i g_i(x) + g(x), \tag{III.46}$$

dove $d_i = (\psi, f_i)$ sono numeri incogniti. Il corrispondente sistema di equazioni algebriche lineari equivalente all'equazione (III.37) è della forma

$$d_k = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ki} d_i + b_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, N, \tag{III.47}$$

dove

$$\beta_{ki} = \int_G \overline{f_k(x)} g_i(x)\, dx = \overline{\alpha_{ik}}, \qquad b_k = (g, f_k). \tag{III.48}$$

Dunque, il sistema (III.47) è aggiunto a quello (III.42):

$$\boldsymbol{d} = \overline{\lambda} A^* \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}, \tag{III.49}$$

dove

$$A^* = (\beta_{ki}) = (\overline{\alpha_{ik}}) = \overline{A'}, \qquad \boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_N), \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_N).$$

Dall'algebra lineare sappiamo che i determinanti ed i ranghi di una matrice e della sua trasposta coincidono. Perciò, in virtù della (III.44), si ha

$$\begin{cases} \det(I - \overline{\lambda} A^*) = \det(I - \overline{\lambda A^T}) = \overline{\det(I - \lambda A^T)} = \overline{D(\lambda)}, \\ \operatorname{rango}(I - \overline{\lambda} A^*) = \operatorname{rango}\overline{(I - \lambda A^T)} = \operatorname{rango}(I - \lambda A) = q, \end{cases} \tag{III.50}$$

dove A^T denota la trasposta di una matrice A.

Possono essere esaminati due casi:

1. $D(\lambda) \neq 0$. Allora $q = N$ ed i sistemi (III.43) e (III.49) sono univocamente risolvibili per $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ qualsiasi e queste soluzioni sono date dalle formule (III.38) e (III.46), rispettivamente.

2. $D(\lambda)=0$. In questo caso $q<N$ e, in virtù dalla (III.50), i sistemi omogenei (III.43) e (III.49) hanno esattamente $N-q$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\boldsymbol{c}^{(s)}=(c_1^{(s)},c_2^{(s)},\cdots,c_N^{(s)}),\ \boldsymbol{d}^{(s)}=(d_1^{(s)},d_2^{(s)},\cdots,d_N^{(s)}),\ s=1,2,\cdots,N-q.$$

Le equazioni integrali omogenee (III.36) e (III.37) avranno anch'esse esattamente $N-q$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\boldsymbol{c}^{(s)}=(c_1^{(s)},\cdots,c_N^{(s)}),\qquad s=1,2,\cdots,N-q.$$

Quindi le equazioni integrali omogenee (III.36) e (III.37) avranno anch'esse esattamente $N-q$ soluzioni linearmente indipendente definite dalle formule (III.38) e (III.46), rispettivamente:

$$\varphi_s(x)=\lambda\sum_{i=1}^{N}c_i^{(s)}f_i(x),\quad \psi_s(x)=\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{N}d_i^{(s)}g_i(x),\quad s=1,2,\cdots,N-q. \tag{III.51}$$

Dimostriamo ora l'indipendenza lineare di tali sistemi di soluzioni, $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N-q}$ e $\{\psi_s\}_{s=1}^{N-q}$. Supponiamo che esistano numeri p_s $(s=1,2,\cdots,N-q)$ tali che

$$\sum_{s=1}^{N-q}p_s\varphi_s(x),\qquad x\in\overline{G},$$

cioè, in virtù della (III.51), si ha

$$\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\sum_{s=1}^{N-q}c_i^{(s)}p_s=0,\qquad x\in\overline{G}.$$

Da ciò, in virtù dell'indipendenza lineare del sistema di funzioni $\{f_i\}_{i=1}^N$, segue che

$$\sum_{s=1}^{N-q}c_i^{(s)}p_s=0,\qquad i=1,2,\cdots,N.$$

Visto che il sistema di vettori $\{\boldsymbol{c}^{(s)}\}_{s=1}^{N-q}$ è linearmente indipendente in $\mathbb{R}^N$, le relazioni precedenti implicano che $p_s=0$, $s=1,2,\cdots,N-q$, il che dimostra l'indipendenza lineare del sistema di soluzioni $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N}$. In modo analogo è stabilita l'indipendenza di ortogonalità:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}^{(s)})=\sum_{i=1}^{N}a_i\overline{d_i^{(s)}}=0,\qquad s=1,2,\cdots,N-q. \tag{III.52}$$

Le condizioni (III.52) sono equivalenti alle condizioni

$$(f, \psi_s) = \int_G f(x)\overline{\psi_s(x)}\,dx = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, N-q,$$

poichè, in virtù delle (III.51) e (III.41), si ha

$$\int_G f(x)\overline{\psi_s(x)}\,dx = \lambda \sum_{i=1}^{N} \left(\int_G f(x)\overline{g_i(x)}\,dx \right) \overline{d_i^{(s)}} = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \overline{d_i^{(s)}} = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}^{(s)}).$$

Dunque, abbiamo dimostrato i seguenti teoremi, detti *teoremi di Fredholm*, per le equazioni con nucleo degenere.

Teorema III.7 [**Primo Teorema di Fredholm**] *Se $D(\lambda) \neq 0$, le equazioni* (III.36) *e* (III.37) *sono univocamente risolvibili con termini noti f e g qualsiasi.*

Teorema III.8 [**Secondo Teorema di Fredholm**] *Se $D(\lambda) = 0$, le equazioni omogenee* (III.36) *e* (III.37) *hanno lo stesso numero di soluzioni linearmente indipendenti uguale a $N - q$, in cui q è il rango della matrice $I - \lambda A$.*

Teorema III.9 [**Terzo Teorema di Fredholm**] *Se $D(\lambda) = 0$, per la risolvibilità dell'equazione* (III.36) *è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni $\{\psi_s\}_{s=1}^{N-q}$ dell'equazione omogenea aggiunta* (III.37).

Dai Teoremi III.7 e III.8 segue che i numeri caratteristici di un nucleo degenere coincidono con le radici del polinomio $D(\lambda)$ e, di conseguenza, sono *finiti in numero*. Inoltre, dalla formula (III.45) per un risolvente segue che i numeri caratteristici di un nucleo degenere coincidono con i poli del suo risolvente.

Infine osserviamo che i tre teoremi di Fredholm per le equazioni integrali di nucleo degenere valgono nei seguenti due casi:

1. I termini noti appartengono a $C(\overline{G})$ e le soluzioni si cercano nello spazio $C(\overline{G})$.
2. I termini noti appartengono ad $L_2(G)$ e le soluzioni si cercano nello stesso spazio $L_2(G)$. Si può supporre che $f_1, \cdots, f_N$ e $g_1, \cdots, g_N$ appartengano ad $L_2(G)$.

c. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo continuo. I teoremi di Fredholm per le equazioni di Fredholm con nucleo degenere dimostrati nel sottoparagrafo precedente possono essere estesi alle equazioni integrali con nucleo continuo arbitrario. L'essenza della dimostrazione sta nel fatto che un nucleo continuo è rappresentato come somma di un nucleo degenere e di un nucleo continuo sufficientemente piccolo. Ciò permette, utilizzando i risultati del sottoparagrafo 2.a sulla risolvibilità delle equazioni integrali con nucleo piccolo, di ridurre la corrispondente equazione integrale ad un'equazione integrale con nucleo degenere per le quali i teoremi di Fredholm sono stati già stabiliti. Ne seguirà che i teoremi di Fredholm sono validi per le equazioni con nucleo continuo in una regione limitata.

Dunque, sia il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$. Secondo il teorema di Weierstrass (Vedi il Teorema C.1), questo nucleo può essere approssimato con precisione grande a piacere mediante polinomi, cioè, per ε positivo qualsiasi, esiste un polinomio

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x, y) &= \sum_{0\leq|\alpha+\beta|\leq N} a_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \\ &= \sum_{\substack{0\leq\alpha_i,\beta_i\leq N, i=1,\cdots,N \\ \sum_{i=1}^N (\alpha_i+\beta_i)=N}} a_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_N),(\beta_1,\cdots,\beta_N)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} y_1^{\beta_1} \cdots y_N^{\beta_N},\end{aligned} \quad \text{(III.53)}$$

tale che

$$\max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)| < \varepsilon.$$

Dunque, il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ può essere rappresentato nella forma

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{Q}(x, y), \quad \text{(III.54)}$$

dove $\mathcal{P}(x, y)$ è un nucleo degenere (polinomio) e $\mathcal{Q}(x, y)$ un nucleo continuo piccolo tale che $\max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |\mathcal{Q}(x, y)| < \varepsilon$.

In virtù della (III.54) l'equazione integrale di Fredholm assume la forma

$$\varphi = \lambda\, P\varphi + \lambda\, Q\varphi + f, \quad \text{(III.55)}$$

dove P e Q sono operatori integrali con nuclei $\mathcal{P}(x, y)$ e $\mathcal{Q}(x, y)$, rispettivamente, ed inoltre $P + Q = K$.

Dimostriamo che, per $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$, nella classe $C(\overline{G})$ l'equazione integrale (III.55) è equivalente ad un'equazione integrale con nucleo degenere. Per ciò introduciamo una nuova funzione $\Phi(x)$ incognita mediante la formula

$$\Phi = \varphi - \lambda\, Q\varphi. \quad \text{(III.56)}$$

Secondo il Teorema III.5, la funzione φ è univocamente espressa in termini di Φ mediante la formula

$$\varphi = (I - \lambda\, Q)^{-1}\Phi = (I + \lambda R(\lambda))\Phi, \quad \text{(III.57)}$$

dove $R(\lambda)$ è il operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$, risolvente del nucleo $\mathcal{Q}(x,y)$. In virtù delle (III.56) e (III.57), l'equazione (III.55) assume la seguente forma equivalente:

$$\Phi = \lambda P(I + \lambda R(\lambda))\Phi + f = \lambda T\Phi + f, \tag{III.58}$$

dove

$$T = P + \lambda PR(\lambda). \tag{III.59}$$

Ricordiamo che il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ è continuo rispetto a $(x,y;\lambda)$ in $\overline{G}\times\overline{G}\times\{z\in\mathbb{C} : |z| < 1/\varepsilon m(G)\}$ ed analitico rispetto a λ nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$. Prendendo in considerazione il Lemma III.4, concludiamo che l'operatore T è un operatore integrale con nucleo continuo

$$\mathcal{T}(x,y;\lambda) = \mathcal{P}(x,y) + \lambda\int_G \mathcal{P}(x,y')\mathcal{R}(y',y;\lambda)\,dy'.$$

Inoltre, dalla (III.53) segue che $\mathcal{T}(x,y;\lambda)$ è degenere ed analitico in λ nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$.

Trasformiamo ora l'equazione integrale aggiunta (III.34). In virtù della (III.54), $K^* = P^* + Q^*$, e perciò l'equazione (III.34) assume la forma

$$(I - \overline{\lambda}\,Q^*)\psi = \overline{\lambda}\,P^*\psi + g. \tag{III.60}$$

Applicando l'operatore $(I-\overline{\lambda}\,Q^*)^{-1}$ all'equazione (III.60) ed utilizzando l'uguaglianza (III.26),

$$(I - \overline{\lambda}\,Q^*)^{-1} = I + \overline{\lambda}\,R^*(\lambda), \qquad |\lambda| < 1/\varepsilon m(G),$$

riduciamola all'equazione equivalente

$$\begin{aligned}\psi &= (I - \overline{\lambda}\,Q^*)^{-1}(\overline{\lambda}\,P^*\psi + g)\\ &= (I + \overline{\lambda}\,R^*(\lambda))(\overline{\lambda}\,P^*\psi + g) = \overline{\lambda}(P^* + \overline{\lambda}\,R^*(\lambda)P^*)\psi + (I + \overline{\lambda}\,R^*(\lambda))g.\end{aligned} \tag{III.61}$$

Introducendo le notazioni

$$g_1 = (I + \overline{\lambda}\,R^*(\lambda))g, \qquad g = (I - \overline{\lambda}\,Q^*)g_1 \tag{III.62}$$

e tenendo conto del fatto che, conformemente alle formule (III.18) e (III.59), si ha

$$P^* + \overline{\lambda}\,R^*(\lambda)P^* = (P + \lambda PR(\lambda))^* = T^*,$$

riscriviamo l'equazione (III.61) nella forma

$$\psi = \overline{\lambda}\,T^*\psi + g_1. \tag{III.63}$$

Dunque, per $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$, nella classe $C(\overline{G})$ l'equazione integrale (III.33) è equivalente a quella (III.58) con nucleo degenere $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ analitico nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$, mentre l'equazione aggiunta (III.34) è equivalente all'equazione (III.63), aggiunta della (III.58). Ma per le equazioni (III.58) e (III.63) sono validi i teoremi di Fredholm 2.1-2.3 ed il determinante è una funzione analitica nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$. Da ciò, utilizzando l'equivalenza tra queste equazioni e quelle iniziali (III.33) e (III.34), si ottengono i seguenti *teoremi di Fredholm* per le equazioni integrali con nucleo continuo. Questi teoremi insieme si chiamano alternativa di Fredholm.

Teorema III.10 [**Alternativa di Fredholm**]*Se l'equazione integrale* (III.33) *con nucleo continuo è risolvibile in* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $f \in C(\overline{G})$ *qualsiasi, anche l'equazione aggiunta* (III.34) *è risolvibile in* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $g \in C(\overline{G})$ *qualsiasi, ed inoltre queste soluzioni sono uniche* (*primo teorema di Fredholm*).

Se l'equazione integrale (III.33) *non è risolvibile in* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* f *qualsiasi, allora*

1) *le equazioni omogenee* (III.33) *e* (III.34) *hanno lo stesso numero finito di soluzioni linearmente indipendenti* (*secondo teorema di Fredholm*)*;*
2) *perchè l'equazione* (III.33) *sia risolvibile, è necessario e sufficiente che il termine noto* f *sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta* (III.34) (*terzo teorema di Fredholm*)*.*

Dimostrazione. Per $\lambda = 0$ l'alternativa di Fredholm è valida. Perciò poniamo $\lambda \neq 0$ e nelle costruzioni precedenti scegliamo $(1/\varepsilon) < |\lambda| m(G)$.

Supponiamo che l'equazione (III.33) sia risolvibile in $C(\overline{G})$ per $f \in C(\overline{G})$ qualsiasi. Allora l'equazione (III.58), equivalente alla (III.33), con nucleo degenere sarà anch'essa risolvibile in $C(\overline{G})$ per f qualsiasi. Applicando il Teorema III.9 concludiamo che $D(\lambda) \neq 0$. Ma, in questo caso, conformemente al Teorema III.7, le equazioni (III.58) e (III.63) sono univocamente risolvibili per f e g_1 qualsiasi appartenenti a $C(\overline{G})$. Però le funzioni g_1 e g sono biunivocamente espresse mediante la formula (III.62) e, di conseguenza, le equazioni equivalenti (III.33) e (III.34) sono univocamente risolvibili in $C(\overline{G})$ per f e g qualsiasi. Il primo teorema di Fredholm è dimostrato.

Se l'equazione (III.33) non è risolvibile in $C(\overline{G})$ per un f qualsiasi, allora anche l'equazione (III.58) con nucleo degenere equivalente alla (III.33) non è risolvibile in $C(\overline{G})$ per un f qualsiasi. In base al Teorema III.7 concludiamo che $D(\lambda) = 0$. Ma allora, conformemente al Teorema III.8, le equazioni omogenee (III.58) e (III.63) hanno lo stesso numero finito di soluzioni linearmente indipendenti in $C(\overline{G})$. Visto che le funzioni Φ e φ sono collegate dalle relazioni (III.56), le equazioni omogenee equivalenti (III.33) e (III.34) hanno lo stesso numero finito di soluzioni linearmente indipendenti in $C(\overline{G})$. Il secondo teorema di Fredholm è dimostrato.

Inoltre, in base al Teorema III.9 per la risolvibilità dell'equazione (III.58) per $D(\lambda) = 0$ è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta (III.63). Ma le soluzioni ψ delle equazioni omogenee equivalenti (III.33) e (III.58), come pure i secondi membri f delle equazioni equivalenti (III.33) e (III.58), sono identiche. Di conseguenza, per la risolvibilità dell'equazione (III.33), nel caso considerato, è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (III.34). Il terzo teorema di Fredholm è dimostrato. □

Dimostriamo ora il **Quarto Teorema di Fredholm**: *In ogni disco* $|\lambda| \leq R$ *ci può essere solo un numero finito di numeri caratteristici del nucleo* $\mathcal{K}(x, y)$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = 1/(R+1)m(G)$. Allora per $|\lambda| < R+1$ avremo $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$. Per questa ragione per $|\lambda| < R+1$ le equazioni omogenee (III.33) e (III.58) sono equivalenti. Di conseguenza, nel disco $|\lambda| < R+1$ i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ coincidono con le radici dell'equazione $D(\lambda) = 0$. Dato che il nucleo $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ è analitico in λ nel disco $|\lambda| < R+1$, $D(\lambda)$ è una funzione analitica in λ in questo disco. In base alla proprietà di unicità delle funzioni analitiche, concludiamo che nel disco $|\lambda| \leq R$ ci può essere solo un numero finito di radici dell'equazione $D(\lambda) = 0$, e quindi anche il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ può avere solo un numero finito di numeri caratteristici. Il teorema è dimostrato. □

Osserviamo infine che i quattro teoremi di Fredholm valgono anche se le equazioni integrali (III.33) e (III.34) vengono considerate in uno degli spazi $L_1(G)$ o $L_2(G)$ anzicchè nello spazio $C(\overline{G})$. Infatti, gli operatori integrali K e K^* trasformano $L_1(G)$ e $L_2(G)$ in $C(\overline{G})$, cioè, $K\varphi$ e $K^*\psi$ appartengono a $C(\overline{G})$ se φ e ψ appartengono ad $L_p(G)$, $p = 1, 2$. Quindi, se la (III.33) avesse una soluzione $\varphi \in L_p(G)$, $p = 1, 2$, per il termine noto $f \in C(\overline{G})$, allora si avrebbe $\varphi = \lambda K\varphi + f \in C(\overline{K})$. Con questa osservazione potremmo ora ripetere le dimostrazioni dei quattro teoremi di Fredholm nello spazio $L_p(G)$, $p = 1, 2$, prima per il nucleo degenere e poi per un nucleo continuo qualsiasi. Così si trovano gli stessi autovalori e autofunzioni per le equazioni (III.33) e (III.34) considerate in $L_p(G)$, $p = 1, 2$, come per quelle considerate in $C(\overline{G})$.

3 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano

Un nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è detto *hermitiano* se questo nucleo coincide con il suo coniugato hermitiano, $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$. La corrispondente equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{III.64}$$

per λ reali coincide con la sua aggiunta, essendo $K^* = K$ un operatore autoaggiunto nello spazio $L_2(G)$. Se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è continuo, K è anche limitato su $L_1(G)$ e $C(\overline{G})$. Di conseguenza, conviene considerare quest'equazione nello spazio $L_2(G)$. Gli autovalori e le autofunzioni trovati sono anche gli autovalori e le autofunzioni se la (III.64) viene considerata in uno degli spazi $L_1(G)$ e $C(\overline{G})$ per un nucleo continuo ed hermitiano qualsiasi.

a. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che K sia un operatore integrale con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$. Quest'operatore trasferisce $L_2(G)$ (G è una regione limitata) in $L_2(G)$ (vedi il Lemma III.1) ed è autoaggiunto:

$$(Kf, g) = (f, Kg), \qquad f, g \in L_2(G). \tag{III.65}$$

Inversamente, se un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ è autoaggiunto, questo nucleo è hermitiano. Infatti, dalla (III.65) (valida anche per $f, g \in C(\overline{G})$) segue che $\mathcal{K}(x,y)$ e $\mathcal{K}^*(x,y)$ sono ambedue il nucleo dell'operatore integrale K e quindi, in virtù del Lemma III.2, $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}^*(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$.

Dalla (III.24) segue che tutti i nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x,y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ sono anch'essi hermitiani:

$$\mathcal{K}_p^*(x,y) = (\mathcal{K}^*)_p(x,y) = \mathcal{K}_p(x,y).$$

Sia K un compatto. Un sottoinsieme $\mathcal{M}$ (cioè, un insieme di funzioni continue su K) si dice *equicontinuo* su K se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{M}$, non appena $|x_1 - x_2| < \delta$ per $x_1, x_2 \in K$. In particolare, $f \in C(K)$ è (uniformemente) continua se e solo se l'insieme $\mathcal{M} = \{f\}$ è equicontinuo.

Lemma III.11 *Un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ trasferisce ogni insieme limitato appartenente a $L_p(G)$, $p = 1, 2$, in un insieme limitato in $C(\overline{G})$ e equicontinuo su $\overline{G}$.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per $p = 1, 2$, osservando che $(p-1)/p = 0$ per $p = 1$ e $(p-1)/p = 1/2$ per $p = 2$. Sia B un insieme limitato in $L_p(G)$, $p = 1, 2$: $\exists A : \|f\|_p \leq A$ per ogni $f \in B$. Dal Lemma III.1 segue che $\|Kf\|_C \leq Mm(G)^{(p-1)/p} A$, $f \in B$, $p = 1, 2$, e quindi K trasferisce B in un insieme limitato in $C(\overline{G})$. Inoltre, visto che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente continuo su $\overline{G}\times\overline{G}$, per un $\varepsilon>0$ qualsiasi esiste $\delta>0$ tale che

$$|\mathcal{K}(x',y)-\mathcal{K}(x'',y)|<\frac{\varepsilon}{A(m(G))^{(p-1)/p}},$$

quando $|x'-x''|<\delta$ e $\{x',x'',y\}\subset\overline{G}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (III.6), in cui $\mathcal{K}(x,y)$ è sostituito con $|\mathcal{K}(x',y)-\mathcal{K}(x'',y)|$, per ogni $f\in B$ si ottiene

$$\begin{aligned}|(Kf)(x')-(Kf)(x'')| &= \left|\int_G [\mathcal{K}(x',y)-\mathcal{K}(x'',y)]\,f(y)\,dy\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon(m(G))^{(p-1)/p}\|f\|_p}{A(m(G))^{(p-1)/p}}\leq\varepsilon,\end{aligned}$$

quando $|x'-x''|<\delta$ e $\{x',x'',y\}\subset\overline{G}$. Ciò vuol dire che l'insieme $\{Kf : f\in B\}$ è equicontinuo su $\overline{G}$. $\square$

Teorema III.12 [**Teorema di Ascoli-Arzelà**] *Se un insieme infinito B è limitato in $C(K)$ dove K è un compatto, ed è equicontinuo su K, da quest'insieme si può estrarre una successione convergente in $C(K)$.*[1]

Dimostrazione. Come è noto, ogni compatto in $\mathbb{R}^n$ ha un sottoinsieme denso numerabile $\{x_n : n=1,2,\cdots\}$. Per ipotesi, l'insieme di numeri $\{f(x_1) : f\in B\}$ è limitato. Quindi esiste una successione $\{f_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty$ tale che $f_k^{(1)}(x_1)$ è convergente se $k\to\infty$. Inoltre, visto che l'insieme di numeri $\{f_k^{(1)}(x_2) : k=1,2,\cdots\}$ è limitato, estraiamo dalla $\{f_k^{(1)}\}$ una sottosuccessione $\{f_k^{(2)}\}$ tale che $\{f_k^{(2)}(x_2)\}$ è convergente. Continuando così, troviamo le successioni $\{f_k^{(m)}\}$ in B, dove $n=1,2,\cdots$ e $\{f_k^{(n+1)}\}$ è una sottosuccessione della $\{f_k^{(n)}\}$, tale che $\{f_k^{(n)}(x_n)\}$ è convergente se $n\to\infty$.

Consideriamo ora la successione diagonale $\{g_k\}$ in B dove $g_k=f_k^{(k)}$, $k=1,2,\cdots$. Per un qualunque punto x_i la successione numerica $\{g_k(x_i)\}$ converge se $k\to\infty$, poichè, per costruzione, per $k\geq i$, questa successione è una sottosuccessione della successione convergente $\{f_k^{(i)}(x_i)\}$.

Dimostriamo ora che la successione di g_k, $k=1,2,\cdots$, è uniformemente convergente su K. Supponiamo che sia $\varepsilon>0$. Visto che questa successione è equicontinua su K, esiste $\delta>0$ tale che per $k=1,2,\cdots$ si ha

$$|g_k(x)-g_k(x')|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{III.66}$$

[1]In altre parole, se un insieme B è limitato in $C(K)$ dove K è un compatto, ed è equicontinuo su K, la sua chiusura in $C(K)$ è compatta.

quando $|x - x'| < \delta$ e $x, x' \in K$. Essendo K compatto, dall'insieme di punti $x_1, x_2, \cdots$ si può scegliere un numero finito di questi punti, $x_1, x_2, \cdots, x_l$, $l = l(\varepsilon)$, in modo che, per ogni punto $x \in K$ esista un punto x_i, $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$. Ricordando che la successione di $g_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, converge ai punti $x_1, \cdots, x_l$, concludiamo che esiste un numero $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|g_k(x_i) - g_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k, p \geq N,\ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{III.67}$$

Sia ora x un punto arbitrario dell'insieme K. Scegliendo un punto x_i, $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$, in virtù delle (III.66) e (III.67) si ottiene

$$\begin{aligned}|g_k(x) - g_p(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_i)| + |g_k(x_i) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_p(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad k, p \geq N,\end{aligned}$$

dove N non dipende da $x \in K$. Ciò significa che la successione di g_k, $k = 1, 2, \cdots$, è una successione di Cauchy in $C(K)$. Siccome $C(K)$ è uno spazio di Banach, la successione converge uniformemente su K. □

Il teorema di Ascoli-Arzelà esprime la proprietà di *compattezza* di un qualunque insieme limitato e equicontinuo in $C(K)$. Inoltre, il Lemma III.11 afferma che un operatore integrale con nucleo continuo trasferisce ogni insieme limitato in $L_2(G)$ (oppure in $L_1(G)$) in un sottoinsieme di $C(\overline{G})$ con chiusura (in $C(\overline{G})$) compatta.

c. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano: Il principio variazionale. Non tutti i nuclei che non sono identicamente nulli, hanno autovalori; per esempio, i nuclei di Volterra non hanno autovalori. Tuttavia, è valido il seguente

Teorema III.13 [**Principio di Rayleigh-Ritz**] *Ogni nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$ ha almeno un autovalore e l'autovalore λ_1 più piccolo in modulo soddisfa il principio variazionale*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{0 \neq f \in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2}. \tag{III.68}$$

Dimostrazione. Sia

$$\nu = \sup_{\|f\|_2 = 1} \|Kf\|_2. \tag{III.69}$$

Dalla (III.8) segue che $\|Kf\|_2 \leq M\, m(G)$ sulle funzioni di $L_2(G)$ di norma 1 e quindi $\nu \leq M\, m(G)$. È inoltre evidente che $\nu \geq 0$. Dimostriamo che $\nu > 0$. Infatti, se $\nu = 0$, allora, in virtù della (III.69), avremmo $\|Kf\|_2 = 0$, cioè $Kf = 0$ per tutte le $f \in L_2(G)$, e quindi $\mathcal{K}(x,y) = 0$, $x, y \in G$, il che contraddice l'ipotesi.

Dalla definizione della ν segue l'esistenza di una successione di f_k, $k = 1, 2, \cdots$, $\|f_k\|_2 = 1$, tale che

$$\|Kf_k\|_2 \to \nu, \qquad k \to +\infty; \tag{III.70}$$

inoltre, è valida la disuguaglianza

$$\|K^2 f\|_2 = \left\| K\left(\frac{Kf}{\|Kf\|_2}\right)\right\|_2 \|Kf\|_2 \leq \nu \|Kf\|_2, \qquad f \in L_2(G). \tag{III.71}$$

Dimostriamo ora che

$$K^2 f_k \to \nu^2 f_k \to 0, \qquad k \to +\infty \text{ in } L_2(G). \tag{III.72}$$

Infatti, utilizzando le (III.65), (III.70) e (III.71), si ottiene

$$\begin{aligned}
\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|_2^2 &= (K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k) \\
&= (K^2 f_k, K^2 f_k) + \nu^4 (f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k, f_k) \\
&= \|K^2 f_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (Kf_k, Kf_k) \\
&\leq \nu^2 \|Kf_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|Kf_k\|_2^2 \\
&= \nu^4 - \nu^2 \|Kf_k\|_2^2 \to 0, \qquad k \to +\infty,
\end{aligned}$$

il che è equivalente alla relazione limite (III.72).

Conformemente al Lemma III.11, la successione delle funzioni Kf_k, $k = 1, 2, \cdots$, è limitata in $C(\overline{G})$ e equicontinua su $\overline{G}$. Ma in questo caso, in base al teorema di Ascoli-Arzelà, esiste anche una sottosuccessione $\psi_i = Kf_{k_i}$, $i = 1, 2, \cdots$, che converge in $C(\overline{G})$ ad una funzione $\psi \in C(\overline{G})$, $\|\psi - \psi_i\|_C \to 0$, $i \to \infty$. Da ciò, utilizzando le (III.6) e (III.7), e la relazione (III.72), si ottiene

$$\begin{aligned}
&\|K^2\psi - \nu^2\psi\|_C \leq \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\|_C \\
&\leq M\, m(G)\|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i})\|_C \\
&\leq (M^2 m(G)^2 + \nu^2)\|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{m(G)}\|K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_2 \to 0,\ i \to +\infty,
\end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$K^2\psi = \nu^2\psi.$$

Dimostriamo che $\psi \neq 0$. Dalla relazione limite (III.72) segue che

$$K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \to 0, \qquad i \to +\infty \text{ in } L_2(G),$$

e, di conseguenza, $\|K\psi_i\|_2 \to \nu^2$, $i \to +\infty$. D'altra parte, dal Lemma III.1 segue che $\|K\psi_i\|_2 \to \|K\psi\|_2$, $i \to +\infty$. Quindi, $\|K\psi\|_2 = \nu^2 > 0$, da cui segue che $\psi \neq 0$.

Dunque, la funzione ψ costruita è un'autofunzione del nucleo $\mathcal{K}_2(x,y)$ corrispondente all'autovalore ν^2. Ma, allora, almeno uno dei numeri $\pm\nu$ è autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. In tal modo, l'autovalore λ_1 costruito è uguale a ν in modulo e, quindi, in virtù della (III.69), soddisfa il principio variazionale (III.68).

Non resta altro che stabilire che λ_1 è l'autovalore più piccolo in modulo del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Infatti, se λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione, cioè $\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$, allora, in virtù della (III.68), si ha

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f\in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{\|K\varphi_0\|_2}{\|\varphi_0\|_2} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

e quindi $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$. □

Considerando il teorema sopra dimostrato ed i teoremi di Fredholm, per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y) \not\equiv 0$, si ottengono le seguenti asserzioni:

L'insieme di autovalori $\{\lambda_k\}$ *non è vuoto, è situato sull'asse reale, e non ha punti di accumulazione finiti; ogni autovalore è di moltiplicità finita ed il sistema di autofunzioni* $\{\varphi_k\}$ *può essere scelto ortonormale*:

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{k,i}. \tag{III.73}$$

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, *l'equazione* (III.64) *è univocamente risolvibile per un termine noto* $f \in C(\overline{G})$ *qualsiasi. Se* $\lambda = \lambda_k$, *per la risolvibilità dell'equazione* (III.64) *è necessario e sufficiente che*

$$(f, \varphi_{k+1}) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, r_k - 1, \tag{III.74}$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{k+r_k-1}$ *sono autofunzioni corrispondenti all'autovalore* λ_k *e* r_k *è la moltiplicità di* λ_k.

4 Teorema di Hilbert-Schmidt

a. Teorema di Hilbert-Schmidt per un nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ siano gli autovalori del nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y) \not\equiv 0$ disposti in ordine di crescita del loro modulo, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots$, e che $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ siano le corrispondenti autofunzioni ortonormali, $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{kl}$.

Come sappiamo, gli autovalori λ_k sono reali e le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono continue su $\overline{G}$; in questo caso l'insieme $\{\lambda_k\}$ è finito o numerabile; nell'ultimo caso si ha $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Inoltre, in virtù del 3.3, è valida la disuguaglianza

$$\|Kf\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|}\|f\|_2, \qquad f \in L_2(G). \tag{III.75}$$

Notiamo un'altra disuguaglianza, e cioè[2]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dy, \qquad x \in \overline{G}. \tag{III.76}$$

Nel seguito verrà infatti dimostrato che vale l'uguaglianza nella (III.76).

Introduciamo ora la successione di nuclei continui hermitiani

$$\mathcal{K}^{(p)}(x,y) = \mathcal{K}(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \qquad p = 1, 2, \cdots, \qquad . \tag{III.77}$$

I corrispondenti operatori integrali $K^{(p)}$ hermitiani soddisfano

$$K^{(p)} f = Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i, \qquad f \in L_2(G). \tag{III.78}$$

Dimostriamo che $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots$, e $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \cdots$ costituiscono tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$. Infatti, in virtù della (III.78) abbiamo

$$K^{(p)} \varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \qquad k \geq p+1,$$

di modo che λ_k e φ_k, $k \geq p+1$, siano autovalori ed autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$. Inversamente, siano λ_0 e φ_0 un autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$, e cioè, in virtù della (III.78), si avrà

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)} \varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_0)}{\lambda_i} \varphi_i. \tag{III.79}$$

Da qui per $k = 1, 2, \cdots, p$ si ottiene

$$\begin{aligned}(\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} \\ &= \lambda_0 (\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) = 0,\end{aligned}$$

e quindi, in virtù della (III.79), $\lambda_0 = \lambda_0 K\varphi_0$. Dunque, λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Visto che φ_0 è ortogonale

[2] Se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ ha un numero finito di autovalori, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$, poniamo $\lambda_k = +\infty$ per $k > N$.

a tutte le autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$, ne segue che λ_0 coincide con uno degli autovalori $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots$ e φ_0 può essere considerata uguale a φ_k per $k \geq p+1$. Dunque, λ_{p+1} è il più piccolo autovalore del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$ in modulo. Applicando la disuguaglianza (III.75) a questo nucleo e tenendo conto della (III.78), si ottiene la disuguaglianza

$$\|K^{(p)}f\|_2 = \left\| Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda_{p+1}|}, \qquad f \in L_2(G), \tag{III.80}$$

dove $p = 1, 2, \cdots$.

Supponiamo che il nucleo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ abbia un numero finito di autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$. Da quanto abbiamo dimostrato, il nucleo hermitiano $\mathcal{K}^{(N)}(x,y)$ non ha autovalori, e quindi, in base al Teorema III.13, si ha $\mathcal{K}^{(N)}(x,y) \equiv 0$, in modo che, in virtù della (III.77), si ha

$$\mathcal{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \tag{III.81}$$

il che significa che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è degenere.

Da ciò, e ricordando anche che un nucleo degenere ha sempre un numero finito di autovalori, formuliamo il seguente risultato: *affinché un nucleo continuo hermitiano sia degenere, è necessario e sufficiente che questo nucleo abbia un numero finito di autovalori.*

Teorema III.14 [**Teorema di Hilbert-Schmidt**] *Se una funzione $f(x)$ appartiene all'immagine di un operatore integrale K di nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$, cioè $f = Kh$, la sua serie in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente convergente su $\overline{G}$ alla funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f,\varphi_k)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x). \tag{III.82}$$

Dimostrazione. Visto che $f = Kh$, $h \in L_2(G)$, in base al Lemma III.1, $f \in C(\overline{G})$ ed i coefficienti di Fourier delle funzioni f e h in termini delle autofunzioni $\{\varphi_k\}$ del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sono collegati con la relazione

$$(f,\varphi_k) = (Kh,\varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}. \tag{III.83}$$

Se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ ha un numero finito di autovalori, si ha, in virtù della (III.81),

$$f(x) = (Kh)(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

ed il teorema di Hilbert-Schmidt è dimostrato.

Supponiamo ora che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ abbia un numero infinito di autovalori. In questo caso $|\lambda_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$. Perciò, in virtù delle (III.80) e (III.83), la serie (III.82) converge a f nella norma di $L_2(G)$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} (f,\varphi_k)\varphi_k \right\|_2 = \left\| Kh - \sum_{k=1}^{p} \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k \right\|_2 \le \frac{\|h\|_2}{|\lambda_{p+1}|} \to 0, \qquad p \to +\infty.$$

Resta da dimostrare che la serie (III.82) converge in modo uniforme su $\overline{G}$. Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz e la (III.76), si ottiene, per tutti i valori di p e q e per ogni $x \in \overline{G}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} |(h,\varphi_k)| \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| &\le \left[\sum_{k=p}^{q} |(h,\varphi_k)|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\right]^{1/2} \\ \le \left[\sum_{k=p}^{q} |(h,\varphi_k)|^2\right]^{1/2} &\left[\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy\right]^{1/2} \le M\sqrt{m(G)} \left[\sum_{k=p}^{q} |(h,\varphi_k)|^2\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{III.84}$$

Siccome l'insieme ortonormale $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ può essere esteso ad una **base** ortonormale (per cui vale l'identità di Parseval) e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h,\varphi_k)|^2 \le \|h\|_2^2,$$

il primo membro della disuguaglianza (III.84) tende a zero per $p,q \to +\infty$. Ciò significa che la serie (III.82) è puntualmente convergente su $\overline{G}$. Siccome il maggiorante in (III.84) non dipende da $x \in \overline{G}$, la convergenza risulta uniforme in $x \in \overline{G}$. □

b. Sviluppo bilineare dei nuclei iterati. Dimostriamo che *il nucleo iterato* $\mathcal{K}_2(x,y)$ *di un nucleo continuo hermitiano* $\mathcal{K}(x,y)$ *può essere sviluppato in una serie bilineare in termini delle autofunzioni di questo nucleo*,

$$\mathcal{K}_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^2}, \tag{III.85}$$

e la serie è uniformemente convergente su $\overline{G} \times \overline{G}$.

In virtù della formula (III.19), per ogni $y \in \overline{G}$ il nucleo $\mathcal{K}_2(x,y)$ appartiene all'immagine dell'operatore K di nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ e quindi, in base al teorema di Hilbert-Schmidt, esso può essere sviluppato in una serie uniformemente convergente rispetto alle autofunzioni di questo nucleo:

$$\mathcal{K}_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_2(x,y), \varphi_k)\varphi_k(x).$$

Visto che il nucleo $\mathcal{K}_2(x,y)$ è hermitiano, abbiamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}_2(x,y), \varphi_k) &= \int_G \mathcal{K}_2(x,y)\overline{\varphi_k(x)}\,dx \\ &= \int_G \overline{\mathcal{K}_2(y,x)\varphi_k(x)}\,dx = \overline{(K^2\varphi_k)(y)} = \frac{\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^2}.\end{aligned} \tag{III.86}$$

Dunque, l'uguaglianza (III.85) è dimostrata e la serie della (III.85) è uniformemente convergente in $x \in \overline{G}$ per ogni $y \in \overline{G}$. Tenendo conto del fatto che, in virtù della (III.19), si ha

$$\mathcal{K}_2(x,y) = \int_G \mathcal{K}(x,y')\mathcal{K}(y',x)\,dy' = \int_G \mathcal{K}(x,y')\overline{\mathcal{K}(x,y')}\,dy' = \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy,$$

si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy. \tag{III.87}$$

Dal teorema di Dini[3] segue che la serie (III.87) è uniformemente convergente su $\overline{G}$, poichè la parte a destra è una funzione continua in $x \in \overline{G}$. Integrando termine a termine la serie uniformemente convergente (III.87) e tenendo conto della normalizzazione delle autofunzioni, si ottiene la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dxdy. \tag{III.88}$$

c. Soluzione di un'equazione integrale non omogenea con nucleo continuo hermitiano. Costruiamo la soluzione dell'equazione integrale non omogenea

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{III.89}$$

con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$.

[3]Teorema di Dini: Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione *crescente* di funzioni continue definite su un compatto. Se esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e f è continua sul compatto, allora la convergenza è uniforme.

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, e $f \in C(\overline{G})$, la soluzione (unica) φ dell'equazione integrale (III.89) *può essere rappresentata nella forma di una serie che è uniformemente convergente su $\overline{G}$ (formula di Schmidt)*:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x). \tag{III.90}$$

Infatti, per $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, una soluzione dell'equazione (III.89) esiste ed è unica in $C(\overline{G})$ per un termine noto $f \in C(\overline{(G)})$ qualsiasi. Per il teorema di Hilbert-Schmidt la funzione $K\varphi$ può essere sviluppata in una serie uniformemente convergente in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Si ha quindi

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k + f. \tag{III.91}$$

Calcoliamo i coefficienti (φ, φ_k). Dall'equazione (III.89) abbiamo

$$(\varphi, \varphi_k) = \lambda(K\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \lambda(\varphi, K\varphi_k) + (f, \varphi_k) = \frac{\lambda}{\lambda_k}(\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k)$$

e, di conseguenza,

$$(\varphi, \varphi_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}(f, \varphi_k), \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

da cui, in virtù della (III.91), segue la formula di Schmidt (III.90).

Conformemente al teorema di Hilbert-Schmidt si ha

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed inoltre la serie è uniformemente convergente su $\overline{G}$. Perciò la formula di Schmidt (III.90) assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x) \\ &= \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y)\, dy + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x). \end{aligned} \tag{III.92}$$

Inoltre, dalla convergenza uniforme della serie bilineare (III.85), per $p = 2$, segue la convergenza uniforme della serie bilineare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}$$

e la sua somma è una funzione continua rispetto a $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$, $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, e meromorfa rispetto a λ con poli semplici λ_k. Di conseguenza, per $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, nella formula (III.92) si può invertire l'ordine di sommatoria e d'integrazione, ottenendo come risultato

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \left[\mathcal{K}(x,y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \right] f(y)\, dy + f(x). \tag{III.93}$$

D'altra parte, secondo il Teorema III.3, per λ piccoli, la soluzione dell'equazione (III.89) può essere espressa in termini del risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$, mediante la formula (III.22). Di conseguenza,

$$\mathcal{R}(x,y;\lambda) = \mathcal{K}(x,y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}. \tag{III.94}$$

Dunque, il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ con poli semplici λ_k e con residui uguali a

$$-\sum_{i=0}^{r_k-1} \varphi_{k+i}(x)\overline{\varphi_{k+i}(y)}, \tag{III.95}$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{k+r_k-1}$ sono le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ corrispondenti a λ_k e r_k è la moltiplicità di λ_k.

Riscriviamo la formula (III.94) come segue:

$$\mathcal{R}(x,y;\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k - \lambda}, \tag{III.96}$$

e la serie bilineare converge in $L_2(G \times G)$.

La formula (III.90) resta anche valida per $\lambda = \lambda_j$ se, conformemente al terzo teorema di Fredholm, si ha

$$(f, \varphi_{j+i}) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, r_j - 1.$$

In questo caso la soluzione dell'equazione (III.89) non è unica e la sua soluzione generale è data dalla formula

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j-1} c_i \varphi_{j+i}(x), \tag{III.97}$$

dove c_i sono costanti arbitrarie.

Capitolo IV

PROBLEMI AL CONTORNO E FUNZIONI SPECIALI

0 Introduzione

In questo capitolo vengono studiati alcuni problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, in particolare le equazioni di Laplace, di Poisson, delle onde e di Schrödinger nello spazio e nel piano. La separazione delle variabili in tali equazioni conduce spesso a certe equazioni differenziali ordinarie in un intervallo della retta di tipo Sturm-Liouville, in particolare le equazioni di Bessel e di Legendre. Per questo motivo vengono anche studiate alcune cosiddette funzioni speciali, in particolare le funzioni di Bessel, le funzioni sferiche ed alcuni polinomi ortogonali come quelli di Legendre, Hermite e Laguerre.

Se non si fanno esplicite riserve, la regione G è supposta limitata e la sua frontiera S regolare a tratti. Nel caso unidimensionale abbiamo $G = (a, b)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$.

1 Problemi agli autovalori

a. Impostazione del problema agli autovalori. Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \qquad x \in G, \tag{IV.1}$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_S = 0. \tag{IV.2}$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\overline{G}), \qquad q \in C(\overline{G}); \qquad p(x) > 0, \qquad q(x) \in \mathbb{R}, \qquad x \in \overline{G}, \\ \alpha \in C(S), \qquad \beta \in C(S), \\ \alpha(x) \geq 0, \qquad \beta(x) \geq 0, \qquad \alpha(x) + \beta(x) > 0, \qquad x \in S. \end{cases} \tag{IV.3}$$

Sia $S_0 = \{x \in S : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$. In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \overline{G}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1,\ \beta(x) \equiv 0, \quad \text{quindi } u = 0,\ x \in S, \qquad \text{[problema di Dirichlet]} \\ \alpha(x) \equiv 0,\ \beta(x) \equiv 1, \quad \text{quindi } \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0,\ x \in S, \qquad \text{[problema di Neumann].} \end{cases}$$

Il problema (IV.1)-(IV.2) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfi l'equazione (IV.1) in G e la condizione (IV.2) sulla frontiera S. Evidentemente, il problema (IV.1)-(IV.2) ha sempre la soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (IV.1)-(IV.2) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfano la condizione al contorno (IV.2) e la condizione $Lf \in L_2(G)$ costituiscono il dominio $\mathcal{M}_L$ dell'operatore L. Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(G)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(G)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in G) è denso in $L_2(G)$ ed è contenuto in $\mathcal{M}_L$, $\mathcal{M}_L$ è denso in $L_2(G)$.

In generale, il dominio $\mathcal{M}_L$ di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

b. Formule di Green. Se $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v \in C^1(\overline{G})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_G v\, Lu\, dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx - \int_S pv \frac{\partial u}{\partial n}\, dS + \int_G quv\, dx. \tag{IV.4}$$

Per dimostrare la formula (IV.4) prendiamo una regione arbitraria G' con frontiera S' una superficie regolare a tratti tale che $\overline{G'} \subset G$. Visto che $u \in C^2(G)$, si ha anche $u \in C^2(\overline{G'})$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{G'} v\, Lu\, dx &= \int_{G'} v \left[-\mathrm{div}\,(p\, \mathrm{grad}\, u) + qu\right] dx \\ &= -\int_{G'} \mathrm{div}\,(pv\, \mathrm{grad}\, u)\, dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{G'} quv\, dx. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{G'} v\,Lu\,dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int_{S'} pv\frac{\partial u}{\partial n'}\,dS' + \int_{G'} quv\,dx,$$

dove S' è la frontiera di G'. Facendo tendere G' a G nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{G})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (IV.4). In tal caso l'integrale del primo membro della (IV.4) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui G' tende a G, poichè gli integrali nelle parte a destra della (IV.4) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_G (v\,Lu - u\,Lv)\,dx = \int_S p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \qquad \text{(IV.5)}$$

Per dimostrare la formula (IV.5), scambiamo u e v nella (IV.4):

$$\int_G u\,Lv\,dx = \int_G p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx - \int_S pu\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS + \int_G qvu\,dx, \qquad \text{(IV.6)}$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta della (IV.6). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (IV.5).

In particolare per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (IV.4) e (IV.5) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_G v\,\Delta u\,dx = -\int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + \int_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, \qquad \text{(IV.7)}$$

$$\int_G (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx = \int_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS. \qquad \text{(IV.8)}$$

c. Proprietà dell'operatore L. *L'operatore* L *è hermitiano*:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \qquad f, g \in \mathcal{M}_L. \qquad \text{(IV.9)}$$

Infatti, visto che $f, \overline{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L_2(G)$ e $L\overline{g} = \overline{Lg} \in L_2(G)$. In tal caso la seconda formula di Green (IV.5), per $u = f$ e $v = \overline{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_G (\overline{g}\,Lf - f\,\overline{Lg})\,dx = \int_S p\left(f\frac{\partial \overline{g}}{\partial n} - \overline{g}\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS. \quad \text{(IV.10)}$$

Inoltre, le funzioni f e $\overline{g}$ soddisfano le condizioni al contorno (IV.2):

$$\left(\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n}\right)\bigg|_S = 0, \qquad \left(\alpha \overline{g} + \beta \frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right)\bigg|_S = 0. \tag{IV.11}$$

Per l'ipotesi (IV.3), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in S$. Perciò per ogni $x \in S$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (IV.11) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$ e quindi il suo determinante si annulla, cioè

$$\det \begin{bmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \overline{g} & \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} \end{bmatrix} = \left(f \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} - \overline{g} \frac{\partial f}{\partial n}\right)\bigg|_S = 0.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza ottenuta, dalla formula (IV.10) otteniamo l'uguaglianza (IV.9), la quale significa che l'operatore L è hermitiano.

Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \overline{f}$ nella prima formula di Green (IV.4) e tenendo conto del fatto che $f \in L_2(G)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_G p|\text{grad}\, f|^2\, dx - \int_S pf \frac{\partial \overline{f}}{\partial n}\, dS + \int_G q|f|^2\, dx. \tag{IV.12}$$

Dalla condizione al contorno (IV.2) segue che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial n} = -\dfrac{\alpha}{\beta} f, & \beta(x) > 0,\ x \in S; \\ f = 0, & \beta(x) = 0,\ x \in S. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (IV.12), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_G \left(p|\text{grad}\, f|^2 + q|f|^2\right)\, dx + \int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}|f|^2\, dS, \qquad f \in \mathcal{M}_L, \tag{IV.13}$$

dove S_0 è la parte di S per cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f), $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia.*

In virtù delle ipotesi (IV.3) più l'ipotesi che $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, nel secondo membro della (IV.13), tutti e tre termini sono non negativi. Per questa ragione eliminando il secondo ed il terzo termine e stimando per difetto il primo termine, otteniamo la disuguaglianza

$$(Lf, f) \geq \int_G p|\text{grad}\, f|^2\, dx \geq \min_{x \in \overline{G}} p(x) \int_G |\text{grad}\, f|^2\, dx,$$

cioè

$$(Lf, f) \geq p_0 \,\|\, |\text{grad}\, f|\, \|_2^2, \qquad f \in \mathcal{M}_L, \tag{IV.14}$$

dove $p_0 = \min_{x\in\overline{G}} p(x)$; in virtù del fatto che la funzione p è continua e positiva su $\overline{G}$, si ha $p_0 > 0$.

Dalla disuguaglianza (IV.14) segue che *l'operatore* L è positivo se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, cioè in tal caso

$$(Lf, f) \geq 0, \qquad f \in \mathcal{M}_L. \tag{IV.15}$$

d. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni dell'operatore L. Prima bisogna estendere il dominio dell'operatore hermitiano L. Per quello ci vuole una teoria sugli operatori lineari autoaggiunti non limitati su uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ in H. Allora T si dice *chiuso* se per ogni successione $\{x_n\}$ in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|Tx_n - y\| \to 0$ per opportuni $x, y \in H$, si ha $x \in D(T)$ e $Tx = y$. Allora T è un operatore chiuso se e solo se il grafico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ è un insieme chiuso in $H \oplus H$ (con norma $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$).[1]

Teorema IV.1 [**Teorema del grafico chiuso**] *Sia* T *un operatore lineare chiuso definito su uno spazio di Hilbert* H. *Allora* T *è limitato.*

Ora definiamo gli operatori autoaggiunti. Siano H uno spazio di Hilbert complesso e T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in H. Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se $(Tx, y) = (x, Ty)$ per ogni $x, y \in D(T)$. Per un operatore hermitiano T, definiamo l'operatore T^* da

$$\begin{cases} D(T^*) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, \; x \in D(T)\}, \\ \text{In tal caso } \exists!\, z \in H : (Tx, y) = (x, z); \; \text{Poniamo } T^*y = z. \end{cases}$$

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $D(T)$ è denso in H, T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa

$$D(T) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, \; x \in D(T)\}.$$

[1]Per dimostrarlo, sia T chiuso e sia $\{(x_n, Tx_n)\}$ una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \to 0$ per qualche $(x, y) \in H \oplus H$. In tal caso $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|Tx_n - y\| \to 0$ e, in virtù del fatto che T è chiuso, risultano $x \in D(T)$ e $Tx = y$; quindi $(x, y) \in D(T)$. D'altra parte, se $G(T)$ è chiuso in $H \oplus H$, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|Tx_n - y\| \to 0$ per opportuni $x, y \in H$. In tal caso $\{(x_n, Tx_n)\}$ è una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \to 0$. Siccome $G(T)$ è chiuso, risulta $(x, y) \in G(T)$, e quindi $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Si vede facilmente che un operatore autoaggiunto è chiuso. Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|Tx_n - y\| \to 0$ per opportuni $x, y \in H$. Prendendo il limite se $n \to +\infty$ nell'uguaglianza $(Tz, x_n) = (z, Tx_n)$ valida per ogni $z \in D(T)$, risulta $(Tz, x) = (x, y)$ e quindi $|(Tz, x)| \leq \|y\|\|z\|$ per ogni $z \in D(T)$. Di conseguenza, $x \in D(T)$ e $Tx = y$, così dimostrando il fatto che T è chiuso.

Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio $\mathcal{M}_L$. Allora L è hermitiano su $L_2(G)$ con dominio denso in $L_2(G)$. Sotto opportune condizioni che non specificheremo,[2] esiste un'estenzione autoaggiunta unica $\overline{L}$ dell'operatore L. Le autofunzioni del problema al contorno (IV.1)-(IV.2) si cercano nel dominio $D(\overline{L})$.

Ritorniamo adesso agli autovalori e autofunzioni dell'operatore L. Infatti bisogna discutere gli autovalori e le autofunzioni dell'estensione autoaggiunta $\overline{L}$. In altre parole, essi dipendono dalle condizioni al contorno (IV.2), ma le autofunzioni non potrebbero appartenere al dominio $\mathcal{M}_L$ ma invece al dominio dell'estensione autoaggiunta $\overline{L}$.

Proposizione IV.2 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

a) *Tutti gli autovalori sono reali. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$, gli autovalori sono non negativi.*

b) *Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.*

c) *Le autofunzioni possono essere scelte reali.*

d) *Sia $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Affinchè $\lambda = 0$ è necessario e sufficiente che $q(x) \equiv 0$ ed $\alpha(x) \equiv 0$. In tal caso $\lambda = 0$ è un autovalore semplice e l'autofunzione è costante.*

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\overline{L})$ tale che $\overline{L}f = \lambda f$ e $f \not\equiv 0$. Allora $(\lambda - \overline{\lambda})\|f\|_2 = (\overline{L}f, f) - (f, \overline{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \overline{\lambda}$ è reale. Inoltre, se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in S$, dalla (IV.13) segue che $(\overline{L}f, f) \geq 0$.

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\overline{L})$ non banali tali che $\overline{L}f = \lambda f$ e $\overline{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\overline{L}f, g) - (f, \overline{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche $\overline{f}$ è una autofunzione. Siccome le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, una di loro è un'autofunzione reale.

[2]Certamente per $\alpha, \beta \geq 0$ costanti con $\alpha + \beta > 0$ e S regolare.

Infine, per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = 0$ un autovalore con correspondente autofunzione f, mentre $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Allora dalla (IV.13) segue $p|\mathrm{grad}\, f|^2 \equiv 0$ e quindi $[p(x) > 0$ sempre$]$ f è costante e $qf \equiv 0$.[3] Se f fosse non nulla, ne seguirebbe $q(x) = 0$ per ogni $x \in G$ e $f(x) \equiv 0$ per ogni $x \in S_0$. Quindi $f \equiv 0$ e $q \equiv 0$. □

2 Problema di Sturm-Liouville

Nel caso unidimensionale ($n = 1$, $G = (0, \ell)$, $S = \{0, \ell\}$) il problema al contorno (IV.1)-(IV.2) è detto *problema di Sturm-Liouville*. Ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.16}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0, \tag{IV.17}$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$. Assumiano che $p \in C^1[0, \ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, e $q \in C[0, \ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell] : \left\{ \begin{array}{l} u'' \in L_2(0, \ell) \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0 \end{array} \right\} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste* oppure *condizioni di Robin*.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Inoltre esiste un'unica estensione autoaggiunta $\overline{L}$ di L. Le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville si cercano nel dominio di $\overline{L}$ (e non necessariamente in $\mathcal{M}_L$).

L'espressione (IV.13) per l'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell \left(p|f'|^2 + q|f|^2 \right)\, dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell)|f(\ell)|^2, \qquad f \in \mathcal{M}_L,$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) è non negativo per ogni $f \in \mathcal{M}_L$. In particolare, se $q(x) \geq 0$ per $x \in [0, \ell]$, $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.16)-(IV.17) e f è la corrispondente autofunzione, si ottiene $f' \equiv 0$,[4] e quindi f è costante; affinchè la funzione f sia non banale, ci vogliono le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(\ell) = 0$.

[3] Questo ne segue se $f \in \mathcal{M}_L$.

[4] Tra poco dimostreremo che l'autofunzione $f \in \mathcal{M}_L$ invece di $f \in D(\overline{L})$.

a. Funzione di Green. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L. Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.18}$$
$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0, \tag{IV.19}$$

dove $f \in C(0,\ell) \cap L_2(0,\ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è autovalore dell'operatore L, la soluzione del problema al contorno (IV.18)-(IV.19) nella classe $\mathcal{M}_L$ (e anche nella classe $D(\overline{L})$) è unica. Costruiamo la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \qquad H_1 v_2(\ell) + H_2 v_2'(\ell) = 0. \tag{IV.20}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0,\ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, in caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza, in base alla (IV.20) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (IV.19). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \qquad x \in [0,\ell].$$

Siccome $(pw)'(x) \equiv 0$, risulta l'identità

$$p(x)w(x) \equiv p(0)w(0), \qquad x \in [0,\ell]. \tag{IV.21}$$

Cercheremo la soluzione del problema (IV.18)-(IV.19) per mezzo del metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \tag{IV.22}$$

Allora $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \tag{IV.23}$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (IV.21), si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \qquad c_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \tag{IV.24}$$

Per soddisfare le condizioni al contorno (IV.19), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x)=c_1v_1(x)+c_2v_2(x)-\frac{v_1(x)}{p(0)w(0)}\int_x^\ell f(y)v_2(y)\,dy-\frac{v_2(x)}{p(0)w(0)}\int_0^x f(y)v_1(y)\,dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$\begin{aligned}u'(x) &= c_1v_1'(x)+c_2v_2'(x)-\frac{v_1'(x)}{p(0)w(0)}\int_x^\ell f(y)v_2(y)\,dy\\ &\quad -\frac{v_2'(x)}{p(0)w(0)}\int_0^x f(y)v_1(y)\,dy.\end{aligned}$$

Tenendo conto dalle condizioni (IV.20), otteniamo

$$\begin{aligned}0 &= h_1u(0)-h_2u'(0)=c_1\left[h_1v_2(0)-h_2v_2'(0)\right];\\ 0 &= H_1u(\ell)+H_2u'(\ell)=c_1\left[H_1v_2(\ell)+H_2v_2'(\ell)\right],\end{aligned}$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1=c_2=0$. In altre parole,

$$u(x)=\int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)f(y)\,dy, \tag{IV.25}$$

dove

$$\mathcal{G}(x,y)=-\frac{1}{p(0)w(0)}\begin{cases}v_1(x)v_2(y), & 0\le x<y\le\ell,\\ v_2(x)v_1(y), & 0\le y<x\le\ell.\end{cases} \tag{IV.26}$$

La funzione $\mathcal{G}(x,y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (IV.18)-(IV.19) o dell'operatore L. Questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial\mathcal{G}(y+0,y)}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{G}(y+0,y)}{\partial x}=-\frac{w(x)}{p(0)w(0)}=-\frac{1}{p(y)},\qquad y\in(0,\ell). \tag{IV.27}$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L_2(0,\ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x,y)$. Allora questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(0,\ell)$. Siccome $u=Gf$ appartiene ad $\mathcal{M}_L$ per ogni $f\in C(0,\ell)\cap L_2(0,\ell)$, il dominio $\mathcal{M}_L$ è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G. Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f\in L_2(0,\ell\})$ coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta $\overline{L}$ di L, Infatti, $\overline{L}=G^{-1}$.

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.18)-(IV.19), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbb{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (IV.18)-(IV.19) nella forma equivalente

$$(L - \mu I)u \equiv -(pu')' + (q - \mu)u = f(x) - \mu u(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.28}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \tag{IV.29}$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L - \mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.20) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu)\,[f - \mu u]\,.$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu)u(y)\,dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu)f(y)\,dy, \qquad 0 \le x \le \ell. \tag{IV.30}$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta $\overline{L}$ di L [o di $L - \mu I$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

Esempio IV.3 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \qquad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.20), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \qquad v_2(x) = H_1\ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1\ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1(H_1\ell + H_2) + h_2 H_1}[h_1 x + x_2][H_1(\ell - y) + H_2], & 0 \le x < y \le \ell, \\ \dfrac{1}{h_1(H_1\ell + H_2) + h_2 H_1}[H_1(\ell - x) + H_2][h_1 y + h_2], & 0 \le y < x \le \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (IV.20), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= h_2\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda}); \\ v_2(x, \lambda) &= H_2\sqrt{\lambda}\cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0,\lambda)v_2'(0,\lambda) - v_1'(0,\lambda)v_2(0,\lambda) \\ &= \sqrt{\lambda}\left[(h_2H_2\lambda - h_1H_1)\sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}\,\cos(\ell\sqrt{\lambda})\right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \cdots, & u_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \text{[Dirichlet]} \\ \\ n = 0, 1, 2, \cdots, & u_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right). \quad \text{[Neumann]} \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione transcedente[5]

$$\operatorname{cotg}(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x,\lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n}\,\cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1\sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

b. Riduzione del problema di Sturm-Liouville ad un'equazione integrale. Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x,y)$.

Teorema IV.4 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \qquad u \in D(\overline{L}), \qquad f \in C(0,\ell) \cap L_2(0,\ell), \tag{IV.31}$$

[5] Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\operatorname{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)f(y)\,dy, \qquad u \in L_2(0,\ell), \quad \text{(IV.32)}$$

dove $\mathcal{G}(x,y)$ è la funzione di Green dell'operatore L. Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (IV.31) *e* (IV.32) *appartengono ad $\mathcal{M}_L$.*

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (IV.31), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)[\lambda u(y) + f(y)]\,dy, \qquad 0 \le x \le \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (IV.32).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L_2(0,\ell)$ soddisfi l'equazione integrale (IV.32). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x,y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\overline{L})$ e $\overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = -\frac{v_1(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2(x)\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0,\ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L_1(0,\ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0,\ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = -\frac{v_1'(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2'(x)\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0,\ell]$. Inoltre, dalla (IV.20) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (IV.17). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. □

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\overline{L})$) appartiene ad $\mathcal{M}_L$. Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0,\ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy \qquad \text{(IV.33)}$$

in $C[0,\ell]$ oppure in $L_2(0,\ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L.

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L. Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \tag{IV.34}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \tag{IV.35}$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\overline{L}) = D(\overline{L_1})$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (IV.16)-(IV.17) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x,y) u(y)\, dy, \tag{IV.36}$$

dove $\mathcal{G}_1(x,y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1.

c. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni. Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouvville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (IV.36) con nucleo integrale $\mathcal{G}_1(x,y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori λ del problema (IV.16)-(IV.17) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x,y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare *l'insieme degli autovalori* $\{\lambda_k\}$ *di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di moltiplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a* $C^2[0,\ell]$.

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

1) *Gli autovalori appartengono all'intervallo* $[q_{\min},\infty)$ *dove* $q_{\min} = \min\limits_{x\in[0,\ell]} q(x)$.
   Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

   $$\begin{aligned}(Lf,f) &= \int_0^\ell \left(p|f'|^2 + q|f|^2\right) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell)|f(\ell)|^2 \\ &\geq q_{\min}\|f\|_2^2,\end{aligned}$$

   dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u, allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda\|u\|_2^2 = (Lu,u) \geq q_{\min}\|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

2) *L'insieme degli autovalori è infinito numerabile.* Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe degenere:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k + 1}, \tag{IV.37}$$

dove $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0, \ell]$, risulterebbe una contraddizione con la (IV.27):

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(y + 0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_1(y + 0, y)}{\partial x} = 0, \qquad y \in (0, \ell).$$

3) *Ogni autovalore è semplice.* Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u sofddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (IV.20) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce uno sottospazio di $L_2(0, \ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 è unidimensionale.

Le condizioni al contorno (IV.17) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \left[p\,(u\overline{v}' - u'\overline{v})\right]_0^\ell .$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (IV.17). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)}\,u(0) = \pm\sqrt{p(\ell)}\,u(\ell), \qquad \sqrt{p(0)}\,u'(0) = \pm\sqrt{p(\ell)}\,u'(\ell),$$

per la u e per la v, dove bisogna scegliere il segno + due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio $\mathcal{M}_L$ ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto. Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(\ell), \qquad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \cdots \\ u_0 = 1, \qquad u_n(x) = c_1 \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = -u(\ell), \qquad u'(0) = -u'(\ell),$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{\ell}\right)^2, & n = 1, 2, 3, \cdots \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle autofunzioni è completo in $L_2(0,\ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L_2(0,\ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k, \tag{IV.38}$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f,\varphi_k)|^2, \qquad \lim_{N\to+\infty} \int_0^{\ell} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} (f,\varphi_k)\varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Teorema IV.5 *Ogni funzione $f \in \mathcal{M}_L$ può essere sviluppata in una serie* (IV.38) *uniformemente convergente in $x \in [0,\ell]$.*

Dimostrazione. Il problema di Sturm-Liouville non omogeneo è equivalente all'equazione integrale (IV.30), dove il termine noto appartiene all'immagine dell'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}_1(x,y)$. Quindi il teorema segue dal Teorema di Hilbert-Schmidt. □

Esempio IV.6 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(\ell), \qquad u'(0) = u'(\ell).$$

Allora gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate sono:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \lambda_n^c = \lambda_n^s = \left(\dfrac{2n\pi}{\ell}\right)^2, \\ \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}, & \varphi_n^c(x) = \left(\dfrac{2}{\ell}\right)^{1/2} \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right), \ \varphi_n^s(x) = \left(\dfrac{2}{\ell}\right)^{1/2} \sin\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right), \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \cdots$. Per $f \in L_2(0, \ell)$ risulta la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)\right),$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\ell} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx,\ \ b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx. \end{aligned}$$

3 Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \tag{IV.39}$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*. Osserviamo che i coefficienti dell'equazione (IV.39) non soddisfano le condizioni del paragrafo precedente.

a. Definizione e proprietà semplici delle funzioni di Bessel. Consideriamo, per $\nu \in \mathbb{R}$, la funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{IV.40}$$

dove $\Gamma(z)$ è l'unica funzione analitica sul semipiano destro che soddisfa $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ nell'Appendice B]. Questa funzione può essere rappresentata nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \tag{IV.41}$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica su tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}. \tag{IV.42}$$

Infatti, la serie di potenze in (IV.42) converge uniformemente su ogni compatto del piano complesso, poichè il suo raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ su tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (IV.39). Utilizzando la relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&x^2 J_\nu''(x) + xJ_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+\nu)(2k+\nu-1)+(2k+\nu)-\nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x),
\end{aligned}
$$

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine* ν, dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare

$$
\begin{cases}
J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin x, \\
J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos x.
\end{cases} \tag{IV.43}
$$

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (IV.40) in virtù del fatto che

$$
J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)} \left[1 + O(x^2)\right], \qquad x \to 0; \qquad \nu \neq -1, -2, -3, \cdots, \tag{IV.44}
$$

poichè $\Gamma(\nu+1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si ha

$$
J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{IV.45}
$$

e, quindi, le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti. L'uguaglianza (IV.45) segue dal fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \cdots$ [vedi l'Appendice B] e quindi la sommatoria nella serie (IV.40) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$.

Il Wronskiano $W[u,v] = uv' - u'v$ di due soluzioni u e v dell'equazione di Bessel soddisfa all'equazione differenziale di primo ordine

$$
W'[u,v](x) + \frac{1}{x} W[u,v](x) = 0,
$$

e quindi $W[u,v](x)$ è proporzionale alla funzione $1/x$. Per trovare la costante di proporzionalità basta studiare l'andamento del Wronskiano se $x \to 0$. Per

$\nu \notin \mathbb{Z}$ si vede subito che

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ xJ'_\nu(x) = \dfrac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{-\nu}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\ xJ'_{-\nu}(x) = \dfrac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \end{cases}$$

e dunque [vedi l'Appendice B]

$$W[J_\nu, J_{-\nu}](x) = \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + O(x)$$
$$= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2\,\sin(\nu\pi)}{\pi x}.$$

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta [senza dimostrazione] $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

b. Funzioni di Bessel di seconda specie. Per $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ ci dovrebbe esistere una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovare una soluzione linearmente indipendente da $J_\nu(x)$ per $\nu \in \mathbb{Z}$, definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu)\sin(\nu\pi) = \pi\,\cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \to n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo

$$Y_n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[2\,\log\frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\psi(k+1)+\psi(k+n+1)\right],
\end{aligned}
$$

dove $x \in [0, +\infty)$ e la prima sommatoria sparisce per $n = 0$. Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche

$$
Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi}\log\frac{x}{2}, & x \to 0, n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & x \to 0, n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{IV.46}
$$

implicando che $|Y_n(x)| \to +\infty$ se $x \to 0$.

c. Ortogonalità. Dimostriamo il seguente.

Proposizione IV.7 *Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione*

$$
\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0, \tag{IV.47}
$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x)\, dx \\
&= \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \frac{1}{2}[J_\nu'(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2, \\ -\frac{1}{2}J_\nu'(\mu_1)J_\nu'(-\mu_1) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)J_\nu(-\mu_1), & \mu_1 = -\mu_2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{IV.48}
$$

Dimostrazione. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. In virtù della (IV.39), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_1 x) = 0, \\
\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_2 x) = 0.
\end{aligned}
$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&x\left[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x)J_\nu'(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x)J_\nu'(\mu_2 x)\right]_{x=0}^1\\
&= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left\{x\left[J_\nu(\mu_1 x)\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} - J_\nu(\mu_2 x)\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right]\right\} dx\\
&= (\mu_2^2-\mu_1^2)\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx. \qquad \text{(IV.49)}
\end{aligned}$$

Dalla (IV.40) [vedi anche la (IV.44)] abbiamo per $x \to 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),\ \ \mu x J_\nu'(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x)J_\nu'(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x)J_\nu'(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \qquad x \to 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (IV.49) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2)J_\nu'(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1)J_\nu'(\mu_2)}{\mu_2^2-\mu_1^2}. \qquad \text{(IV.50)}$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (IV.47) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha+\beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta\mu_1 J_\nu'(\mu_1) = 0, \qquad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta\mu_2 J_\nu'(\mu_2) = 0,$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (IV.50) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (IV.50)).

Per dimostrare la (IV.48) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \to \mu_1$ nella (IV.50) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)^2\,dx &= \lim_{\mu_2\to\mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2)J_\nu'(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1)J_\nu'(\mu_2)}{\mu_2^2-\mu_1^2}\\
&= \frac{1}{2}\left[J_\nu'(\mu_1)\right]^2 - \frac{1}{2\mu_1}J_\nu(\mu_1)\left[J_\nu'(\mu_1) + \mu_1 J_\nu''(\mu_1)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[J_\nu'(\mu_1)\right]^2 + \frac{1}{2}J_\nu(\mu_1)^2\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (IV.48) per $\mu_1 = \mu_2$. La dimostrazione per $\mu_1 = -\mu_2$ è analoga. □

d. Relazioni di ricorrenza. Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{IV.51}$$

Infatti, la prima formula (IV.51) segue dalla (IV.40):

$$\begin{aligned} &J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

In modo analogo si stabilisce la seconda formula (IV.51).

Le formule (IV.51) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

In particolare per $\nu = 0$ si trova

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Infine, sottraendo le formule (IV.51), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza delle funzioni di Bessel di prima specie. In particolare

$$Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu Y_\nu(x)\right] = x^\nu Y_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} Y_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

$$Y'_0(x) = -Y_1(x);$$

$$Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) = 0.$$

e. Zeri delle funzioni di Bessel. Dimostriamo le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (IV.47) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

Teorema IV.8 *Gli zeri dell'equazione* (IV.47) *per* $\nu > -1$ *sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello* 0*; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Dalla (IV.40), in virtù del fatto che α, β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\overline{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\overline{\mu}) + \beta\overline{\mu}J_\nu'(\overline{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (IV.47), $\overline{\mu}$ è anche'esso uno suo zero. Se $\mu^2 \neq \overline{\mu}^2$, applicando la formula (IV.48) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \overline{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 xJ_\nu(\mu x)J_\nu(\overline{\mu}x)\,dx = \int_0^1 x|J_\nu(\mu x)|^2\,dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \overline{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma l'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (IV.40) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$, si ha per $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i\,\beta a J_\nu'(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha + \beta(2k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu}\left[\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu)\right]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0 > 0$ uno zero della (IV.47) di moltiplicità 2, in modo che

$$\begin{cases} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta\mu_0 J_\nu'(\mu_0) = 0, \\ \alpha J_\nu'(\mu_0) + \beta J_\nu'(\mu_0) + \beta\mu_0 J_\nu''(\mu_0) = -\beta\left(\mu_0 - \dfrac{\nu^2}{\mu_0}\right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J_\nu'(\mu_0) = 0, \end{cases} \tag{IV.52}$$

in virtù dell'equazione (IV.39). Dalla (IV.52) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J_\nu'(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J_\nu'(\mu_0) = 0$, oppure b) $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (IV.39), poichè $\mu_0 > 0$ non è un punto singolare dell'equazione (IV.39). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta > 0$ e $(\alpha/\beta) = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}$, dove $0 < \mu_0 \leq |\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (IV.52) si ottiene

$$\left[J_\nu'(\mu_0)\right]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1\right) J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (IV.48), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_0 x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left\{[J_\nu'(\mu_0)]^2 + \left(1-\frac{\nu^2}{\mu_0^2}\right)J_\nu(\mu_0)^2\right\} = 0.$$

Il teorema è stato dimostrato. □

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (IV.47), disponendole in ordine crescente:

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \cdots.$$

Se $\nu > 0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x = 0$.

Senza dimostrazione poniamo l'espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \qquad x \to +\infty. \tag{IV.53}$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi, \qquad k \to +\infty.$$

f. Problema agli autovalori per l'equazione di Bessel. Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u, \qquad 0 < x < 1, \tag{IV.54}$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \qquad x \to 0; \qquad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \tag{IV.55}$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia $\mathcal{M}_{L_\nu}$ l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0,1])$ che soddisfano le condizioni al contorno (IV.55) e la condizione $x^{-1/2}L_\nu u \in L_2(0,1)$. Quest'insieme è denso in $L_2(0,1)$. Dalla definizione segue che $L_\nu u \in L_2(0,1)$ e $xu'(x) \to 0$ per $x \to 0^+$ se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$. Non studiamo il dominio (contenente $\mathcal{M}_{L_\nu}$) su cui la chiusura $\overline{L_\nu}$ dell'operatore L_ν è autoaggiunta.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L_2(0,1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned}(L_\nu u, u) &= -\int_0^1 (xu')'\overline{u}\,dx + \nu^2\int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx\\ &= \int_0^1 x|u'|^2\,dx - [xu'\overline{u}]_{x=0}^1 + \nu^2\int_0^1\frac{|u|^2}{x}\,dx\\ &= \int_0^1 x|u'|^2\,dx + \nu^2\int_0^1\frac{|u|^2}{x}\,dx + \frac{\alpha}{\beta}|u(1)|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

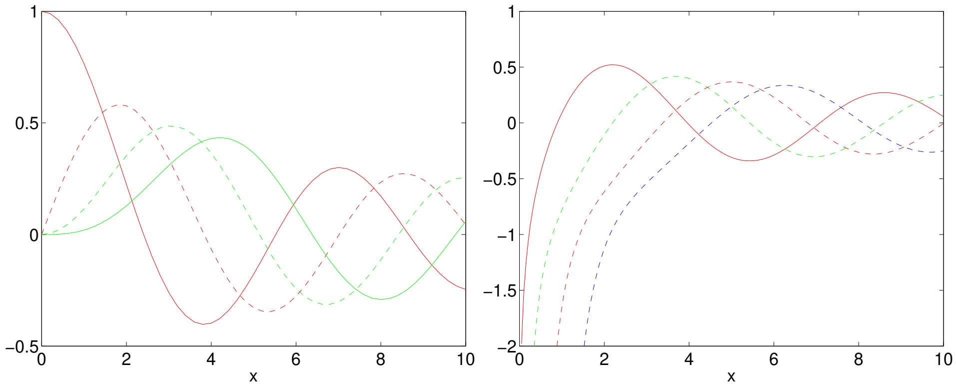

Figura IV.1: Panello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Panello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia autovalore dell'operatore L_ν, è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplici; questo fatto si dimostra come per gli altri problemi di Sturm-Liouville con condizioni al contorno separate.

Ritorniamo al problema al contorno (IV.54)-(IV.55), dove $\nu \geq 0$ e tutti gli autovalori λ sono non negativi (con $\lambda = 0$ se e solo se $\nu = \alpha = 0$). Discutiamo prima il caso $\lambda > 0$. In tal caso la (IV.54) è l'equazione differenziale con soluzione generale $c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}\, x)$. Le sue uniche soluzioni che soddisfano la condizione (IV.55) per $x \to 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x)$. Questa soluzione soddisfa la condizione (IV.55) per $x = 1$ se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda}\, J_\nu'(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (IV.47). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \cdots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

g. Problema al contorno non omogeneo. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L_ν, cioè $\nu > 0$, oppure $\alpha > 0$ per $\nu = 0$. Utilizzando il metodo del paragrafo IV 3.a, costruiamo la funzione di Green $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ dell'operatore L_ν.

Sia $\nu > 0$. Il tal caso la (IV.54) con $\lambda = 0$ si riduce ad un'equazione di Eulero con le soluzioni linearmente indipendenti x^ν e $x^{-\nu}$. La funzione

$v_1(x) = x^\nu$ soddisfa la condizione (IV.55) per $x \to 0^+$ e la funzione

$$v_2(x) = a\,x^\nu + x^{-\nu}, \qquad a = \frac{\beta\nu - \alpha}{\beta\nu + \alpha},$$

soddisfa la condizione (IV.55) per $x = 1$. Quindi, conformemente alla formula (IV.26), la funzione $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ ha la forma

$$\mathcal{G}_\nu(x, y) = \begin{cases} c_\nu x^\nu (a\,y^\nu + y^{-\nu}), & 0 \le x < y \le 1 \\ c_\nu y^\nu (a\,x^\nu + x^{-\nu}), & 0 \le y < x \le 1, \end{cases} \tag{IV.56}$$

dove $c_\nu \neq 0$ è un'opportuna costante.

Siano $\nu = 0$ ed $\alpha > 0$. In tal caso le funzioni 1 e $\ln(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $L_0 u = 0$. Perciò $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = -(\beta/\alpha) + \ln(x)$ e

$$\mathcal{G}_0(x, y) = \begin{cases} c_0 \left(-\dfrac{\beta}{\alpha} + \ln(y) \right), & 0 \le x < y \le 1 \\ c_0 \left(-\dfrac{\beta}{\alpha} + \ln(x) \right), & 0 \le y < x \le 1, \end{cases} \tag{IV.57}$$

dove $c_0 \neq 0$ è un'opportuna costante.

La soluzione del problema al contorno

$$L_\nu u = f(x), \qquad u \in \mathcal{M}_{L_\nu},\ f \in C((0, 1]), \qquad x^{-1/2} f \in L_2(0, 1),$$

è unica ed è espressa mediante la formula

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) f(y)\, dy. \tag{IV.58}$$

h. Completezza del sistema di funzioni di Bessel. In base ai risultati del sottoparagrafo IV 3.f concludiamo che se $\lambda = 0$ non è autovalore dell'operatore L_ν, il problema agli autovalori (IV.54)-(IV.55) è equivalente a quello agli autovalori per l'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) y\, u(y)\, dy, \qquad u \in C([0, 1]). \tag{IV.59}$$

Passando ad una nuova funzione incognita $v(x) = \sqrt{x}\, u(x)$, riduciamo l'equazione integrale (IV.59) alla forma equivalente

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xy}\, \mathcal{G}_\nu(x, y) v(y)\, dy, \qquad v \in C([0, 1]). \tag{IV.60}$$

In virtù delle (IV.56) e (IV.57), il nucleo $\sqrt{xy}\,\mathcal{G}_\nu(x,y) \not\equiv 0$ è reale, continuo e simmetrico. Per questa ragione si può applicare la teoria di Hilbert-Schmidt all'equazione integrale (IV.60). In particolare esistono gli autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$ e le autofunzioni $\sqrt{x}\,J_\nu(\sqrt{\lambda_k^{(\nu)}}\,x)$, $k \in \mathbb{N}$. Come l'abbiamo visto, gli autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$ sono positivi e semplici e quindi le autofunzioni sono ortogonali in $L_2(0,1)$. Inoltre, grazie alla (IV.48), si ha

$$\left\| J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}\,x\right)\right\|_x^2 = \frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_k^{(\nu)})\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^{(\nu)}}\right) J_\nu(\mu_k^{(\nu)})^2,$$

dove $\mu_k^{(\nu)} = \sqrt{\lambda_k^{(\nu)}}$ è lo zero positivo k-esimo della (IV.47).

Teorema IV.9 *Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, la funzione $\sqrt{x}\,u(x)$ può essere sviluppata nella serie uniformemente convergente*

$$\sqrt{x}\,u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} \sqrt{x}\,J_k(\mu_k^{(\nu)}\,x), \qquad a_k^{(\nu)} = \frac{\left(u, J_\nu(\mu_k^{(\nu)}\,x)\right)_x}{\left\|J_\nu(\mu_k^{(\nu)}\,x)\right\|_x^2}. \tag{IV.61}$$

Inoltre, se $\sqrt{x}\,u(x) \in L_2(0,1)$, risulta la serie (IV.61), dove

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 x \left| u(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k^{(\nu)} J_\nu(\mu_k^{(\nu)}\,x)\right|^2 dx = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del Teorema IV.5. Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, ne segue che $L_\nu u = f$, dove $f \in C((0,1])$ e $x^{-1/2} f \in L_2(0,1)$. Inoltre, vale la formula (IV.58), cioè

$$\sqrt{x}\,u(x) = \int_0^1 \sqrt{xy}\,\mathcal{G}_\nu(x,y)\frac{f(y)}{\sqrt{y}}\,dy.$$

Quindi $\sqrt{x}\,u(x)$ appartiene all'immagine dell'operatore integrale simmetrico sullo spazio $L_2(0,1)$ con nucleo $\sqrt{xy}\,\mathcal{G}_\nu(x,y)$. Per il Teorema II 4.1 (di Hilbert-Schmidt), questa funzione può essere sviluppata in una serie uniformemente convergente rispetto alle autofunzioni $\sqrt{x}\,J_\nu(\mu_k^{(\nu)}\,x)$.

Se, invece, $\lambda = 0$ è autovalore dell'operatore L_ν (cioè, per $\nu = \alpha = 0$), in questo caso è sufficiente considerare il problema al contorno

$$-(xu')' + xu = (\lambda+1)xu, \qquad u(x) = O(1),\ x \to 0^+,\ u(1) = 0.$$

i. Altre funzioni cilindriche. Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann* o *le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n \dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \cdots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \cdots. \end{cases}$$

Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\, Y_\nu(x)$$

e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\, Y_\nu(x).$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix), \qquad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie (modified Bessel functions of the first kind), mentre le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di MacDonald.[6]

Utilizzando l'espressione asintotica (IV.53) per $J_\nu(x)$, si ottiene per $x \to +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \tag{IV.62}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \tag{IV.63}$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \tag{IV.64}$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O(x^{-1})\right], \tag{IV.65}$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + O(x^{-1})\right]. \tag{IV.66}$$

[6] La nomenclatura non è uniforme. Nella letteratura ci sono diversi nomi e notazioni per queste funzioni.

Analogamente, utilizzando la (IV.44), si ottiene per $x \to 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, \\ \\ Y_0(x) \approx -\dfrac{2}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (IV.39), otteniamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + xu' - (x^2 + \nu^2)u = 0. \tag{IV.67}$$

Dal Teorema IV.8 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

4 Funzioni sferiche

Consideriamo adesso una classe di funzioni speciali molto importante per la fisica matematica.

4.1 Funzioni sferiche

Si dice *funzione sferica* di ordine $l = 0, 1, 2, \cdots$ ogni polinomio armonico[7] omogeneo di grado l considerato sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dunque, tra le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S^{n-1}$, di ordine l ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, l'identità

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \qquad s = \frac{x}{|x|}, \tag{IV.68}$$

dove $\Delta u_l = 0$, stabilisce una corrispondenza biunivoca.

Le funzioni sferiche Y_l e $Y_{l'}$, di ordini diversi sono ortogonali in $L_2(S^{n-1})$, cioè

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s)\, ds = 0, \qquad l \neq l'.$$

Infatti, applicando per la sfera la formula di Green ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \qquad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

[7] Una funzione $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ si dice *armonica* se $\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$.

si ottiene

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \Delta \left(|x|^l Y_l \right) - |x|^l Y_l \Delta \left(|x|^{l'} Y_{l'} \right) \right] \, dx \\
&= \int_{S^{n-1}} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial (|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial (|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n} \right] \, ds \\
&= \int_{S^{n-1}} \left[Y_{l'} \frac{\partial (r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial (r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] \, ds = (l - l') \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s) \, ds,
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla circonferenza S^1 ($n = 2$). In coordinate polari abbiamo

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta), \qquad x = (r \cos\theta, r \mathrm{sen}\,\theta),$$

dove $\Delta u_l = 0$. Risulta l'equazione differenziale

$$Y_l''(\theta) + l^2 Y_l(\theta) = 0,$$

da cui seguono le funzioni trigonometriche

$$Y_l(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & l = 0 \\ c_1 \cos(l\theta) + c_2 \mathrm{sen}\,(l\theta), & l = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 ($n = 3$). In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\varphi} \frac{\partial Y_l}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + l(l+1) Y_l(\theta, \varphi) = 0, \tag{IV.69}$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \cdots$. Cerchiamo le soluzioni della (IV.69) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos\varphi$ e scriviamo (IV.69) nella forma

$$\frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial Y_l}{\partial \xi} \right) + l(l+1) Y_l(\theta, \xi) = 0. \tag{IV.70}$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\xi) \Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \,\mathrm{sen}\, m\theta, & m = 1, 2, 3, \cdots , \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicità della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta+2\pi)\equiv\Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta)=-m^2\Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi)=0. \tag{IV.71}$$

Quest'equazione si può scrivere nella forma

$$-\left[(1-\xi^2)\mathcal{P}'\right]'+\frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P}=l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ±1 debbono assumere valori finiti.

4.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h+h^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\xi)h^l, \qquad |h|<1,$$

2. tramite l'equazione differenziale,

$$-[(1-x^2)P_l']'(x)=l(l+1)P_l(x),\ -1<x<+1; \qquad P_l(1)=1,$$

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\int_{-1}^{1}P_l(\xi)P_{l'}(\xi)\,d\xi=\delta_{ll'}\frac{2}{2l+1},$$

4. tramite la formula di Rodrigues

$$P_l(\xi)=\frac{1}{2^l\,l!}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^l(\xi^2-1)^l,$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$(2l+1)\xi P_l(\xi)=(l+1)P_{l+1}(\xi)+lP_{l-1}(\xi), \qquad P_0(\xi)=1, \qquad P_1(\xi)=\xi.$$

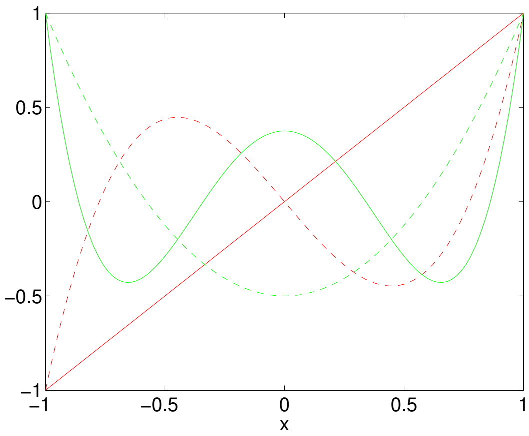

Figura IV.2: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

$\underline{4 \Rightarrow 2}$. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \qquad -1 < x < +1, \tag{IV.72}$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \to \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l+1)$ dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, \tag{IV.73}$$

soddisfano la (IV.72) per $\lambda = l(l+1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (IV.73) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti, ponendo $W_l(x) = (x^2-1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2-1)W_l'(x) - 2l\, xW_l(x) = 0$$

$l+1$ volte, si ottiene

$$(x^2-1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (IV.72). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l\, l!}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^s (x-1)^l\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-s}(x+1)^l\right) \\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\sum_{s=0}^{l}\left(\frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}\right)\left(\frac{l!}{s!}(x+1)^s\right), \end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1)=1$ e $P_l(-1)=(-1)^l$.

$\underline{2 \Rightarrow 4}$. Sostituendo $u(x) = P_l(x)z(x)$ e $w(x) = u'(x)$ nella (IV.72) con $\lambda = l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2\frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espessione è divergente in $x = \pm 1$ (poichè $P_l(\pm 1)^2 = 1]$. Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (IV.72) con $\lambda = l(l+1)$ che soddisfa $P_l(1) = 1$. Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene questa formula dalla proprietà 2.

$\underline{(2+4) \Rightarrow 3}$. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio $L_2(-1,1)$. Infatti, utilizzando la (IV.72) si ha

$$\begin{aligned}
&[l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[P_l(k)\left[(1-x^2)P_k'\right]' - P_k(x)\left[(1-x^2)P_l'\right]' \right] dx \\
&= -\int_{-1}^1 \left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0,
\end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l, P_k) = \displaystyle\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)\,dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l, P_l) tramite l integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned}
(P_l, P_l) &= \frac{(-1)^l}{2^{2l}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \\
&= \frac{(2l)!}{2^{2l}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l\,dx = \frac{(2l)!}{2^{2l}\cdot(l!)^2}\,\frac{2^{l+1}\cdot l!}{(2l+1)(2l-1)\cdots 1} = \frac{2}{2l+1},
\end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di ricorrenza $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$, $I_0 = 2$, per $I_l = \int_{-1}^1 (1-x^2)^l\,dx$. Quindi $\sqrt{l+\frac{1}{2}}\,P_l(x)$ ha norma 1 in $L_2(-1,1)$.

$\underline{(3+4) \Rightarrow 5}$. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l). Infatti, dopo $l+1$

integrazioni per parti consecutive e utilizzando $(x\,f)^{(l+1)} = x\,f^{(l+1)} + (l+1)\,f^{(l)}$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
(P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1}\cdot((l+1)!)(l!)} \cdot \\
&\cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{l+1} \left[x \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l+1} (x^2-1)^l + (l+1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \right] dx \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{l+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \, dx \\
&= \frac{1}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{l+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \, dx \\
&= \frac{(2l)!}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2} \, \frac{2^{l+2}\cdot(l+1)!}{(2l+3)(2l+1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.
\end{aligned}
$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l+1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l+1$]. Risultano $(2l+1)(xP_l, P_j) = (2l+1)(P_l, xP_j) = 0$ per $l < j-1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l+1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$
\begin{aligned}
(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\
(2l+1)(xP_{l-1}, P_l) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).
\end{aligned}
$$

Quindi $a_{l+1} = l+1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + l\,P_{l-1}(x), \qquad P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x. \tag{IV.74}$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$
\begin{gathered}
P_l(1) = 1, \qquad P_l(-1) = (-1)^l, \qquad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x); \\
-1 \le P_l(x) \le +1, \qquad -1 \le x \le +1.
\end{gathered} \tag{IV.75}
$$

5 ⇒ 1. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}, \qquad |h| < 1. \tag{IV.76}$$

Infatti, scriviamo $F(x,h)$ per la parte a sinistra della (IV.76). Per $|h| < 1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h, grazie alla (IV.75). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)xP_l(x)h^l = xF(x,h) + 2xh\sum_{l=0}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = xF(x,h) + 2xh\frac{\partial F}{\partial h};$$
$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)P_{l+1}(x)h^l = \sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h};$$
$$\sum_{l=1}^{\infty} l\,P_{l-1}(x)h^l = h^2\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h\sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1}$$
$$= h^2\frac{\partial F}{\partial h} + hF(x,h).$$

Applicando la (IV.74) si ha

$$xF(x,h) = (1-2xh+h^2)\frac{\partial F}{\partial h} + hF(x,h),$$

dove $F(x,0) = P_0(x) = 1$. Oppure:

$$\frac{\partial F/\partial h}{F(x,h)} = \frac{x-h}{1-2xh+h^2}, \qquad F(x,0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x,h)$ data dalla parte a destra della (IV.76).

1 ⇒ 2. Scrivendo $F(x,h)$ per la parte a destra nella (IV.76) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -h\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 (hF(x,h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l\right) = -\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)P_l(x)h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo $x = 1$ nella (IV.76) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando $P_l(1) = 1$.

4.3 Funzioni di Legendre associate

Sostituiamo $\mathcal{P}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} z(\xi)$ nella (IV.71). Risulta

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)\xi z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0. \qquad \text{(IV.77)}$$

Moltiplicando la (IV.77) per $(1-\xi^2)^m$, otteniamo per $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l$

$$\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l'\right]' = -(l-m)(l+m+1)(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l. \qquad \text{(IV.78)}$$

Per $m = 0$ risulta l'equazione differenziale per il polinomio di Legendre di grado l:

$$(1-\xi^2)P_l''(\xi) - 2\xi P_l'(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0.$$

Calcolando la derivata m-esima $z = P_l^{(m)}$ di quest'equazione otteniamo

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0.$$

Quindi le funzioni $(d/d\xi)^m P_l(\xi)$ sono soluzioni della (IV.77). Moltiplicando la (IV.78) per $P_{l'}(\xi)$ e la (IV.78) con l' invece di l per $P_l(\xi)$ e sottraendo, otteniamo

$$\begin{aligned}[(l-l')(l+l'+1)]\,(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi) = \mathcal{P}_l(\xi)\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_{l'}'\right]' \\ - \mathcal{P}_{l'}(\xi)\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l'\right]'.\end{aligned}$$

Integrando quest'equazione tra -1 e $+1$ e applicando l'integrazione per parti risulta

$$[(l-l')(l+l'+1)]\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Quindi, se $P_l(\xi)$ sono i polinomi di Legendre, i polinomi $(d/d\xi)^m P_{l+m}(\xi)$ ($l = 0, 1, 2, \cdots$) sono un sistemi di polinomi ortogonali (di grado l) rispetto al peso $w(\xi) = (1-\xi^2)^m$.

Troviamo ora la costante di normalizzazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi)P_{l'}^{(m)}(\xi)\,d\xi \\
&= \left[(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi)P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\left[(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi)\right]' d\xi \\
&= (l-m-1)(l+m)\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{m-1}P_l^{(m-1)}(\xi)P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\,d\xi \\
&= (l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2)\times \\
&\times \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{m-2}P_l^{(m-2)}(\xi)P_{l'}^{(m-2)}(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1} P_l(\xi)P_{l'}(\xi)\,d\xi = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l.l'}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{2(l+m)+1}{2}\,\frac{l!}{(l+2m)!}\right)^{1/2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m} P_{l+m}(\xi), \qquad l=0,1,2,\cdots,$$

è il sistema ortonormale dei polinomi rispetto al peso $(1-\xi^2)^m$ [con coefficiente di ξ^l positivo].

4.4 Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza

Nella letteratura ci sono diverse normalizzazioni delle funzioni sferiche in $\mathbb{R}^3$. Qui ne scegliamo una. Poniamo

$$Y_l^m(\varphi,\theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m\,\cos(m\theta), & m=0,1,\cdots,l; \\ P_l^{|m|}(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m\operatorname{sen}(|m|\theta), & m=-1,-2,\cdots,-l, \end{cases}$$

dove $l = 0,1,2,\cdots$. Le funzioni sferiche Y_l^m $(m = 0,\pm1,\cdots,\pm l)$ di ordine l sono linearmente indipendenti e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(s) = \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m(s)$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l.

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ *formano un sistema ortogonale e completo in* $L_2(S^2)$, *ed inoltre*

$$\|Y_l^m\|^2_{L_2(S^2)} = 2\pi\frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1}\,\frac{(l+|m|)!}{l-|m|)!}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\|Y_l^m\|^2 &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta,\varphi)|^2\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_{-1}^{1} P_l^{|m|}(\xi)^2(1-\xi^2)^m\,d\xi\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\cos^2 m\theta\\ \operatorname{sen}^2 m\theta\end{Bmatrix}\,d\theta = 2\pi\frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1}\,\frac{l+|m|)!}{(l-|m|)!}.\end{aligned}$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L_2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(s) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s),$$

convergente in $L_2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0,m})}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)Y_l^m(\theta,\varphi)\mathrm{sen}\,\varphi\, d\theta\, d\varphi.$$

Le funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \cdots, \pm l$, sono autofunzioni dell'operatore di Beltrami,

$$-\frac{1}{\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

che corrisponde all'autovalore $\lambda = l(l+1)$ di moltiplicità $2l+1$.

5 Polinomi di Hermite

L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (I.63). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)}\right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)}\right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$\begin{aligned} U''(u) + (\mu - \lambda^2c^2u^2)U(u) = 0,\\ V''(v) - (\mu + \lambda^2c^2u^2)V(v) = 0,\end{aligned}$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu+1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) = 0,\\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) = 0.\end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \qquad \text{(IV.79)}$$

dove u, z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2}\,v, \tag{IV.80}$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \tag{IV.81}$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ la (IV.81) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (IV.79) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

Sostituendo $v(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ nella (IV.81) si trova la seguente espressione per il coefficiente di z^l:

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} + 2(\nu - l)c_l = 0. \tag{IV.82}$$

La (IV.82) è una relazione di ricorrenza che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dai coefficienti $c_0 = v(0)$ e $c_1 = v'(0)$. Si vede facilmente che esistono soluzioni polinomiali se e solo se $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$. Tali soluzioni hanno la proprietà $v(-z) = (-1)^n v(z)$ e hanno il grado n (cioè, $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \ldots = 0$).

Definiamo ora

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \{e^{-z^2}\}. \tag{IV.83}$$

Allora $H_n(z)$ è un polinomio di grado n, ha il coefficiente principale positivo e soddisfa $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$. Derivando l'equazione $w' + 2zw = 0$ (che ha la soluzione $w \sim e^{-z^2}$) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ risulta

$$u'' + 2zu' + 2(n+1)u = 0.$$

Poi si sostituisca $u = e^{-z^2}\,v$. Infine risulta l'equazione (IV.81) per $\nu = n$:

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0. \tag{IV.84}$$

In altre parole, il polinomio di Hermite $H_n(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di Hermite (IV.84). La (IV.83) si dice formula di Rodriguez.

Scriviamo ora la (IV.81) nella forma

$$(e^{-z^2} v')' = -2n\,e^{-z^2}\,v.$$

Allora

$$2(n-m)H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} = (e^{-z^2} H'_m)' H_n(z) - (e^{-z^2} H'_n)' H_m(z).$$

Calcolando l'integrale rispetto a z si ottiene

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = \Big[e^{-z^2}\left(H'_m(z)H_n(z) - H'_n(z)H_m(z)\right)\Big]_{z=-\infty}^{\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-z^2} H'_m(z)H'_n(z) - e^{-z^2} H'_n(z)H'_m(z)\Big)\,dz = 0.$$

Quindi i polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}; e^{-z^2}\,dz)$. Per calcolare la costante di normalizzazione si applichino la formula di Rodriguez (IV.83) e n integrazioni per parti, risultando nella seguente successione di passaggi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2}\,dz &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} \left[H_n^{(j-1)}(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-j} \{e^{-z^2}\} \right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{n} H_n(z) \right) e^{-z^2}\,dz \\ &= \left[p(z) e^{-z^2} \right]_{z=-\infty}^{\infty} + c_n\, n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = c_n\, n! \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

dove $p(z)$ è un polinomio e c_n è il coefficiente principale di $H_n(z)$ (cioè, $H_n(z) = c_n z^n + \ldots$). Calcoliamo ora i coefficienti c_n. Derivando la formula di Rodriguez (IV.83) si arriva all'identità

$$H_n'(z) = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z). \tag{IV.85}$$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (IV.85) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$, mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-z^2}\,dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m}, \tag{IV.86}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (IV.84) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H_n'(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H_n'(z) = \text{cost.}H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n\, z^n + \ldots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1}\, z^{n-1} + \ldots$, risulta $n\, 2^n = \text{cost.}2^{n-1}$ e quindi cost. $= 2n$. In altre parole,

$$H_n'(z) = 2n\, H_{n-1}(z). \tag{IV.87}$$

Dalle equazioni (IV.85) e (IV.87) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z), \tag{IV.88}$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$. In Fig. IV.3 abbiamo tracciato alcuni grafici dei polinomi di Hermite.

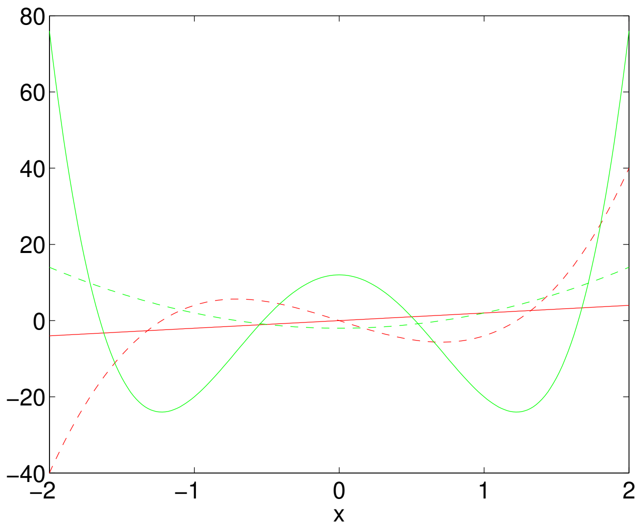

Figura IV.3: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\, t^n, \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{IV.89}$$

Infatti, ponendo $F(z,t) = e^{2zt-t^2}$ e scrivendo

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!}\, t^n \tag{IV.90}$$

per opportuni coeffienti $h_n(z)$, risultano

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2tF(z,t)$$

e [poichè?]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n'(z)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!}\, t^n.$$

Quindi $h_n(z)$ è un polinomio in z di grado n e

$$h_n'(z) = 2nh_{n-1}(z). \tag{IV.91}$$

Dalla (IV.90) risulta che $h_n(0)$ coincide con la derivata n-esima di e^{-t^2} per $t = 0$, cioè con 0 se n è dispari, e con $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$ se n è pari. Dalla formula di Rodriguez (IV.83) si vede facilmente che $H_n(0) = h_n(0)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Utilizzando le espressioni (IV.87) e (IV.91) arriviamo alla identità $H_n(z) = h_n(z)$ e quindi alla formula generatrice (IV.89).

6 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre* si definiscono tramite la seguente formula di Rodriguez:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\}. \tag{IV.92}$$

Si dimostra facilmente che la (IV.92) rappresenta un polinomio di grado n per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^n/n!) + \ldots$. Ci limitiamo al caso $\alpha > -1$.

La funzione $w(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \tag{IV.93}$$

Derivando la (IV.93) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ si arriva all'equazione differenziale

$$xu'' + (x + 1 - \alpha)u' + (n + 1)u = 0.$$

Sostituendo $u = x^\alpha e^{-x}v$ in quest'ultima equazione si ottiene la seguente equazione differenziale di Laguerre:

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + nv = 0. \tag{IV.94}$$

Di conseguenza, $L_n^{(\alpha)}(x)$ è una soluzione dell'equazione (IV.94).

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \tag{IV.95}$$

Sostituendo $v(x) = \sum_{l=0}^\infty c_l x^l$ si trova la seguente espressione per il coefficiente di x^l:

$$(l + 1)(l + \alpha + 1)c_{l+1} + (\nu - l)c_l = 0.$$

Quindi abbiamo trovato la formula di ricorrenza

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{l - \nu}{(l + 1)(l + \alpha + 1)}, \tag{IV.96}$$

che ci consente a calcolare tutti i coeffienti c_l dal coefficiente iniziale $c_0 = v(0)$; bisogna richiedere $\alpha > -1$ per garantire la positività del denominatore nella parte a destra della (IV.96). Risulta una soluzione polinomiale di grado $n = 0, 1, 2, \ldots$ se e solo se $\nu = n$.

Scrivendo la (IV.94) nella forma

$$\left(x^{\alpha+1}e^{-x}v'\right)' + nx^\alpha e^{-x}v = 0, \tag{IV.97}$$

otteniamo

$$(n-m)x^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)\left(x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)\prime}\right)' - L_m^{(\alpha)}(x)\left(x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)\prime}\right)'.$$

Calcolando l'integrale sull'intervallo $(0, \infty)$ [dove l'ipotesi $\alpha > -1$ serve per la convergenza dell'integrale] si ottiene

$$\begin{aligned}
&(n-m)\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx \\
&= \left[L_n^{(\alpha)}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)\prime}(x) - L_m^{(\alpha)}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)\prime}(x)\right]_{x=0}^\infty \\
&- \int_0^\infty \left\{L_n^{(\alpha)\prime}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)\prime}(x) - L_m^{(\alpha)\prime}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)\prime}(x)\right\}\,dx = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x^{\alpha+1} \to 0$ per $x \to 0^+$. Quindi per $\alpha > -1$ i polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^\infty$ formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x}\,dx)$.

Per calcolare la costante di normalizzazione facciamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)^2\, x^\alpha e^{-x}\,dx = \frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2}\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}(L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j}\{x^{n+\alpha}e^{-x}\}\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x)\right)x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2}\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}(L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x)x^{\alpha+j}e^{-x}L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x)\right)\int_0^\infty x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto n integrazioni per parti, utilizzato la (IV.92) con $\alpha + j$ al posto di α, applicato l'espressione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^n/n!) + \ldots$ e l'identità (B.1). In altre parole,

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{n,m}, \tag{IV.98}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (IV.94) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$x(v')'' + (\alpha + 2 - x)(v')' + (n-1)(v') = 0.$$

Quindi $L_n^{(\alpha)\prime}(x)$ è proporzionale a $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Siccome

$$L_n^{(\alpha)\prime}(x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots, \qquad L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

risulta per $\alpha > -1$

$$L_n^{(\alpha)\prime}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \tag{IV.99}$$

L'ortogonalità di $L_n^{(\alpha)}(x)$ a tutti i polinomi di grado minore di n nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x}\,dx)$ conduce all'identità

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = A_n^{(\alpha)} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + B_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{IV.100}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty xL_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\, x^\alpha e^{-x}\,dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^\infty xL_n^{(\alpha)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\{x^{n+1+\alpha}e^{-x}\}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}(xL_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j}\{x^{n+1+\alpha}e^{-x}\}\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^\infty\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\{xL_n^{(\alpha)}(x)\}\right)x^{n+1+\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(xL_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x)(n+1-j)!x^{\alpha+j}e^{-x}L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\{xL_n^{(\alpha)}(x)\}\right)\int_0^\infty x^{n+1+\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $xL_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^{n+1}/n!) + \ldots$. Poi calcoliamo il seguente integrale:

$$
\begin{aligned}
D_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2 \, x^\alpha e^{-x} \, dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \, dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\}\right) x^{n+\alpha} e^{-x} \, dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (-1)^{n-j} (n-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\}\right) x^{n+\alpha} e^{-x} \, dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty ((n+1)! \, x - n(n+\alpha) n!) \, x^{n+\alpha} e^{-x} \, dx \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n ((x^{n+1} - n(n+\alpha) x^n)/n!) + \ldots$. Dalla (IV.100) e le espressioni per $C_n^{(\alpha)}$ e $D_n^{(\alpha)}$ seguono $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$, $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$ e $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$. Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$
(2n+1+\alpha-x) L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \qquad \text{(IV.101)}
$$

dove $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$. In Fig. IV.4 abbiamo tracciato i grafici di alcuni polinomi di Laguerre.

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$
(1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^\infty L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \qquad |t| < 1, \qquad \text{(IV.102)}
$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$
F(x,t) = (1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^\infty c_n(x) t^n, \qquad |t| < 1, \quad \text{(IV.103)}
$$

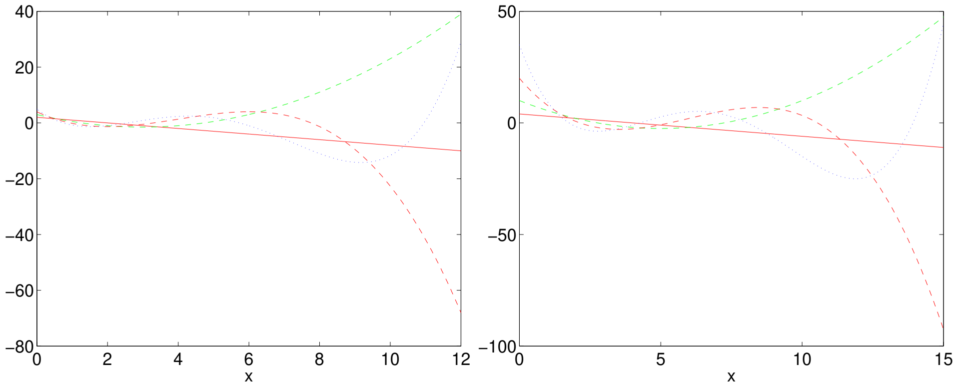

Figura IV.4: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

dove $c_n(x)\, n!$ è la derivata parziale n-esima di $F(x,t)$ rispetto a t per $t = 0$. Sostituendo la serie (IV.103) nella equazione

$$(1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} + [x - (1+\alpha)(1-t)]\, F = 0,$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti t^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) e per il coefficiente di t^0:

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x - 2n - \alpha - 1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x - \alpha - 1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove $c_0(x) = 1$. Quindi $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ per $n = 0, 1, 2, \cdots$ (vedi la (IV.101)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione $x = t^2$:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = \int_{-\infty}^\infty L_n^{(\alpha)}(t^2) L_m^{(\alpha)}(t^2) |t|^{2\alpha+1} e^{-t^2}\, dt, \tag{IV.104}$$

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = \int_{-\infty}^\infty t L_n^{(\alpha)}(t^2) t L_m^{(\alpha)}(t^2) |t|^{2\alpha-1} e^{-t^2}\, dt. \tag{IV.105}$$

Per fare scomparire i fattori $|t|^{2\alpha\pm1}$ in (IV.104) e (IV.105) scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (IV.104) e $\alpha = \frac{1}{2}$ in (IV.105). Quindi $H_{2n}(t)$ è proporzionale a $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$ e $H_{2n+1}(t)$ è proporzionale a $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$. Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n}\, n!(-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \tag{IV.106}$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1}\, n!(-1)^n\, t L_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \tag{IV.107}$$

7 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev di prima specie $T_n(x)$ e di seconda specie $U_n(x)$ si definiscono nel seguente modo:

$$U_n(x) = \cos(nt), \qquad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}, \tag{IV.108}$$

where $x = \cos(t)$. In tal caso $T_n(x)$ e $U_n(x)$ sono polinomi di x di grado n che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad\ \ T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x_+T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\ &= 2\cos(t)\cos(nt) = 2xT_n(x), \\ U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\ &= \frac{2\cos(t)\sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1,1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \ldots$ per $n \in \mathbb{N}$. In Fig. IV.5 abbiamo tracciato i grafici di $T_n(x)$ e $U_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, 4$.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,dt &= \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m}, \\ \int_0^\pi \sin((n+1)t)\sin(m+1)t)\,dt &= \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m}, \tag{IV.109}$$

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}. \tag{IV.110}$$

Quindi $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sono i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ con peso $(1-x^2)^{-1/2}$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sono i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ con peso $(1-x^2)^{1/2}$, tranne per fattori costanti.

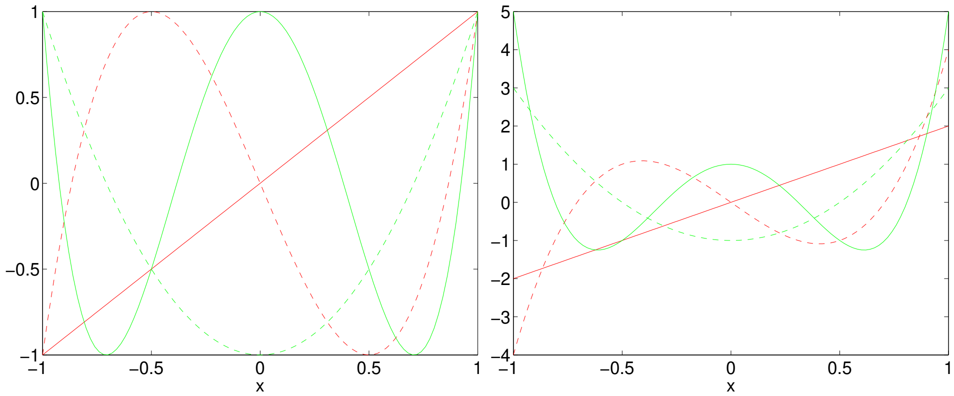

Figura IV.5: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specia di grado 1, 2, 3 e 4. Nel panello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel panello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

Le funzioni $u(t) = \cos(nt)$ e $u(t) = \sin(nt)$ soddisfano all'equazione differenziale $u''(t) + n^2 u(t) = 0$. Sostituendo $x = \cos(t)$ e utilizzando le definizioni per $T_n(x)$ e $U_n(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned}(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) &= 0,\\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n^2 U_n(x) &= 0.\end{aligned}$$

In forma Sturm-Liouville abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^{1/2}T_n'(x)\right) &= -n^2 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}},\\ \frac{d}{dx}\left((1-x^2)^{3/2}U_n'(x)\right) &= -n^2 \sqrt{1-x^2}\, U_n(x).\end{aligned}$$

Capitolo V

PROBLEMI AL CONTORNO

In questo capitolo risolviamo alcuni problemi al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziale, dove il dominio ci permette di eseguire una separazione delle variabili.

1 Equazione di Laplace nel disco

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{V.1}$$

nel disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ sotto le condizioni al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial D. \tag{V.2}$$

Ponendo $G = D$, assumiamo che f sia continua sul cerchio ∂D, e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. In coordinate polari l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove $0 \le \theta < 2\pi$ (con periodicità) e $0 < r < L$ con continuità della soluzione per $r \to 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni $u_0(r)$, $u_m(r)\cos m\theta$ e $u_m(r)\sin m\theta$, dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e la funzione $u_m(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_m}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}u_m(r) = 0. \tag{V.3}$$

L'equazione (V.3) è un'equazione di Eulero $[r^2 u_m''(r) + r u_m'(r) - m^2 u_m(r) = 0]$ con la soluzione generale

$$u_m(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r), & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2\, r^{-m}, & m = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. La continuità se $r \to 0^+$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^m se $m = 1, 2, \ldots$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right), \tag{V.4}$$

dove $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sono opportune costanti.

Sostituiamo $r = L$ in (V.4) e applichiamo la condizione al contorno $u(L,\theta) = f(\theta)$. Risulta

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right). \tag{V.5}$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier abbiamo for $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta \\ a_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \qquad b_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \end{cases}$$

dove la serie (V.5) è uniformente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ (e anche totalmente convergente) se $f(\theta)$ è continua (con $f(-\pi) = f(\pi)$) e regolare a tratti.

Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r,\theta)$. Risulta

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^n \left[\cos n\theta \cos n\hat{\theta} + \sin n\theta \sin n\hat{\theta}\right] \right) f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^n \cos n(\theta - \hat{\theta}) \right] f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{L} e^{i(\theta-\hat{\theta})}\right)^n + \left(\frac{r}{L} e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\right)^n \right\} \right] f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \left\{ \frac{e^{i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}}{1 - e^{i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}} + \frac{e^{-i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}}{1 - e^{-i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}} \right\} \right] f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{L} \cos(\theta - \hat{\theta}) + \left(\frac{r}{L}\right)^2} f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|L^2 - r^2|}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2} f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta},
\end{aligned}$$

il cosiddetto *integrale di Poisson*. Osserviamo che il nucleo di Poisson

$$\frac{|L^2 - r^2|}{L^2 - 2rL\cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2}$$

è simmetrico in r e L e simmetrico in θ e $\hat{\theta}$. Inoltre, è strettamente positivo; le sue uniche singolarità si trovano sulla circonferenza $r = L$ per $\theta = \hat{\theta}$.

Discutiamo adesso le proprietà delle funzioni $u(r, \theta)$.

Proposizione V.1 *Sia $f \in L_2(-\pi, \pi)$. Allora $u \in L_2(D)$. Inoltre,*

$$\lim_{r \to L^-} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 \, d\theta = 0. \tag{V.6}$$

Dimostrazione. Applicando l'uguaglianza di Parseval alla (V.5) si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < +\infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \|u\|^2_{L_2(G)} &= \int_0^L \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r |u(r, \theta)|^2 \, d\theta \, dr \\
&= \frac{L^2 |a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{2n+2}}{2n+2} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \\
&\leq \frac{L^2}{2} \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] = \frac{1}{\pi} \frac{L^2}{2} \|f\|^2_{L^2(-\pi, \pi)}.
\end{aligned}$$

In altre parole, $u \in L_2(G)$.

Per dimostrare la (V.6), si calcoli

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(L^{2n} - r^{2n} \right) \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right),$$

implicando la (V.6). □

2 Equazione di Laplace nel cilindro

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{V.7}$$

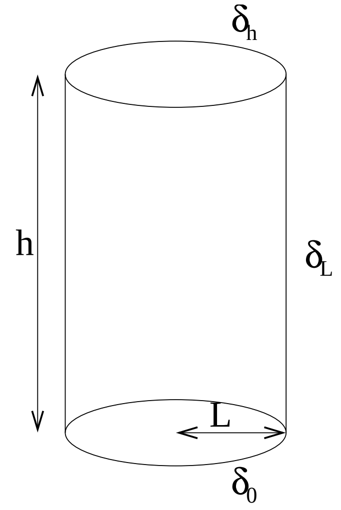

Figura V.1: Suddivisione del cilindro in ∂_0, ∂_h e ∂_L.

nel cilindro $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < L,\ 0 < z < h\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial G \text{ del cilindro.}$$

Assumiamo che f sia continua sul bordo ∂G del cilindro e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ del problema al contorno. Tale soluzione è unica (perchè?). Suddividendo ∂G nei tre insiemi $\partial_L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = L,\ 0 \leq z \leq h\}$, $\partial_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq L,\ z = 0\}$ e $\partial_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq L,\ z = h\}$, scriviamo f come la somma $f_L + f_0 + f_h$ di tre funzioni con supporto in ∂_L, ∂_0 e ∂_h, rispettivamente. Le corrispondenti soluzioni u_L, u_0 e u_h dell'equazione di Laplace (V.7) con condizione al contorno $u_L = f_L$, $u_0 = f_0$ e $u_h = f_h$ su ∂G soddisfano

$$u_l + u_0 + u_h = u,$$

grazie alla linearità del problema al contorno.

Risolviamo i tre problemi (per u_L, u_0 e u_h) separatamente, utilizzando le coordinate cilindriche (r, θ, z). In queste coordinate si ha $G = \{(r, \theta, z) : 0 < r < L,\ 0 < z < h\}$. Applicando la separazione delle variabili all'equazione di Laplace in coordinate cilindriche

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{V.8}$$

cioè sostituendo $u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ nella (V.7) e utilizzando la condizione di periodicità $\Theta(\theta+2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, otteniamo

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0, \tag{V.9}$$

dove $m = 0,1,2,\ldots$, $\Theta(\theta)$ è costante per $m = 0$ e $\Theta(\theta)$ è una combinazione lineare di $\cos m\theta$ e $\sin m\theta$ per $m = 1,2,\ldots$.

Prima risolviamo il problema al contorno per u_L. Per convenienza scriviamo u al posto di u_L e f invece di f_L. In coordinate cilindriche si ha

$$u(r,\theta,0) = u(r,\theta,h) = 0 \implies Z(0) = Z(h) = 0,$$

mentre $Z''(z)/Z(z)$ è una costante C. Affinché $Z(z)$ sia non banale, questa costante C deve essere non positiva. Si ottiene

$$Z(z) \sim \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), \qquad C = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Dalla (V.9) e dal valore di C troviamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left(\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0.$$

Sostituendo $R(r) = \tilde{R}(\rho)$ per $\rho = n\pi r/h$, otteniamo l'equazione di Bessel immaginaria di ordine m

$$\frac{d^2\tilde{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{R}}{d\rho} - \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}(\rho) = 0. \tag{V.10}$$

L'unica soluzione della (V.10) (tranne un fattore costante) limitata se $\rho \to 0^+$ è la funzione di Bessel immaginaria $I_m(\rho)$. Questa funzione è reale per $\rho > 0$, è proporzionale a $J_m(i\rho)$, e non ha nessuno zero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ciò segue dal fatto che la funzione di Bessel $J_m(\rho)$ non ha zeri non reali. Quindi $J_m(\rho) > 0$ per $\rho > 0$.

In variabili separate abbiamo trovato le soluzioni

$$\begin{cases} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), & m = 0,\ n = 1,2,\ldots, \\ I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)[c_1\cos m\theta + c_2\sin m\theta], & m,n = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

Dunque la soluzione $u(r,\theta,z)$ si può sviluppare nella serie di Fourier

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \Bigg[\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{V.11}$$

dove

$$f(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\left[\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)\right]. \tag{V.12}$$

Discutiamo ora la convergenza della serie (V.12). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_L e si annulli su $\partial_L \cap [\partial_0 \cup \partial_h]$. Allora, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, $f(\theta, \cdot)$ è di classe C^1 in $[0, h]$, soddisfa $f(\theta, 0) \equiv f(\theta, h) \equiv 0$ e $f(0, z) \equiv f(2\pi, z)$ e è di classe C^1 in $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi la sua serie di Fourier in z è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di θ di classe C^1 che hanno gli stessi valori per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Si ha

$$\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{h}\int_0^h f(\theta, z)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz. \tag{V.13}$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville monodimensionali. Sia $Lu = -u''$ su $[0, 2\pi]$ con condizioni periodiche $u(0) = u(2\pi) = 0$ e $u'(0) = u'(2\pi)$. Allora ogni $g \in C^1[0, 2\pi]$ con $g(0) = g(2\pi)$ e $g'(0) = g'(2\pi)$ ha uno sviluppo uniformemente convergente

$$g(\theta) = \frac{g_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{mc}\cos(m\theta) + g_{ms}\sin(m\theta)),$$

dove

$$g_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta, \qquad g_{mc} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(m\theta)\, d\theta,$$
$$g_{ms} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(m\theta)\, d\theta, \qquad \|g\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \frac{|g_0|^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|g_{mc}|^2 + |g_{ms}|^2\right).$$

Torniamo al problema originale. Dalle (V.13) si ha

$$a_{0n} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) d\theta dz;$$
$$a_{mn} I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z)\cos m\theta \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) d\theta dz;$$
$$b_{mn} I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z)\sin m\theta \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) d\theta dz,$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right)^2+\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right)I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)^2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta,z)|^2\,d\theta dz.$$

Nel modo analogo si ottiene dalla (V.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)^2+\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right)I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)^2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz,$$

e dalla (V.11) e (V.12)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}\left[I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right)-I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right)\left[I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)-I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\right]^2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta,z)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz.$$

Quindi

$$\lim_{r\to L^-}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta,z)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz=0. \tag{V.14}$$

Adesso risolviamo i problemi al contorno per la u_0 e u_h, cioè sotto l'ipotesi che $f(L,\theta,z)\equiv 0$ e ponendo $u=u_0+u_h$ e $f=f_0+f_h$. In tal caso sfruttiamo il fatto che dalla separazione delle variabili segue:

$$\frac{1}{R(r)}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}=C$$

è costante. Affinché ci sia una soluzione non banale limitata se $r\to 0^+$ e con uno zero per $r=L$, bisogna scegliere la costante C tale che risulta l'equazione di Bessel [cioè, $C<0$] invece dell'equazione di Eulero [$C=0$] e l'equazione di Bessel immaginaria [$C>0$]. Ponendo $C=-\nu^2$ con $\nu>0$, risulta

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\nu^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0.$$

La sostituzione $\tilde{R}(\rho) = R(r)$ e $\rho = r\nu$ conduce all'equazione di Bessel di ordine m

$$\frac{d^2\tilde{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{R}}{d\rho} + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}(\rho) = 0.$$

Affinché la sua soluzione sia limitata se $\rho \to 0^+$, bisogna richiedere $\tilde{R}(\rho) \sim J_m(\rho)$. Siano $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \ldots$ gli infiniti zeri della funzione di Bessel $J_m(\cdot)$ in $(0, +\infty)$. Allora la condizione al contorno

$$u(L, \theta, z) = 0 \implies R(L) = 0$$

implica che $\nu L = \nu_{mn}$ per qualche $n = 1, 2, \ldots$. Di conseguenza,

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \nu^2 = \left(\frac{\nu_{mn}}{L}\right)^2.$$

In tal caso

$$Z(z) \sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn} z}{L}\right) \qquad \begin{cases} u = u_h,\ f = f_h, \\ \text{quindi se } u(r,\theta,0) = 0 \text{ e } f(r,\theta) = 0; \end{cases}$$

$$Z(z) \sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h - z)}{L}\right) \qquad \begin{cases} u = u_0,\ f = f_0, \\ \text{quindi se } u(r,\theta,h) = 0 \text{ e } f(r,\theta) = 0. \end{cases}$$

Nel primo caso $[u(r,\theta,0) = 0$ e $f(r,\theta) = 0]$ si ha lo sviluppo

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{0n} z}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn} z}{L}\right)\right], \quad \text{(V.15)}$$

dove

$$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right)\sinh(\nu_{0n}) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right)\right], \quad \text{(V.16)}$$

mentre nel secondo caso $[u(r,\theta,h) = 0$ e $f(r,\theta) = 0]$ si ha lo sviluppo

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{0n}(L - z)}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h - z)}{L}\right)\right], \quad \text{(V.17)}$$

dove

$$
\begin{aligned}
f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) \sinh(\nu_{0n}) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right)\Bigg], \quad \text{(V.18)}
\end{aligned}
$$

Discutiamo ora la convergenza delle serie (V.16) e (V.18). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_h [rispettivamente, ∂_0] e si annulli su $\partial_h \cap \partial_L$ [rispettivamente, $\partial_0 \cap \partial_L$]. Allora, per ogni $r \in [0, L]$, $f(r, \cdot)$ è di classe C^1 in $[-\pi, \pi]$, soddisfa $f(r, -\pi) \equiv f(r, \pi)$, è di classe C^1 in $r \in [0, L]$ e si annulla per $r = L$. Quindi la sua serie di Fourier è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di r di classe C^1 che si annullano per $r = L$. Si ha Analogamente alle (V.13) si ha in ambedue casi

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{0n} h}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\, d\theta; \quad \text{(V.19)}
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, d\theta; \quad \text{(V.20)}
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\sin m\theta\, d\theta. \quad \text{(V.21)}
$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville. Sia $Lu = -(ru')' + (m^2/r)$ con condizioni al contorno $u(r) = O(1)$ per $m = 0$, $u(r) = O(r)$ per $m = 1, 2, \ldots$, e $u(L) = 0$, e problema agli autovalori $(Lu)(r) = \nu r u(r)$ [Vedi (IV.54)-(IV.55)]. Allora gli autovalori sono ν_{mn}^2 e le autofunzioni sono $J_m(\nu_{mn} r/L)$ dove μ_{mn} è lo zero positivo n-esimo delle $J_m(\cdot)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Essi sono ortogonali nello spazio di Hilbert $L_2([0, L]; r\, dr)$. Inoltre,

$$
\int_0^L r J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right)^2 dr = L^2 \int_0^1 x J_m(\nu_{mn} x)^2\, dx = \frac{L^2}{2} J_m'(\mu_{mn})^2
$$

[Vedi il Teorema IV.7]. Allora ogni $g \in C^2((0, L])$ che soddisfa le condizioni al contorno in $r = 0$ ed $r = L$ e la condizione $-(rg')' + (m^2/r)g \in L_2([0, L]; r\, dr)$ [cioè, $g \in \mathcal{M}_{L_m}$; vedi la riga dopo la (IV.55)], si può sviluppare nella serie uniformemente convergente

$$
g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right),
$$

dove

$$g_n = \frac{2}{L^2 J'_m(\nu_{mn})^2} \int_0^L g(r) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) dr;$$
$$\|g\|^2_{L_2([0,L];r\,dr)} = \frac{L^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 J'_m(\nu_{mn})^2.$$

Partendo dalle (V.19)-(V.21), si ha

$$a_{0n} \sinh\left(\frac{\nu_{0n} h}{L}\right) = \frac{2}{\pi L^2 J'_0(\nu_{0n})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) d\theta dr; \tag{V.22}$$

$$a_{mn} \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) = \frac{2}{\pi L^2 J'_m(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) \cos m\theta J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) d\theta dr; \tag{V.23}$$

$$b_{mn} \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) = \frac{2}{\pi L^2 J'_m(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) \sin m\theta J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) d\theta dr, \tag{V.24}$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J'_0(\mu_{0n})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{0n} h}{L}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J'_m(\mu_{mn})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{mn} h}{L}\right]\right]$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r,\theta)|^2 \, d\theta dr.$$

Nel modo analogo si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J'_0(\mu_{0n})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{0n} z}{L}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J'_m(\mu_{mn})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{mn} z}{L}\right]\right]$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} J'_0(\mu_{0n})^2 \left[\sinh\left(\frac{\nu_{0n} h}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\nu_{0n} z}{L}\right)\right]^2\right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J'_m(\mu_{mn})^2 \left[\sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\nu_{mn} z}{L}\right)\right]^2\right)$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r,\theta) - u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr.$$

Di consequenza, se f ha il suo supporto su ∂_0 (∂_h, rispettivamente), allora

$$\int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r|f(r,\theta) - u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr$$

tende a zero se $z \to 0^+$ ($z \to h^-$, rispettivamente).

3 Equazione del calore

L'equazione del calore (la cui soluzione rappresenta la temperatura come funzione della posizione-tempo (x,t))

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

dove $x \in G \subset \mathbb{R}^3$, $a > 0$ e $t > 0$, ha le seguenti condizioni iniziali [13]:

a. La condizione iniziale $u(x, t = 0) = u_0(x)$ per $x \in G$;

b. La condizione al contorno $u|_S = u_S$ [specificando la temperatura al bordo], oppure $(\partial u/\partial n)|_S = -(u_1/k)$ [specificando il flusso di calore attraversa il bordo], oppure $k(\partial u/\partial n) + h(u - u_{\text{amb}})|_S = 0$ [dove u_{amb} è la temperatura dell'ambiente e h il coefficiente di scambio di calore]. In quest'equazione G è una regione con bordo S regolare a tratti.

L'equazione del calore si può generalizzare come

$$\frac{du}{dt} = -Lu(t) + f(t), \qquad t > 0, \tag{V.25}$$

con condizione iniziale

$$u(t = 0) = u_0, \tag{V.26}$$

dove L è un operatore di Sturm-Liouville autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(G)$, u_0 è un vettore in $L_2(G)$ [modellizzando la temperatura iniziale], $f(t)$ è un vettore in $L_2(G)$ continuo nel tempo $t \geq 0$ [modelizzando i sorgenti di calore al momento t], e $u(t)$ è un vettore di $L_2(G)$ [modellizzando la temperatura al momento t]. Supponiamo che L abbia un numero infinito di autovalori λ_n con base ortonormale di corrispondenti autofunzioni φ_n: $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, dove $n = 1, 2, \ldots$. In tal caso ogni $u \in L_2(G)$ soddisfa l'identità di Parseval

$$\|u\|^2_{L_2(G)} = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 .$$

Da questa impostazione segue subito

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi_n) = -\lambda_n (u(t), \varphi_n) + (f(t), \varphi_n)$$

con condizione iniziale

$$(u(t=0), \varphi_n) = (u_0, \varphi_n),$$

dove $n = 1, 2, \ldots$ e il prodotto scalare è quello complesso di $L_2(G)$. Utilizzando la formula della variazione delle costanti si trova immediatamente

$$(u(t), \varphi_n) = e^{-\lambda_n t}(u_0, \varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} (f(s), \varphi_n)\, ds.$$

Quindi

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n t}(u_0, \varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} (f(s), \varphi_n)\, ds \right] \varphi_n. \tag{V.27}$$

La (V.27) si può scrivere nella forma

$$u(t) = e^{-tL} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)L} f(s)\, ds,$$

dove

$$e^{-tL} u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (u_0, \varphi_n) \varphi_n.$$

Discutiamo alcuni esempi. Prima facciamo $G = (0, a)$ e $Lu = -u''$ con condizioni di Dirichlet, cioè il problema al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < a,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

In tal caso gli autovalori sono $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate in $L_2(0,1)$ sono $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a})$, dove $n = 1, 2, \ldots$. Quindi la soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} &\left[e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \int_0^a u_0(y)\, dy \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right. \\ &\left. + \int_0^t \int_0^a e^{-n^2\pi^2 (t-s)/a^2} f(y,s) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\, dy\, ds \right] \\ &= \int_0^1 \mathcal{G}(x,y;t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_0^1 \mathcal{G}(x,y;t-s) f(y,s)\, dy\, ds, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\\ &= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)}\frac{-\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right)+\cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2}\right]\\ &= \frac{-\vartheta_3(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})+\vartheta_3(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a},\end{aligned}$$

in cui $\vartheta_3(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2nz)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([15], 21.11).[1]

Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(a) = 0$. In tal caso $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ e $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{a}}\cos(n\pi x/a)$, dove $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Allora

$$u(x,t) = \int_0^a \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^a \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right]\\ &= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)}\frac{\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right)+\cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2}\right]\\ &= \frac{\vartheta_3(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})+\vartheta_3(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a}.\end{aligned}$$

Consideriamo ora $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con la condizione di Dirichlet all'estremo sinistro e quella di Neumann all'estremo destro: $u(0) = u'(a) = 0$. In tal caso $\lambda_n = ((n+\frac{1}{2})\pi/a)^2$ e $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin((n+\frac{1}{2})\pi x/a)$, dove $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Allora

$$u(x,t) = \int_0^a \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^a \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,$$

[1] Si ha $\vartheta_3(z,q) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos(2z)+q^{4n-2})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\right)\\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \left\{-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x+y)}{2a}\right)\right.\\ &\left.+\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x-y)}{2a}\right)\right\}\\ &= \frac{-\vartheta_2(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})+\vartheta_2(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a},\end{aligned}$$

in cui $\vartheta_2(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/4}\cos((2n+1)z)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([15], 21.11).[2]

Consideriamo infine $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con condizioni periodiche. In tal caso ci sono un autovalore semplice $\lambda_0 = 0$ con autofunzione corrispondente $\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}$ e gli autovalori doppi $\lambda_n = (2n\pi/a)^2$ con autofunzioni corrispondenti $\varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(2n\pi x/a)$ e $\varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(2n\pi x/a)$, dove $n = 1,2,3,\ldots$. Allora

$$u(x,t) = \int_0^a \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^a \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2n\pi}{a})^2 t}\left\{\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\right\}\right]\\ &= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2n\pi}{a})^2 t}\cos\left(\frac{2n\pi(x-y)}{a}\right)\right]\\ &= \frac{1}{a}\vartheta_3\left(\frac{\pi(x-y)}{a}, e^{-(\frac{2\pi}{a})^2 t}\right).\end{aligned}$$

Adesso discutiamo il caso $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < L\}$ e $L = -\Delta$ con la condizione di Dirichlet al bordo. In tal caso gli autovalori $\lambda > 0$. Infatti, cambiando la parte a destra in (V.8) in $-\lambda u(r,\theta)$ e applicando la solita separazione delle variabili arriviamo, per $\lambda > 0$, alla equazione differenziale

$$\frac{d^2R}{d(r\sqrt{\lambda})^2} + \frac{1}{r\sqrt{\lambda}}\frac{dR}{d(r\sqrt{\lambda})} + \left(1 - \frac{m^2}{(r\sqrt{\lambda})^2}\right)R(r) = 0,$$

[2] Si ha $\vartheta_2(z,q) = 2Gq^{1/4}\cos(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos(2z)+q^{4n})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $R(r)$ è limitato se $r \to 0^+$. Allora $R(r) \sim J_m(r\sqrt{\lambda})$, mentre $R(L) = 0$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_{mn} = (\nu_{mn}/L)^2$ [essendo ν_{mn} lo zero positivo n-esimo della $J_m(x)$], dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni normalizzate in $L_2(G) \simeq L_2([0, L] \times [0, 2\pi]; r dr\, d\theta)$ sono

$$\begin{cases} \varphi_{0n}(r,\theta) = \dfrac{1}{L\sqrt{\pi}|J_0'(\nu_{0n})|} J_0\left(\dfrac{\nu_{0n} r}{L}\right), & n = 1, 2, 3, \ldots \\ \varphi^c_{mn}(r,\theta) = \dfrac{\sqrt{2}\,\cos m\theta}{L\sqrt{\pi}|J_m'(\nu_{mn})|} J_m\left(\dfrac{\nu_{mn} r}{L}\right), & m = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots \\ \varphi^s_{mn}(r,\theta) = \dfrac{\sqrt{2}\,\sin m\theta}{L\sqrt{\pi}|J_m'(\nu_{mn})|} J_m\left(\dfrac{\nu_{mn} r}{L}\right), & m = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Le costanti di normalizzazione seguono dall'identità

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} r J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \cos m\theta\, d\theta dr &= (1 + \delta_{m0})\pi \int_0^L r J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) dr \\ &= (1 + \delta_{m0}) \frac{L^2}{2} J_m'(\nu_{mn})^2, \end{aligned}$$

e ugualmente con $\sin m\theta$ al posto di $\cos m\theta$ se $m \geq 1$.

Risulta

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\mathcal{G}(r,\theta;t) u_0(r,\theta)\, d\theta\, dr \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \hat{r}\mathcal{G}(\hat{r},\hat{\theta}; t-s) f(\hat{r},\hat{\theta},s)\, d\hat{\theta}\, d\hat{r}\, ds, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r,\theta;t) = \sum_{n=1}^\infty &\left[e^{-\nu_{0n}^2 t/L^2} \frac{J_0\left(\dfrac{\nu_{0n} r}{L}\right) J_0\left(\dfrac{\nu_{0n}\hat{r}}{L}\right)}{\pi L^2 J_0'(\nu_{0n})^2} \right. \\ &\left. + 2 \sum_{m=1}^\infty e^{-\nu_{mn}^2 t/L^2} \frac{J_m\left(\dfrac{\nu_{mn} r}{L}\right) J_m\left(\dfrac{\nu_{mn}\hat{r}}{L}\right) \cos[m(\theta-\hat{\theta})]}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \right], \end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la formula

$$\cos(m[\theta - \hat{\theta}]) = \cos m\theta \cos m\hat{\theta} - \sin m\theta \sin m\hat{\theta}.$$

4 Equazione delle Onde

L'equazione delle onde ha la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \, \Delta u, \tag{V.28}$$

dove $a > 0$ è la velocità della onda, $x \in G$ (un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$),[3], e valgono la condizione di Dirichlet

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial G, \tag{V.29}$$

e le due condizioni iniziali

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{V.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \tag{V.31}$$

La separazione delle variabili

$$u(x,t) = \psi(x)T(t) \tag{V.32}$$

conduce alle equazioni

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \text{costante}, \tag{V.33}$$

$$\psi(x) = 0 \text{ per } x \in \partial G. \tag{V.34}$$

Supponiamo che l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0$$

su G con la condizione di Dirichlet abbia un infinito numerabile di autovalori positivi λ_n^2 (dove $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$) con autofunzioni corrispondenti φ_n che formano una base ortonormale di $L_2(G)$. In tal caso la costante nella (V.33) vale $-\lambda_n^2$, e quindi

$$T(t) = c_n \cos(a\lambda_n t) + d_n \sin(a\lambda_n t).$$

La soluzione generale della equazione delle onde (V.28) con la condizione di Dirichlet (V.29) ha la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(a\lambda_n t) + d_n \sin(a\lambda_n t)\right) \psi_n(x). \tag{V.35}$$

[3]Ci sono anche applicazioni in cui G è illimitato.

Quindi dalle (V.30) e (V.31) otteniamo

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \tag{V.36}$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n a\lambda_n \psi_n(x). \tag{V.37}$$

Dall'ortonormalità delle autofunzioni ψ_n in $L_2(G)$ seguono i coefficienti c_n e d_n:

$$c_n = \langle u_0, \psi_n \rangle_{L_2(G)} = \int_G u_0(x)\psi_n(x)\, dx, \tag{V.38}$$

$$d_n = \frac{\langle u_1, \psi_n \rangle}{a\lambda_n} = \frac{1}{a\lambda_n} \int_G u_1(x)\psi_n(x)\, dx. \tag{V.39}$$

Lo stesso discorso vale se al posto della condizione di Dirichlet (V.29) si considera la condizione di Neumann. L'unica differenza è che ora zero è autovalore (con l'autofunzione costante) dell'equazione di Helmholtz su G con la condizione di Neumann. Al posto della (V.35) si consideri ora

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\frac{1}{\sqrt{\mathrm{mis}(G)}}\,(c_0 + d_0 t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(a\lambda_n t) + d_n \sin(a\lambda_n t)\right) \psi_n(x), \end{aligned} \tag{V.40}$$

dove $\psi_0(x) = 1/\sqrt{\mathrm{mis}(G)}$ è l'autofunzione normalizzata corrispondente all'autovalore zero. Per $n \geq 1$ si trovano le espressioni (V.38) e (V.39), mentre

$$c_0 = \frac{\int_G u_0(x)\, dx}{\sqrt{\mathrm{mis(G)}}}, \qquad d_0 = \frac{\int_G u_1(x)\, dx}{\sqrt{\mathrm{mis(G)}}}.$$

Nel caso in cui $G = (0, L)$, abbiamo per le condizioni di Dirichlet

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{V.41}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, e per le condizioni di Neumann

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{V.42}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, mentre $\lambda_0 = 0$ e $\psi_0(x) = 1/\sqrt{L}$.

Nel caso delle condizioni di Dirichlet, utilizzando le espressioni

$$2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right),$$
$$2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right),$$

e sostituendo la (V.41) nella (V.35), otteniamo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[u_0(x-at) + u_0(x+at)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left[u_1(x-at) + u_1(x+at)\right]\right), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato gli sviluppi di Fourier (V.36) e (V.37).

5 Equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger descrive (nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica) la probabilità che una particella si trova in una regione dello spazio al momento t. Se m è la massa della particella e $h = 2\pi\hbar$ la costante di Planck, si ha per la funzione onda $\psi(x,t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \tag{V.43}$$
$$\psi(x, t=0) = \psi_0(x), \tag{V.44}$$

con condizioni al contorno. La funzione $V(x)$ è reale e rappresenta il potenziale. Scegliendo unità fisiche tali che $\hbar = 1$ e $2m = 1$, risulta invece della (V.43)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(x)\psi(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0. \tag{V.45}$$

Se $E \subset \mathbb{R}^3$ è misurabile, $\int_E |\psi(x,t)|^2\,dx$ (sotto la condizione di normalizzazione $\psi(\cdot,t) \in L_2(\mathbb{R}^3)$) è la probabilità di trovare la particella in E al momento t.

Studiamo esclusivamente il problema stazionario, dove l'energia λ prende il posto dell'operatore $i(\partial/\partial t)$, cioè

$$-\Delta\psi + V(x)\psi(x) = k^2\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{V.46}$$

dove $\lambda = k^2$ con $\operatorname{Im} k \geq 0$. Ci sono due problemi di rilevante importanza:

1. il problema degli stati limite: $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$. In tal caso l'energia $\lambda = k^2$ è un valore discreto negativo.

2. il problema di scattering: in tal caso si impone la condizione di Sommerfeld

$$\psi(k,x) = e^{ik\theta\cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to +\infty,$$

dove $A(k,\theta,\theta')$ è l'ampiezza (come funzione dell'energia $\lambda = k^2$ e le direzioni $\theta,\theta' \in S^2$); $e^{ik\theta\cdot x}$ rappresenta un'onda piana nella direzione θ. Nel problema di scattering si ha l'energia $\lambda > 0$.

Consideriamo il caso di simmetria sferica, dove

$$V(x) = V(r), \qquad r = |x|.$$

In tal caso l'ampiezza dipende da k e dall'angolo tra le direzioni θ e θ': $A(k,\theta,\theta') = A(k,\theta\cdot\theta')$. Per risolvere il problema di scattering bisogno separare le variabili in coordinate cilindriche, dove la direzione di θ prende il posto dall'asse z positivo. Discutiamo ora soltanto il problema degli stati limite. In tal caso si esprime l'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - V(r)\psi = -\lambda\psi,$$

dove $x = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3$. Sostituendo

$$\psi(x) = R(r)X(\varphi,\theta)$$

e moltiplicando da $r^2/R(r)X(\varphi,\theta)$ si ottiene

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{X(\varphi,\theta)}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}\right] - r^2V(r) = -\lambda r^2.$$

Come al solito, seguono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{C}{r^2} + \lambda - V(r)\right]R(r) = 0; \tag{V.47}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2} = -CX(\varphi,\theta), \tag{V.48}$$

dove C è una costante. L'equazione (V.48) si chiama spesso l'equazione di Beltrami.

Grazie alle (C1.2) degli appunti sulle funzioni sferiche, esiste una soluzione non banale della (V.48) se e solo se $C = l(l+1)$ per qualche $l = 0, 1, 2, \ldots$, ed in tal caso $X(\varphi, \theta)$ è una combinazione lineare delle funzioni sferiche $Y_l^m(\varphi, \theta)$, dove $m = -l, \ldots, l$. Infatti, eseguendo un'ulteriore separazione delle variabili nella (V.48), $X(\varphi, \theta) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta)$ dove $\xi = \cos\varphi$ e $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, risultano

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \ldots; \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi). \tag{V.49}$$

La (V.49) si dice equazione differenziale per le funzioni di Legendre associate: $\mathcal{P}(\xi) \sim \mathcal{P}_l^m(\xi)$, dove $l = m, m+1, m+2, \ldots$ e $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Discutiamo ora la (V.47). Sostituendo $R(r) = r^\alpha S(r)$ nella (V.47) [con $C = l(l+1)$] per un'opportuna α (da stabilire successivamente) e dividendo da r^α, si trova

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{2(\alpha+1)}{r}\frac{dS}{dr} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1) - l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right]S(r) = 0. \tag{V.50}$$

Per far somigliare la (V.50) all'equazione di Bessel si scelga α tale che $2(\alpha+1) = 1$, cioè $\alpha = -1/2$:

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \left[-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} + \lambda - V(r)\right]S(r) = 0. \tag{V.51}$$

Per far sparire il termine con la derivata prima dalla (V.50), ci vuole $\alpha = -1$. Quindi per $S(r) = rR(r)$ abbiamo

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \left[\frac{-l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right]S(r) = 0. \tag{V.52}$$

Per $\alpha = 0$ otteniamo dalla (V.50)

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right]R(r) = 0, \tag{V.53}$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Imporremo le seguenti due condizioni al contorno:

$$\begin{cases} R(r) = O(r^l), & r \to 0^+ \\ \displaystyle\int_0^\infty r|R(r)|^2\,dr < +\infty. \end{cases} \tag{V.54}$$

I seguenti casi sono di rilevante interesse:

1. L'oscillatore armonico, dove $V(r) = (\gamma/2)r^2$ per una costante $\gamma > 0$.
2. L'atomo di idrogeno, dove $V(r) = -e^2/r$ per e la carica dell'elettrone.

L'equazione (V.47) può essere risolta esattamente in tutti e tre casi.

Consideriamo ora il problema di scattering dove l'energia $E = k^2$ è positiva. In tal caso la funzione onda $\psi(k,x)$ non appartiene a $L^2(\mathbb{R}^3)$ e infatti soddisfa alla condizione di Sommerfeld

$$\begin{aligned}\psi(k,x) &= e^{ik\theta\cdot x} + \psi_s(x)\\ &= e^{ik\theta\cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|}A\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to +\infty,\end{aligned}$$

dove $A(k,\theta,\theta')$ è l'ampiezza e $k > 0$. Ovviamente il potenziale $V(x)$ deve essere localmente sommabile (cioè, $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ e tendere a zero abbastanza rapidamente se $|x| \to \infty$.[4] Cercando la cosiddetta *funzione di Green* $\mathcal{G}(k;x,x')$ tale che

$$(\Delta + k^2)\mathcal{G}(k;x,x') = -4\pi\delta(x-x'),$$

cioè scegliendo [Vedi la (VI.42) per $n = 3$]

$$\mathcal{G}(k;x,x') = \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|},$$

si ottiene facilmente

$$\psi_s(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathcal{G}(k;x,x')V(x')\psi(x')\,dx'.$$

Quindi

$$\psi(x) = e^{ik\theta\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{G}(k;x,x')V(x')\psi(x')\,dx'.$$

Per calcolare ψ dal potenziale si può risolvere l'equazione precedente per iterazione. Facendo una singola iterazione si arriva alla cosiddetta *approssimazione di Born*

$$\psi(x) \simeq e^{ik\theta\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{G}(k;x,x')V(x')e^{ik\theta\cdot x'}\,dx'.$$

Discutiamo ora il problema di scattering per i potenziali radiali $V(x) = V(r)$ con $r = |x|$ (Vedi [6]). Allora per $V \equiv 0$ l'equazione di Schrödinger per $E = k^2$ con $k > 0$ ha la soluzione generale

$$\psi(x) = \text{cost.}_1\, f_l(kr) + \text{cost.}_2\, g_l(kr),$$

[4] I potenziali di Coulomb $V(x) = \frac{\text{cost.}}{|x|}$ non conducono ad una teoria di scattering quantistica semplice, poichè non decadono abbastanza rapidamente.

dove

$$f_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = \rho j_l(\rho), \qquad g_l(\rho) = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\, J_{-(l+\frac{1}{2})}(\rho) = -\rho n_l(\rho),$$

dove $l = 0, 1, 2, \ldots$ e j_l e n_l si chiamano funzioni di Bessel sferiche di prima e seconda specie. Sviluppando l'onda piana

$$e^{ik\theta\cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} \frac{f_l(kr)}{kr} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

si trova per l'ampiezza

$$f(k; \theta\cdot\theta') \overset{\text{def}}{=} A(k, \theta, \theta') = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin\delta_l(k) P_l(\theta\cdot\theta'),$$

dove $\delta_l(k)$ si chiamano *fasi di scattering*.

5.1 La buca di potenziale

In tal caso

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \tag{V.55}$$

dove $V_0 > 0$. Sostituendo $R(r) = r^{-1/2} S(r)$ otteniamo [Vedi (V.51)]

$$\begin{aligned} &\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \left[V_0 - \kappa^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right] S(r) = 0, \qquad 0 < r < r_0, \\ &\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} - \left[\kappa^2 + \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right] S(r) = 0, \qquad r > r_0, \end{aligned} \tag{V.56}$$

dove $\lambda = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$. Ovviamente, per $r > r_0$ la (V.56) è l'equazione immaginaria di Bessel di ordine $l + \frac{1}{2}$ nella variabile κr. Siccome deve tendere a zero se $r \to \infty$, si trova

$$S(r) \sim K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r), \qquad r > r_0, \tag{V.57}$$

dove $K_\nu(z)$ è la funzione di MacDonald di ordine ν. Per $\nu, z > 0$ la funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ è decrescente.

Per $0 < r < r_0$ la situazione è più complicata. Siccome $S(0^+)$ esiste, risulta per $0 < r < r_0$

$$S(r) \sim \begin{cases} J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), & V_0 > \kappa^2, \\ r^{l+\frac{1}{2}}, & V_0 = \kappa^2, \\ I_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\kappa^2 - V_0}), & V_0 < \kappa^2, \end{cases} \tag{V.58}$$

dove $J_\nu(z)$ è la funzione di Bessel di ordine ν e $I_\nu(z)$ è la funzione di Bessel imaginaria di ordine ν.

Per trovare i stati limite richiediamo che la derivata logaritmica della S (cioè, S'/S) sia continua in $r = r_0$. Grazie al decadimento della funzione di MacDonald, si vede subito che $S'(r)/S(r)$ ha un limite negativo se $r \to (r_0)^+$. D'altra parte, $r^{l+\frac{1}{2}}$ e la funzione di Bessel immaginaria sono crescenti per $r > 0$, mentre la funzione di Bessel stessa è oscillatoria. Quindi gli stati limiti possono esistere soltanto per $V_0 > \kappa^2$. In tal caso

$$S(r) \sim J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), \tag{V.59}$$

dove

$$\kappa r_0 \frac{K'_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)}{K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)} = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}\, \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{J_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}. \tag{V.60}$$

Le energie $\lambda = -\kappa^2$ corrispondenti agli stati limite si trovano dal numero finito di zeri della (V.60) per $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$; ci sono zeri per soltanto un numero finito di $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Per $l = 0$ abbiamo

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}, \qquad J_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}}\, \sin(w).$$

Allora (V.60) si riduce all'identità

$$\frac{\tan(\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2})}{\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2}} = -\frac{1}{1+z},$$

dove $z = \kappa r_0$. Gli zeri $z = \kappa r_0 \in (0, r_0\sqrt{V_0})$ si ottengono graficamente.

Per $l = 0$ si può ottenere i risultati in modo più semplice senza utilizzare le funzioni di Bessel. Partendo dall'equazione di Schrödinger (V.52) per $V(r)$ in (V.55), otteniamo per $S(r) = rR(r)$

$$\begin{cases} S''(r) + (V_0 - \kappa^2)S(r) = 0, & 0 < r < r_0, \\ S'' - \kappa^2 S(r) = 0, & r > r_0, \end{cases} \tag{V.61}$$

dove $\int_0^\infty |S(r)|^2 dr < \infty$, $S(0) = 0$[5] e S è di classe C^1 in $r = r_0$. Per $r > r_0$ risulta $S(r) \sim e^{-\kappa r}$. Quindi ci vuole $(S'/S)(r_0) = -\kappa < 0$.

Se $0 \leq V_0 < \kappa^2$, per $0 < r < r_0$ risulta $S(r) \sim \sinh(r\sqrt{\kappa^2 - V_0})$ [grazie alla condizione $S(0) = 0$] per $0 < r < r_0$ e quindi è impossibile avere

[5]Una condizione tecnica mai spiegata dal punto di vista fisico per costringere ad una successione finita di autovalori.

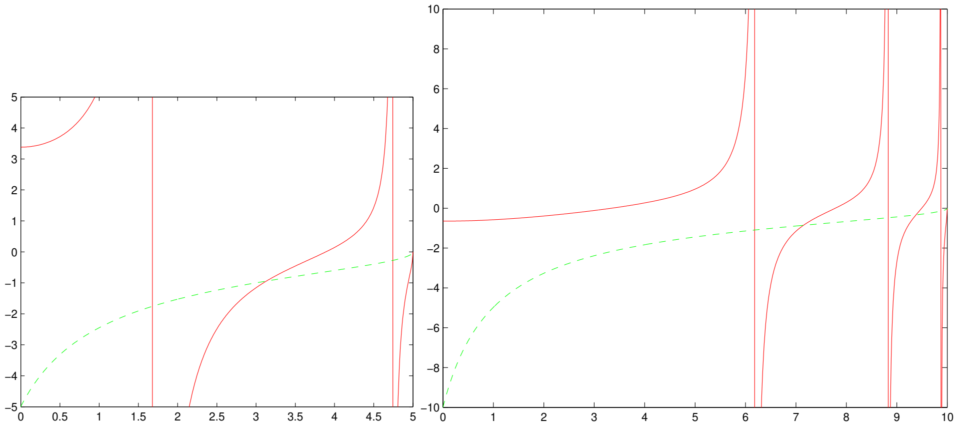

Figura V.2: Per $l = 0$ e per $r_0\sqrt{V_0} = 5$ (pannello sinistro) o 10 (pannello destro) vengono calcolati graficamente i valori di $z = \kappa r_0$ per cui l'equazione di Schrödinger per la buca sferica ha stato limite.

$(S'/S)(r_0) < 0$. Per $\kappa = \sqrt{V_0}$ risulta $S(r) \sim r$ [grazie alla condizione $S(0) = 0$] e quindi $(S'/S)(r_0) = (1/r_0) > 0$. Di conseguenza, siamo costretti a limitarci al caso $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$. In tal caso la condizione $S(0) = 0$ conduce a $S(r) \sim \sin(r\sqrt{V_0 - \kappa^2})$ per $0 < r < r_0$. Dalla condizione di derivabilità continua in $r = r_0$ si trova

$$\sqrt{V_0 - \kappa^2}\frac{\cos(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{\sin(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})} = -\kappa.$$

Per studiare quest'ultima equazione, poniamo $\xi = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}$ (che appartiene all'intervallo $(0, r_0\sqrt{V_0})$ e scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{\xi}{\tan(\xi)} = -\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}, \qquad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0},$$

oppure

$$\tan(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}}, \qquad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0}.$$

Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $(n - \frac{1}{2})\pi < r_0\sqrt{V_0} \leq (n + \frac{1}{2})\pi$ ci sono n soluzioni ξ di quest'equazione e quindi n stati limite.

5.2 Oscillatore armonico

a. Utilizzando le coordinate sferiche. In tal caso

$$V(r) = \frac{1}{2}\gamma r^2, \tag{V.62}$$

dove $\gamma > 0$ è una costante. Ponendo $c = \sqrt{\gamma/8}$ e $R(r) = e^{-cr^2}\phi(r)$, la (V.53) si riduce all'equazione differenziale

$$\phi''(r) + \left(\frac{2}{r} - 4cr\right)\phi'(r) + \left(k^2 - 6c - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\phi(r) = 0. \tag{V.63}$$

Sostituendo la serie di potenze

$$\phi(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s, \tag{V.64}$$

dove α è un parametro da stabilire, troviamo

$$\sum_{s=0}^{\infty} \big[\{(\alpha+s)(\alpha+s-1) + 2(\alpha+s) - l(l+1)\}c_s + \{(k^2-6c) - 4c(\alpha+s-2)\}c_{s-2}\big]\, r^{\alpha+s-2} = 0,$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Supponendo che il coefficiente di $r^{\alpha-2}$ sia diverso da zero, si trova

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1) = 0,$$

e quindi $\alpha = l$ oppure $\alpha = -(l+1)$. La condizione al contorno (V.54) se $r \to 0^+$ implica che $\alpha = l$. In tal caso $c_1 = 0$ e

$$s(s+2l+1)c_s + \{(k^2-6c) - 4c(s+l-2)\}c_{s-2} = 0. \tag{V.65}$$

Dunque $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$c_s = \frac{4c(s+l-2) - (k^2-6c)}{s(s+2l+1)} c_{s-2},$$

dove $s = 2, 4, 6, \cdots$. Il rapporto $c_s r^2/c_{s-2} \sim (2r^2/s)$ se $s \to +\infty$. Quindi scegliamo k^2 tale che $c_s = 0$ per qualche $s = 2, 4, 6, \cdots$, cioè

$$k^2 = 4c(s+l-2) + 6c, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots.$$

Quindi abbiamo trovato gli autovalori e le autofunzioni

$$\begin{cases} k_{l,n}^2 = 2c(2n+3), & l = n, n+2, n+4, \ldots,\ l = 0, 1, 2, \cdots, \\ \psi_{l,n}(r,\theta,\varphi) = e^{-cr^2}\phi_{l,n}(r) Y_l^m(\theta,\varphi), & m = -l, -l+1, \cdots, l, \end{cases} \tag{V.66}$$

dove $\phi_{l,n}(r) = r^l v_{l,n}(r)$ e $v_{l,n}(r)$ è un polinomio in r^2 di grado $n-l$. Quel polinomio soddisfa l'equazione

$$r^2 v''(r) + 2r(l+1-2cr^2)v'(r) + 4c(n-l)r^2 v(r) = 0.$$

Ponendo $t = 2cr^2$ e $w(t) = v(r)$ [tali che $rv'(r) = 2tw'(t)$ e $r^2v''(r) = 4t^2w''(t)+ 2tw'(t)$] otteniamo l'equazione differenziale

$$tw''(t) + (l + \frac{3}{2} - t)w'(t) + \frac{1}{2}(n - l)w(t) = 0, \tag{V.67}$$

dove $n - l = 0, 2, 4, \ldots$ e $w(t)$ è un polinomio in t di grado $\frac{1}{2}(n - l)$.

b. Utilizzando le coordinate cartesiane. Siccome $V(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 = \frac{\gamma}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, l'equazione di Schrödinger è anche separabile in coordinate Cartesiane. Infatti, scrivendo $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ otteniamo le tre equazioni

$$\begin{cases} X''(x) + \left(k_x^2 - \dfrac{\gamma x^2}{2}\right) X(x) = 0, \\ Y''(y) + \left(k_y^2 - \dfrac{\gamma y^2}{2}\right) Y(y) = 0, \\ Z''(z) + \left(k_z^2 - \dfrac{\gamma z^2}{2}\right) Z(z) = 0, \end{cases} \tag{V.68}$$

dove $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Studiamo ora una delle equazioni in una variabile. Ponendo $X(x) = e^{-cx^2}\phi(x)$ per $c = \sqrt{\gamma/8}$, l'equazione $X''(x) + [k_x^2 - (\gamma x^2/2)]X(x) = 0$ si riduce all'equazione

$$\phi''(x) - 4cx\phi'(x) + (k_x^2 - 2c)\phi(x) = 0. \tag{V.69}$$

Sostituendo $\phi(x) = x^\alpha \sum_{s=0}^\infty c_s x^s$, otteniamo

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[(\alpha + s)(\alpha + s - 1)c_s + \{(k_x^2 - 2c) - 4c(\alpha + s - 2)\}c_{s-2}\right] x^{\alpha+s-2} = 0, \tag{V.70}$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Scegliendo $\alpha = 0$, troviamo $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}} = \frac{4c(s - 2) - (k_x^2 - 2c)}{s(s - 1)}, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n = 0, 2, 4, \cdots$ se $k_x^2 = 2c(2n + 1)$. Scegliendo $\alpha = 1$, troviamo $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}} = \frac{4c(s - 1) - (k_x^2 - 2c)}{s(s + 1)}, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n = 1, 3, 5, \cdots$ se $k_x^2 = 2c(2n+1)$. Insieme troviamo le seguenti soluzioni $X_n(x) = \phi_n(x)e^{-cx^2}$, dove $\phi_n(x)$ è un polinomio di grado $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ e $k_x^2 = 2c(2n + 1)$. Raccogliendo X, Y e Z risulta

$$\begin{cases} k^2 = 2c(2n + 3), & n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \\ \psi(x, y, z) = e^{-c(x^2+y^2+z^2)}\phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y)\phi_{n_3}(z), \end{cases} \tag{V.71}$$

dove $n = n_1 + n_2 + n_3$.

c. Analisi dei polinomi. Sostituendo $z = x\sqrt{2c}$ e $v(z) = \phi(x)$ si arriva all'equazione differenziale di Hermite (IV.84). Quindi i polinomi $\phi_n(x)$ nella (V.71) sono proporzionali a $H_n(x\sqrt{2c})$, dove H_n è il poinomio di Hermite di grado n. Vale la relazione d'ortogonalità [vedi la (IV.86)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x\sqrt{2c})H_m(x\sqrt{2c})e^{-2cx^2}\,dx = \frac{2^n(n!)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}\,\delta_{n,m},$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

I polinomi $w_m(t)$ ($m = n - l = 0, 1, 2, \ldots$) soddisfano l'equazione differenziale

$$tw''_m(t) + (l + \frac{3}{2} - t)w'_m(t) + mw_m(t) = 0.$$

Quest'ultima equazione coincide con l'equazione differenziale di Laguerre per $\alpha = l + \frac{1}{2}$ [vedi la (IV.94)]. Quindi $w_m(t)$ è proporzionale al polinomio di Laguerre $L_m^{(l+\frac{1}{2})}(t)$. In altre parole,

$$\phi_{l,n}(r) = \text{cost.}r^l\,L_{n-l}^{(l+\frac{1}{2})}(2cr^2).$$

Calcoliamo ora il numero N_n di autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti allo stesso livello di energia, cioè allo stesso intero $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dalla derivazione in coordinate cartesiane segue che N_n è uguale al numero di punti (n_1, n_2, n_3) con coordinate intere non negative per cui $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Dalla derivazione in coordinate sferiche segue che

$$N_n = \begin{cases} \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+ : n_1 + n_2 + n_3 = n\} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \\ \displaystyle\sum_{\substack{l=0,1,\ldots,n \\ n-l \text{ pari}}} (2l+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{cases}$$

dove ci rendiamo conto del fatto che ad ogni $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ corrispondono $2l + 1$ autofunzioni linearmente indipendenti con lo stesso livello di energia.

5.3 Atomo d'idrogeno

In tal caso $V(r) = -e^2/r$, dove e è la carica dell'elettrone. Ponendo $\lambda = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$ (cioè, richiedendo che l'energia sia negativa), l'equazione di Schrödinger (V.52) ha la seguente forma:

$$S''(r) + \left(-\kappa^2 + \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)S(r) = 0, \tag{V.72}$$

dove $l=0,1,2,\cdots$. Sostituendo $S(r)=e^{-\kappa r}w(r)$ otteniamo

$$w''(r)-2\kappa w'(r)+\left(\frac{e^2}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)w(r)=0. \tag{V.73}$$

Sostituendo ora $w(r)=r^\alpha\sum_{s=0}^\infty c_s r^s$ si ottiene

$$\sum_{s=0}^\infty\left[\{(\alpha+s)(\alpha+s-1)-l(l+1)\}c_s+\{e^2-2\kappa(\alpha+s-1)\}c_{s-1}\right]r^{\alpha+s-2}=0. \tag{V.74}$$

Osserviamo che il termine costante nella (V.74) coincide con $(\alpha-l-1)(\alpha+l)c_0$. Scegliendo $\alpha=l+1$ (escludendo $\alpha=-l$) otteniamo

$$\frac{c_s}{c_{s-1}}=\frac{2\kappa(s+l)-e^2}{s(s+2l+1)},\qquad s=1,2,3,\cdots. \tag{V.75}$$

Per produrre soluzioni polinomiali richiediamo che $\kappa=(e^2/2n)$ per $n=l+1,l+2,\cdots$.[6] In tal caso risulta $c_{n-l}=c_{n+1-l}=\cdots=0$; dunque $w(r)=r^{l+1}v(r)$, dove $v(r)$ è un polinomio in r di grado $n-l-1$. In altre parole,

$$\begin{cases}\kappa_n^2=-\dfrac{e^4}{4n^2}, & n=l+1,l+2,\cdots,\\ \psi(r,\theta,\varphi)=r^{l+1}e^{-e^2r/2n}\,v_{l,n-l-1}(r)Y_l^m(\theta,\varphi), & m=-l,-l+1,\cdots,l.\end{cases} \tag{V.76}$$

Ponendo $w(r)=r^{l+1}v(r)$, $t=2\kappa r$, $e^2=2\kappa n$ e $\tilde v(t)=v(r)$, otteniamo

$$t\,\tilde v''(t)+(2l+2-t)\tilde v'(t)+(n-l-1)\tilde v(t)=0. \tag{V.77}$$

Sostituendo $x\mapsto t$, $\alpha\mapsto 2l+1$ e $n\mapsto n-l-1$ nell'equazione differenziale di Laguerre si arriva alla (V.77). Dunque $\tilde v(t)$ è proporzionale a $L_{n-l-1}^{(2l+1)}(t)$. In altre parole,

$$\begin{cases}E_n=-\kappa_n^2=-\dfrac{e^4}{4n^2}, & n=l+1,l+2,\cdots,\\ \psi(r,\theta,\varphi)=\text{cost.}r^{l+1}e^{-e^2r/2n}L_{n-l-1}^{(2l+1)}\!\left(\dfrac{e^2r}{n}\right)Y_l^m(\theta,\varphi), & m=-l,-l+1,\cdots,l,\end{cases} \tag{V.78}$$

dove $n=1,2,3,\ldots$, $l=0,1,\ldots,n-1$ e $m=-l,-l+1,\ldots,l$.

Osserviamo che le energie $E_n=-(e^2/2n^2)$ degli stati limite dell'idrogeno vengono determinate dall'intero $n\in\mathbb{N}$. Ad ogni $n\in\mathbb{N}$ corrispondono $n-1$

[6] Si pone $n=s+l$, dove $s=1,2,\ldots$ e $l=0,1,2,\ldots$. Quindi $n=1,2,3,\ldots$ e $l=0,1,\ldots,n-1$.

valori di l ($l = 0, 1, \dots, n-1$) e ad ogni tale l $2l+1$ valori di m ($m = -l, \dots, l$). Quindi ad ogni $n \in \mathbb{N}$ corrispondono

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

valori di (l, m) ($l, m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l < n$). In altre parole, per $E = -e^4/4n^2$ l'equazione di Schrödinger con potenziale $V(r) = -(e^2/r)$ ha n^2 soluzioni linearmente indipendenti in $L_2(\mathbb{R}^3)$.

Capitolo VI

TRASFORMATA DI FOURIER E DISTRIBUZIONI

Nella prima parte di questo capitolo introduciamo la trasformata di Fourier e calcoliamo la funzione di Green dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$.

1 Trasformata di Fourier

1.1 Trasformata di Fourier negli spazi L_1 e L_2.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} F[f](\xi) = \int f(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx$ è la norma L_1 di f. In tal caso si definisce una funzione

$$\xi \stackrel{\hat{f}}{\mapsto} F[f](\xi)$$

su $\mathbb{R}^n$ che si chiama la *trasformata di Fourier* della f. Dal teorema della convergenza dominata[1] segue che $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione VI.1 *Sia $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \to +\infty$.*[2]

[1]Teorema della convergenza dominata (di Lebesgue): Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni misurabili tali che $f_n(t) \to f(t)$ per quasi ogni t, $|f_n(t)| \leq g(t)$ per quasi ogni t e $\int g(t)\, dt < +\infty$. Allora $\lim_{n\to\infty} \int f_n(t)\, dt = \int f(t)\, dt$.

[2]La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Dimostrazione. La continuità di $F[f](\xi)$ al variare di ξ segue dal teorema della convergenza dominata (infatti, dal Lemma 6.9.1 in [4], Vol. 2). La seconda parte segue approssimando $(\operatorname{Re} f)^{\pm}$ e $(\operatorname{Im} f)^{\pm}$ da una successione crescente di funzioni semplici sommabili e applicando il teorema di Beppo-Levi.[3] $\square$

Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, siano $(\cdot,\cdot)_c$ il prodotto scalare complesso di $L_2(\mathbb{R}^n)$ e $(\cdot,\cdot)$ quello reale. Allora $F[f], F[g] \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. In tal caso risulta per $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(F[f], g) &= \int \left[\int f(x) e^{-i(x,\xi)}\,dx\right] g(\xi)\,d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi) e^{-i(\xi,x)}\,d\xi\right] dx = (f, F[g]);\end{aligned} \tag{VI.1}$$

$$\begin{aligned}(F[f], g)_c &= \int \left[\int f(x) e^{-i(x,\xi)} dx\right] \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \int f(x) \overline{\left[\int g(\xi) e^{i(\xi,x)} d\xi\right]}\, dx = (f, F[g](-\xi))_c,\end{aligned} \tag{VI.2}$$

dove il secondo passaggio è giustificato grazie al teorema di Fubini.[4]

Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Allora il teorema di Fubini dimostra che il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x-y)\,dy = \int f(x-y) g(y)\,dy$$

conduce ad una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dal teorema di Fubini segue che

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h),$$

dove $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x - y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned}F[f * g](\xi) &= \int \left(\int f(y) g(x-y)\,dy\right) e^{-i(x,\xi)}\,dx \\ &= \int \left(\int f(y) e^{-i(y,\xi)} g(z) e^{-i(z,\xi)}\,dy\right) dz = F[f](\xi) F[g](\xi).\end{aligned} \tag{VI.3}$$

[3] Teorema della convergenza monotona (di Beppo-Levi): Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative tali che $f_n(t) \to f(t)$ per quasi ogni t. Allora $\lim_{n\to\infty} \int f_n(t)\,dt = \int f(t)\,dt$.

[4] Sia $f(t,s)$ una funzione misurabile di due variabili. Supponiamo che almeno uno degli integrali ripetuti $\int(\int |f(t,s)|\,ds)dt$ e $\int(\int |f(t,s)|\,dt)ds$ sia convergente. Allora si può scambiare l'ordine di integrazione: $\int(\int f(t,s)\,ds)dt = \int(\int f(t,s)\,dt)ds$.

In altre parole, la trasformata di Fourier manda l'algebra $L_1(\mathbb{R}^n)$ dove la moltiplicazione è il prodotto di convoluzione, nell'algebra $C(\mathbb{R}^n)$ dove la moltiplicazione è il prodotto algebrico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema VI.2 (*di Plancherel*). *Sia $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |F[f](\xi)|^2 \, d\xi = \int |f(x)|^2 \, dx. \tag{VI.4}$$

Inoltre, F ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa la (VI.4) *per ogni $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ed è un operatore invertibile su $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$ (vedi [4], Teorema 2.5.2, Vol. 2):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (2\pi)^{-1} F[f](-n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F[f](-n)|^2. \end{aligned}$$

Siccome $c_n[e^{-ixt} f] = (2\pi)^{-1} F[f](n + t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |F[f](n + t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F[g](\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\xi)|^2\, d\xi.\end{aligned}$$

Se $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (VI.4) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ che soddisfa (VI.4). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ di $L_2(\mathbb{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ di $L_2(\mathbb{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L_2(\mathbb{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbb{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. $\square$

Corollario VI.3 *Sia $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{i(x,\xi)}\, dx. \tag{VI.5}$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Allora per $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \overline{g}) = (f, F[\overline{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Dalla (VI.4) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n}(F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n}(f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (VI.5). $\square$

Dal Corollario VI.3 si vede subito che $(2\pi)^{-n/2}F$ è un operatore lineare unitario sullo spazio di Hilbert complesso $L_2(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione dell'operatore lineare $(2\pi)^{-n/2}F$ ad una funzione $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ non ne cambia la norma L_2.

1.2 Funzioni Generalizzate di Crescita Lenta

Uno dei metodi più efficaci di risoluzione dei problemi della fisica matematica è il metodo delle trasformate di Fourier. Nel prossimo paragrafo sarà esposta la teoria della trasformata di Fourier per le cosidette funzioni generalizzate di crescita lenta (distribuzioni rinvenute). Per questa ragione si deve prima studiare la classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

1.2.a Spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{S}$

Riportiamo nell'insieme delle funzioni fondamentali $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tutte le funzioni della classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ decrescenti, per $|x| \to +\infty$, con tutte le derivate più rapidamente di ogni potenza non negativa di $1/|x|$. Definiamo la convergenza in $\mathcal{S}$ come segue: la successione delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, da $\mathcal{S}$ converge ad una funzione $\varphi \in \mathcal{S}$, cioè $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, se, per tutti i valori dei moltiindici[5] α e β, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) - x^\beta D^\alpha \varphi(x) \right| = 0.$$

Le operazioni di derivazione $D^\beta\varphi(x)$ e di sostituzione lineare non singolare di variabili $\varphi(Ay+b)$ (dove $\det A \neq 0$) sono continue da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Questo segue direttamente dalla definizione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

D'altro canto, la moltiplicazione per una funzione infinitamente derivabile può far uscire all'esterno dell'insieme $\mathcal{S}$, per esempio $e^{-|x|^2}e^{|x|^2} = 1 \notin \mathcal{S}$.

Supponiamo che una funzione $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cresca all'infinito insieme con tutte le derivate successive non più rapidamente del polinomio

$$|D^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{m\alpha}. \tag{VI.6}$$

Indichiamo con θ_M l'insieme di queste funzioni.

L'operazione di moltiplicazione per una funzione $a \in \theta_M$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Infatti, dalla disuguaglianza (VI.6) segue che, se $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha $a\varphi \in \mathcal{S}$, e se $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, per tutti i valori di α e β si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{R}^n} x^\beta [D^\alpha(a\varphi_k)](x) = 0,$$

cioè $a\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$.

1.2.b Spazio delle funzioni generalizzate di crescita lenta $\mathcal{S}'$

Si dice *funzione generalizzata di crescita lenta* ogni funzionale lineare continuo sullo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni fondamentali. Denotiamo $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni generalizzate di crescita lenta. È evidente che $\mathcal{S}'$ è un insieme lineare. Definiamo come *debole* la convergenza di una successione di funzionali: una successione di funzioni generalizzate $f_1, f_2, \cdots$, appartenenti a $\mathcal{S}'$, converge ad una funzione generalizzata $f \in \mathcal{S}'$, cioè $f_k \to f$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$ se, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ per $k \to \infty$. L'insieme lineare $\mathcal{S}'$ dotato di convergenza debole è detto spazio $\mathcal{S}'$ delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

[5] Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, allora $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ e $D^\alpha\varphi(x) = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} \varphi(x)$. Secondo il teorema di Schwartz, l'ordine di derivazione parziale non importa. Inoltre, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

1.2.c Esempi di funzioni generalizzate di crescita lenta

(a) Se $f(x)$ è una funzione localmente sommabile di crescita lenta all'infinito, cioè per un certo $m \geq 0$,

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}\, dx < +\infty,$$

questa funzione definisce un funzionale regolare f appartenente a $\mathcal{S}'$ in conformità con la regola

$$(f,\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ma non tutte le funzioni localmente sommabili definiscono una funzione generalizzata di crescita lenta, per esempio, $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. D'altro canto, non tutte le funzioni localmente sommabili appartenenti a $\mathcal{S}'$ sono di crescita lenta. Per esempio, la funzione $(\cos e^x)' = -e^x \operatorname{sen} e^x$ non è di crescita lenta, eppure definisce una funzione generalizzata da $\mathcal{S}'$ mediante la formula

$$((\cos e^x)',\varphi) = -\int (\cos e^x)\varphi'(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

(b) La *funzione Delta di Dirac* è il funzionale lineare

$$f \overset{\delta}{\mapsto} f(0), \qquad f \in \mathcal{S}.$$

(c) La derivata $D^\alpha\delta$ della funzione Delta di Dirac appartiene a $\mathcal{S}'$. Infatti, il terzo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha\delta,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\delta, D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}[D^\alpha\varphi](0)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(d) Se $f \in \mathcal{S}'$, allora ogni derivata $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che l'operazione di derivazione $D^\alpha\varphi$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha f,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(e) Se $f \in \mathcal{S}'$ e $\det A \neq 0$, si ha $f(Ay+b) \in \mathcal{S}'$. Infatti, dato che l'operazione di trasformazione $\varphi[A^{-1}(x-b)]$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(f(Ay+b),\varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

1.3 Trasformata di Fourier delle funzioni generalizzate di crescita lenta

La proprietà rimarchevole della classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

1.3.a Trasformazione di Fourier delle funzioni fondamentali in $\mathcal{S}$

Visto che le funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$ sono sommabili in $\mathbb{R}^n$, su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x)e^{-i(\xi,x)}\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ, è limitata e continua in $\mathbb{R}^n$. La funzione fondamentale φ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (-ix)^\alpha \varphi(x)e^{-i(\xi,x)}\,dx = F[(-ix)^\alpha\varphi](\xi), \tag{VI.7}$$

da cui segue che $F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\alpha\varphi$ e quindi

$$\begin{aligned} F[D^\beta\varphi](\xi) &= \int \left(D^\beta\varphi(x)\right) e^{-i(\xi,x)}\,dx = (-1)^{|\beta|}\int \varphi(x)D^\beta\left(e^{-i(\xi,x)}\right)dx \\ &= (-1)^{|\beta|}(-i\xi)^\beta F[\varphi](\xi) = (i\xi)^\beta F[\varphi](\xi). \end{aligned} \tag{VI.8}$$

Infine, dalle formule (VI.7) e (VI.8) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = \xi^\beta F[(-ix)^\alpha\varphi](\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}F[D^\beta(x^\alpha\varphi)](\xi). \tag{VI.9}$$

Dall'uguaglianza (VI.9) segue che per tutti gli α,β i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \le \int |D^\beta(x^\alpha\varphi)|\,dx. \tag{VI.10}$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su $\mathbb{R}^n$, allora, siccome

$\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{VI.11}$$

dove

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}F[\psi](-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(-\xi)e^{-i(\xi,x)}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \tag{VI.12}$$

Dalle formule (VI.11) e (VI.12) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$.[6] Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ed inoltre in modo univoco.

Lemma VI.4 *La trasformazione di Fourier F è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in $\mathcal{S}$. Allora, applicando la (VI.10) alle funzioni φ_k, si ottiene per tutti gli α e β

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\le \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|\,dx \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha\varphi_k)|(1+|x|)^{n+1}\int \frac{dy}{(1+|y|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Il lemma è dimostrato. □

La trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

1.3.b Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathcal{S}'$

Assumiamo l'uguaglianza (VI.1) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque funzione generalizzata di crescita lenta f:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad f \in \mathcal{S}',\ \varphi \in \mathcal{S}. \tag{VI.13}$$

[6] Se $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ e $F[f] = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque. Per mancanza di una descrizione della classe delle trasformate di Fourier delle funzioni in $L_1(\mathbb{R}^n)$, questa proprietà non si dimostra tanto facilmente.

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale (evidentemente, lineare) su $\mathcal{S}$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Per la Proposizione VI.1, $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \to 0$ per $k \to \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$. In questo caso, in base alla (VI.13), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1}:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \qquad f \in \mathcal{S}'. \tag{VI.14}$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F, cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathcal{S}'. \tag{VI.15}$$

Infatti, dalle (VI.11)-(VI.14) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
(F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f](-\xi), F[\varphi]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\
&= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi),
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}$ al sesto ed al settimo passaggio.[7] Ora seguono le formule (VI.15).

Dalle formule (VI.15) deriva che ogni funzione generalizzata f appartenente a $\mathcal{S}'$ è la trasformata di Fourier della funzione generalizzata $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathcal{S}'$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$ in modo biunivoco e continuo.

[7]Si noti che $\mathcal{S} \subseteq L_2(\mathbb{R}^n)$.

Supponiamo che $f = f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{VI.16}$$

Come nella Proposizione VI.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, di modo che la formula (VI.16) definisce realmente una funzione generalizzata $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{-i(\xi,x_0)}. \tag{VI.17}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x - x_0)], \varphi) &= (\delta(x - x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) \\ &= \int \varphi(\xi) e^{-i(\xi,x_0)}\, d\xi = (e^{-i(\xi,x_0)}, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Ponendo nella (VI.17) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \tag{VI.18}$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{VI.19}$$

1.3.c Proprietà della trasformazione di Fourier

(a) **Derivazione della trasformata di Fourier**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(-ix)^\alpha f]. \tag{VI.20}$$

Infatti, utilizzando la (VI.8), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, F[D^\alpha \varphi]) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f, (ix)^\alpha F[\varphi]) = ((-ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(-ix)^\alpha f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (VI.20).

In particolare, ponendo nella (VI.20) $f = 1$ ed utilizzando la formula (VI.19), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n \, i^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \tag{VI.21}$$

(b) **Trasformata di Fourier della derivata**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[D^\beta f] = (i\xi)^\beta F[f]. \tag{VI.22}$$

Infatti, utilizzando la formula (VI.7), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}&(F[D^\beta f], \varphi) = (D^\beta f, F[\varphi]) = (-1)^{|\beta|}(f, D^\beta F[\varphi]) \\ &= (-1)^{|\beta|}(f, F[(-i\xi)^\beta \varphi]) = (-1)^{|\beta|}(F[f], (-i\xi)^\beta \varphi) = ((i\xi)^\beta F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (VI.22).

(c) **Trasformata di Fourier di una traslazione**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i(x_0,x)} F[f]. \tag{VI.23}$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}&(F[f(x - x_0)], \varphi) = (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x + x_0)) \\ &= (f, F[\varphi e^{-i(x_0,\xi)}]) = (F[f], e^{-i(x_0,\xi)}\varphi) = (e^{-i(x_0,\xi)} F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (VI.23).

(d) **Traslazione della trasformata di Fourier**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0,x)} f](\xi). \tag{VI.24}$$

Infatti, utilizzando la formula (VI.23), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}&(F[f](\xi + \xi_0), \varphi) = (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) \\ &= (f, e^{i(\xi_0,x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0,x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0,x)} f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (VI.24).

(e) **Trasformata di Fourier di similitudine (con riflessione)**. Se $f \in \mathcal{S}'$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{VI.25}$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&(F[f(cx)], \varphi) = (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right) \\
&= \frac{1}{|c|^n}\left(f, \int \varphi(\xi) e^{-i(\frac{x}{c},\xi)}\, d\xi\right) = (f, \int \varphi(c\xi') e^{-i(x,\xi')}\, d\xi') = (f, F[\varphi(c\xi)]) \\
&= (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi\right).
\end{aligned}$$

2 Funzioni di Green

Nel Cap. IV abbiamo introdotto le funzioni di Green dei problemi di Sturm-Liouville unidimensionali. Sotto l'ipotesi che zero non sia autovalore, abbiamo convertito il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}
Lu = -(pu')' + qu = \lambda u + f, \qquad & x \in (0, L), \\
h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, & \\
H_1 u(L) + H_2 u(L) = 0, &
\end{aligned}$$

in un'equazione integrale

$$\begin{gathered}
u - \lambda G u = G f, \\
u(x) - \lambda \int_0^L \mathcal{G}(x, y) u(y)\, dy = \int_0^L \mathcal{G}(x, y) f(y)\, dy.
\end{gathered}$$

Si vede subito (in modo non molto rigoroso) che per $\lambda = 0$ e $f(x) = \delta(x - x_0)$ la soluzione

$$u(x) = \mathcal{G}(x, x_0).$$

Quindi la funzione di Green potrebbe essere considerata come la soluzione del problema di Sturm-Liouville (per $\lambda = 0$) se il termine non omogeneo f è una funzione delta di Dirac.

In questo paragrafo introdurremo una generalizzazione della funzione di Green ad alcuni problemi di Sturm-Liouville multidimensionali.

2.1 Equazione di Laplace-Poisson

Consideriamo l'equazione di Laplace-Poisson in n variabili

$$\Delta \mathcal{E}_n = -\delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{VI.26}$$

Per calcolare la sua soluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ applichiamo la trasformata di Fourier. Poichè $\Delta = \sum_{j=1}^n D^{\alpha_j}$ per $\alpha_j = (0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0)$ con il 2 al j-esimo posto, si ottiene dalla (VI.26)

$$|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n](\xi) = 1, \tag{VI.27}$$

e quindi

$$F[\mathcal{E}_n](\xi) = \begin{cases} \wp\dfrac{1}{|\xi|^2}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{|\xi|^2}, & n \geq 3. \end{cases} \tag{VI.28}$$

Per $n \geq 3$ la (VI.28) is valida, poichè $1/|\xi|^2$ è localmente sommabile in $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 3$.

Per $n = 2$ bisogna riinterpretare il rapporto $1/|\xi|^2$, poichè quest'ultima funzione ha una singolarità non sommabile all'origine. In tal caso si definisce il valore principale di Cauchy (inglese: Cauchy's principal value)

$$\left(\wp\frac{1}{|\xi|^2}, \varphi\right) = \int_{|\xi|<1} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{|\xi|^2}\, d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\, d\xi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Per dimostrare che $\wp|\xi|^{-2}$ è veramente la soluzione della (VI.26) per $n = 2$, si calcola

$$\begin{aligned} \left(|\xi|^2\wp\frac{1}{|\xi|^2}, \varphi\right) &= \int_{|\xi|<1} \frac{|\xi|^2\varphi(\xi) - [|\xi|^2\varphi(\xi)]_{\xi=0}}{|\xi|^2}\, d\xi \quad + \int_{|\xi|\geq 1} \frac{|\xi|^2\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\, d\xi \\ &= \int \varphi(\xi)\, d\xi = (1, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Quindi $|\xi|^2\wp|\xi|^{-2} = 1$ in $\mathcal{S}$.

Teorema VI.5 *Si ha*

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & n = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi|x|}, & n = 3, \\ \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{VI.29}$$

dove σ_n è la misura di S^{n-1}.[8]

---

[8]Siano V_n e σ_n le misure della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$ e della sua superficie. In tal caso $V_n = V_{n-1}B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ in termini della funzione beta di Eulero $B(p, q) = (\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q))$. Inoltre, $V_n = \int_0^1 r^{n-1}\sigma_d\, dr = \sigma_n/n$. Quindi $\sigma_n = \sigma_{n-1}B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) = 2\,\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$. Ovviamente $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$ e $V_3 = (4\pi/3)$ e dunque $\sigma_2 = 2\pi$ e $\sigma_3 = 4\pi$.

Dimostrazione. Ci limitiamo ai casi $n = 3$ e $n = 2$.

Presentiamo prima la dimostrazione per $n = 3$. Infatti, per $n = 3$ e $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha

$$F^{-1}\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{1}{4\pi|x|}. \tag{VI.30}$$

Considerando che la funzione $1/|\xi|^2$ è localmente sommabile in $\mathbb{R}^3$, per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ otteniamo la seguente successione di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\left(F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right], \varphi\right) = \left(\frac{1}{|\xi|^2}, F^{-1}[\varphi]\right) = \int \frac{1}{|\xi|^2} F^{-1}[\varphi]\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} \frac{1}{|\xi|^2} \int \varphi(x) e^{i(x,\xi)}\, dx\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R\to\infty} \int \varphi(x) \int_{|\xi|<R} \frac{e^{i(x,\xi)}}{|\xi|^2}\, d\xi\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R\to\infty} \int \varphi(x) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{i|x|\rho\cos\theta}}{\rho^2} \rho^2\, d\psi \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\rho\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R\to\infty} \int \varphi(x) \int_0^R \int_{-1}^1 e^{i|x|\rho\mu}\, d\mu\, d\rho\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \lim_{R\to\infty} \int \frac{\varphi(x)}{|x|} \int_0^R \frac{\operatorname{sen}(|x|\rho)}{\rho}\, d\rho\, dx.
\end{aligned} \tag{VI.31}$$

Visto che

$$|x| \left| \int_R^\infty \frac{\operatorname{sen}(|x|\rho)}{\rho}\, d\rho \right| = \left| \frac{\cos(|x|R)}{R} - \int_R^\infty \frac{\cos(|x|\rho)}{\rho^2}\, d\rho \right| \leq \frac{1}{R} + \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R},$$

è possibile il passaggio al limite per $R \to \infty$ sotto il segno dell'integrale nell'ultimo termine delle uguaglianze (VI.31). Tenuto in conto che

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(|x|\rho)}{\rho}\, d\rho = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}, \qquad |x| \neq 0,$$

in definitiva, si ottiene

$$\left(F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right], \varphi\right) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\varphi(x)}{|x|^2} |x| \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(|x|\rho)}{\rho}\, d\rho = \int \frac{\varphi(x)}{4\pi|x|}\, dx,$$

da cui segue la formula (VI.30).

Consideriamo ora il caso $n = 2$. Per $n = 2$ e $\varphi \in \mathcal{S}$ facciamo i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned}
&\left(F^{-1}\left[\wp\frac{1}{|\xi|^2}\right],\varphi\right)=\left(\wp\frac{1}{|\xi|^2},F^{-1}[\varphi]\right)\\
&=\int_{|\xi|<1}\frac{F^{-1}[\varphi](\xi)-F^{-1}[\varphi](0)}{|\xi|^2}\,d\xi+\int_{|\xi|>1}\frac{F^{-1}[\varphi](\xi)}{|\xi|}\,d\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\left[\int\limits_{|\xi|<1}\frac{1}{|\xi|^2}\int\varphi(x)\left[e^{i(\xi,x)}-1\right]\,dxd\xi+\int\limits_{|\xi|>1}\frac{1}{|\xi|^2}\int\varphi(x)e^{i(\xi,x)}\,dxd\xi\right]\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\left[\int_0^1\frac{1}{r}\int\varphi(x)\int_0^{2\pi}\left(e^{ir|x|\cos\theta}-1\right)\,d\theta dxdr\right.\\
&\left.+\int_1^\infty\frac{1}{r}\int\varphi(x)\int_0^{2\pi}e^{ir|x|\cos\theta}\,d\theta dxdr\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^1\frac{1}{r}\int\varphi(x)[J_0(r|x|)-1]\,dxdr+\int_1^\infty\frac{1}{r}\int\varphi(x)J_0(r|x|)\,dxdr\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\int\varphi(x)\left[\int_0^1\frac{J_0(r|x|)-1}{r}\,dr+\int_1^\infty\frac{J_0(r|x|)}{r}\,dr\right]dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\int\varphi(x)\left[\int_0^{|x|}\frac{J_0(u)-1}{u}\,du+\int_{|x|}^\infty\frac{J_0(u)}{u}\,du\right]dx\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int\varphi(x)(C_0+\ln(|x|))\,dx,
\end{aligned}$$

da cui segue l'uguaglianza

$$F^{-1}\left(\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right)=\frac{-C_0+\ln\left(\dfrac{1}{|x|}\right)}{2\pi},$$

dove

$$C_0=\int_0^1\frac{1-J_0(u)}{u}\,du-\int_1^\infty\frac{J_0(u)}{u}\,du.$$

Siccome la costante $C_0/2\pi$ soddisfa all'equazione di Laplace, si può traslasciare. Quindi $(1/2\pi)\ln(1/|x|)$ è una soluzione fondamentale della (VI.26). $\square$

Consideriamo ora l'equazione di Poisson

$$\Delta u=-f(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

dove $f\in\mathcal{S}'$. In tal caso la trasformazione di Fourier conduce all'equazione

$$|\xi|^2\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi),\qquad \xi\in\mathbb{R}^n,\tag{VI.32}$$

dove $\hat{f} = \mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}'$. Quindi

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

rappresenta una distribuzione in $\mathcal{S}'$. Applicando infine la trasformata di Fourier inversa si arriva ad una soluzione $u \in \mathcal{S}'$. Si vede subito che $f \in \mathcal{S}$ con $\hat{f}(0) \neq 0$ (cioè, una f di classe C^∞ con decadimento rapido all'infinito per la f e tutte le sue derivate parziali consecutive, ma con $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \neq 0$) conduce ad una soluzione u distribuzionale. In tal caso non esiste alcuna soluzione $u \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'$, poichè si avrebbe $\hat{u}(0)$ finito, il quale contraddice la (VI.32). Per $f \in \mathcal{S}$ qualsiasi (ma anche per f continua con decadimento abbastanza rapido all'infinito) si ha

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(x-y) f(y)\,dy, \tag{VI.33}$$

grazie alla linearità dell'equazione di Poisson.

Per $n = 2$ risulta

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\,dy.$$

Per $n = 3$ risulta

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy. \tag{VI.34}$$

Sia ora G un aperto limitato semplicemente connesso in $\mathbb{R}^n$ tale che la sua superficie ∂G è regolare a tratti. In tal caso, cerchiamo la soluzione generale $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ dell'equazione di Poisson

$$\Delta u = -f(x), \qquad x \in G, \tag{VI.35}$$

dove $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$. Estendendo la f fuori di $\overline{G}$ (come $f(x) = 0$ per $x \notin \overline{G}$) si ottiene l'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$ per qualche $f \in \mathcal{S}'$. Dalla (VI.33) segue che la soluzione generale dell'equazione di Poisson in G ha la forma

$$u(x) = v(x) + \int_G \mathcal{E}_n(x-y) f(y)\,dy, \tag{VI.36}$$

dove $\Delta v = 0$ in G.

Si può dimostrare che il massimo e minimo di una *funzione armonica* v (cioè, una soluzione $v \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ dell'equazione di Laplace $\Delta v = 0$) si assumono sulla frontiera ∂G. Ciò implica che una funzione armonica che si annulla sulla frontiera del dominio G si annulla dappertutto. Quindi per ogni

$f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ e per ogni $g \in C(\partial G)$ esiste un'unica $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ tale che $\Delta u = -f$ in G e $u|_{\partial G} = g$.

Prima di dimostrare il principio del massimo, facciamo alcuni calcoli. Sia G una regione limitata in $\mathbb{R}^n$ e supponiamo la sua frontiera S regolare a tratti. Applicando la prima formula di Green per $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v = 1$ risulta

$$\int_G \Delta u \, dx = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS,$$

dove n è il versore normale esterno. Quindi per una funzione armonica $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ risulta

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0. \tag{VI.37}$$

Sia $x \in G \subset \mathbb{R}^n$. Utilizzando la seconda formula di Green e l'identità $\Delta_y \mathcal{E}_n(x-y) = -\delta(x-y)$, risulta per $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ armonica:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_G \delta(x-y) u(y) \, dy = -\int_G (\Delta_y \mathcal{E}_n(x-y)) \, u(y) \\ &= -\int_G \{(\Delta_y \mathcal{E}_n(x-y)) \, u(y) - \mathcal{E}_n(x-y) \Delta_y u\} \, dy \\ &= -\int_S \left(u \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{E}_n(x-y) - \mathcal{E}_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) dS_y, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dall'armonicità della u. Sostituendo la (VI.29) si trovano le identità

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} \displaystyle\int_S \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) dS_y, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_S \left(\left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y, & n = 2. \end{cases}$$

Adesso consideriamo un dominio sferico S_R di raggio R e centro l'origine. Sia $x = 0$. Sia S_R la superficie della sfera di questa sfera. Allora

$$u(0) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} \displaystyle\int_{S_R} \left(\frac{1}{R^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y|^{n-2}} \right) dS_y, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{S_R} \left(\left(\ln \frac{1}{R} \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y|} \right) dS_y, & n = 2. \end{cases}$$

Utilizzando la (VI.37) otteniamo

$$u(0) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n} \displaystyle\int_{S_R} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y|^{n-2}} \, dS_y = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(y) \, dS_y, & n \geq 3 \\ \dfrac{-1}{2\pi} \displaystyle\int_{S_R} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y|} \, dS_y = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} u(y) \, dy, & n = 2. \end{cases}$$

Siccome $\sigma_n R^{n-1}$ (per $n \geq 3$) oppure $2\pi R$ (per $n = 2$) è la misura di S_R, si ha

$$\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} [u(y) - u(0)] \, dS_y = 0, \qquad n \geq 2.$$

Essendo $\sigma_n R^{n-1}$ la misura della ipersfera di raggio R in $\mathbb{R}^n$, non si può avere $u(y) \leq u(0)$ o $u(y) \geq u(0)$ per quasi ogni $y \in S_R$ per u non costante. In altre parole, se u ha un punto di massimo o di minimo (relativo) all'interno di G, allora u deve essere costante in ogni palla intorno a quel punto di massimo o minimo contenuta in G.

Teorema VI.6 [*principio del massimo*]. *Se una funzione $u(x) \not\equiv$* costante *è armonica in una regione limitata G e appartiene a $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, questa funzione non può assumere i suoi valori massimo e minimo in G.*

Dimostrazione. Sia $x \in G$ un punto di massimo della funzione armonica u su G. Scegliendo un dominio sferico U_1 con la sua chiusura contenuta in G, u è anche armonica su quel dominio. Grazie al ragionamente precedente la funzione u deve essere costante su quel sottodominio sferico.

Prendiamo ora due punti arbitrari $x, y \in G$ tali che u assume il suo massimo in x. Siccome G è una regione e quindi è connesso per archi, esiste una funzione continua $\varphi : [0, 1] \to G$ tale che $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$. Allora la compattezza di $[0, 1]$ conduce all'esistenza di un numero finito di palle $U_1, \ldots, U_n$ con centri $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ sulla curva $\varphi([0, 1])$ tale che $U_1, \ldots, U_n$ coprono $\varphi([0, 1])$ e $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. In tal caso segue che u assume il suo massimo nei punti $x_1, \ldots, x_n$ e quindi che u è costante in ogni palla U_j $(j = 1, \ldots, n)$. Ciò implica che $u(x) = u(y)$. In altre parole, u è costante.

Lo stesso ragiomento vale per un punto di minimo all'interno di G. $\Box$

Dal teorema precedente segue che una funzione armonica non può avere all'interno di una regione nè massimi, nè minimi locali.

Corollario VI.7 *Sia $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ una funzione armonica. Se $u(x) \equiv 0$ sulla frontiera S, si ha $u(x) \equiv 0$ in G.*

2.2 Equazione di Helmholtz

Studiamo ora l'equazione di Helmholtz

$$-(\Delta + \lambda)\mathcal{E}_n = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{VI.38}$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è una costante. Applicando la trasformata di Fourier otteniamo

$$(|\xi|^2 - \lambda)F[\mathcal{E}_n](\xi) = 1, \tag{VI.39}$$

e dunque per $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ risulta immediatamente

$$F[\mathcal{E}_n](\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 - \lambda}. \tag{VI.40}$$

Per $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ l'espressione nella (VI.40) appartiene ad $\mathcal{S}$ e quindi $\mathcal{E}_n \in \mathcal{S}$.

Il caso di maggior interesse è quello in cui $\lambda = k^2 \in [0, \infty)$. In tal caso la (VI.38) ha la forma

$$-(\Delta + k^2)\mathcal{E}_n = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{VI.41}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

Teorema VI.8 *Si ha*

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|), & n = 2, \\ \dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, & n = 3, \end{cases} \tag{VI.42}$$

dove $H_0^{(1)}$ è la funzione di Hankel di prima specie di ordine zero.

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $n = 3$. Utilizzando

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x|} = -\frac{x_j}{|x|^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|} e^{ik|x|},$$

si calcola facilmente che

$$\Delta e^{ik|x|} = \left(\frac{2ik}{|x|} - k^2 \right) e^{ik|x|}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
(\Delta + k^2) e^{ik|x|} &= e^{ik|x|} \Delta \frac{1}{|x|} + 2 \left(\nabla e^{ik|x|}, \nabla \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|x|} e^{ik|x|} \\
&= e^{ik|x|} \Delta \frac{1}{|x|} + \left(-\frac{2ik}{|x|^2} + \frac{2ik}{|x|^2} - \frac{k^2}{|x|} + \frac{k^2}{|x|} \right) e^{ik|x|} \\
&= e^{ik|x|} \Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi e^{ik|x|} \delta(x) = -4\pi \delta(x),
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'identità

$$\left(\Delta \frac{1}{|x|}, \varphi \right) = -4\pi \varphi(0) = -4\pi (\delta, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{VI.43}$$

Per dimostrare la (VI.43) esprimiamo $\Delta\varphi$ in coordinate sferiche e sfruttiamo il fatto che $\frac{1}{|x|}\Delta\psi$ è sommabile. Infatti, per $\psi \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
\left(\Delta\frac{1}{|x|},\psi\right) &= \left(\frac{1}{|x|},\Delta\psi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{1}{|x|}\Delta\psi\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dr}{r}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}^{2\pi}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi}d\theta\left[\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\pi}\right. \\
&\left.+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi)d\varphi\left(\left[r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=\varepsilon}^{\infty}-\int_{\varepsilon}^{\infty}dr\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi)d\varphi\left[r\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi(r,\theta,\varphi)\right]_{r=\varepsilon}^{\infty} \\
&= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi)d\varphi\left[r\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi(r,\theta,\varphi)\right]_{r=0}^{\infty} \\
&= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi)d\varphi\,[\psi(r,\theta,\varphi)]_{r=0}^{\infty} \\
&= -\psi(r=0)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi)d\varphi = -4\pi\psi(0).
\end{aligned}
$$

Ciò implica la (VI.43). □

La soluzione della (VI.41) in Eq. (VI.42) si comporta asintoticamente come $P(\frac{1}{|x|})e^{ik|x|}$ se $|x|\to\infty$, dove P è una funzione elementare che dipende soltanto dalla dimensione n del problema. Siccome l'equazione (VI.41) contiene k^2 anzicchè k, si aspetta l'esistenza di un'altra soluzione di tipo $P(\frac{1}{|x|})e^{-ik|x|}$. Infatti, si ha per quest'altra soluzione

$$
\overline{\mathcal{E}}_n(x) = \begin{cases} -\dfrac{i}{4}H_0^{(2)}(k|x|), & n=2, \\ \dfrac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}, & n=3, \end{cases} \tag{VI.44}
$$

dove $H_0^{(2)}$ è la funzione di Hankel di seconda specie di ordine zero.

Le soluzioni $\mathcal{E}_n(x)$ e $\overline{\mathcal{E}}_n(x)$ rappresentano onde sferiche decrescenti in $\mathbb{R}^n$. Spesso l'equazione di Helmholtz è proveniente da un'applicazione (in ottica, acustica, sismica, ecc.), dove (a) la scelta di k reale ha il significato fisico dell'assenza di assorbimento e quindi l'assorbimento viene modellizzato da una

$k \in \mathbb{C}$, e (b) l'equazione di Helmholtz si ottiene della corrispondente equazione delle onde sostituendo $u(x,t) = e^{-i\omega t}v(x)$ oppure $u(x,t) = e^{i\omega t}v(x)$. La prima scelta conduce a $k = \omega/c$ (c è la velocità dell'onda) con parte immaginaria non negativa, mentre la seconda scelta conduce ad una k con parte immaginaria non positiva. Se facciamo la prima scelta, la funzione di Green da considerare è $\mathcal{E}_n(x)$; se facciamo la seconda scelta ci vuole $\overline{\mathcal{E}}_n(x)$.

Consideriamo lo scattering di un'onda piana $e^{ik(\theta,x)}$ di direzione $\theta \in S^{n-1}$ da un ostacolo limitato (in cui la velocità della onda è diversa da 1, la sua velocità fuori dell'ostacolo). Allora bisogna risolvere l'equazione di Helmholtz (VI.41) sotto la condizione di Sommerfeld[9]

$$u(k,x,\theta) = e^{ik(\theta,x)} + A(k, \frac{x}{|x|}, \theta)\mathcal{E}_n(x)\left[1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right], \qquad |x| \to \infty, \quad \text{(VI.45)}$$

dove l'assorbimento corrisponde ad una k con parte immaginaria positiva. L'ampiezza $A(k,\theta,\theta')$ dipende da k e dalle direzioni d'arrivo θ' e partenza θ. Se si conoscono le caratteristiche fisiche dell'ostacolo, si può risolvere il cosiddetto problema diretto e calcolare l'ampiezza. Spesso si interessa di più della risoluzione del problema inverso del calcolo delle caratteristiche fisiche dell'ostacolo partendo dall'ampiezza.

3 Problemi al Contorno con Spettro Continuo

Nel Cap. IV abbiamo soltanto soltanto il problema di Sturm-Liouville unidimensionale se lo spettro consiste esclusivamente di autovalori reali di moltiplicità finita senza punti di accumulazione finiti. In questo paragrafo discutiamo alcuni problemi di Sturm-Liouville su domini illimitati dove L ha spettro continuo.

3.1 Equazione del Calore sulla Retta e la Semiretta

Consideriamo il problema a valori iniziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \qquad \text{(VI.46)}$$

[9]La (VI.45) significa che la soluzione della equazione di Helmholtz lontano dall'ostacolo si può scrivere come la superposizione dell'onda piana originale e di un'onda sferiche decrescente con un'ampiezza $A(k, \frac{x}{|x|}, \theta)$.

Applicando la trasformata di Fourier unidimensionale $u \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{u}$ otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{VI.47}$$

La soluzione del problema (VI.47) è elementare:

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2 (t-\tau)} \hat{f}(\xi, \tau) \, d\tau. \tag{VI.48}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi, t) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left[e^{-\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2 (t-\tau)} \hat{f}(\xi, \tau) \, d\tau \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x - y; t) u_0(y) \, dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x - y; t - \tau) f(y, \tau) \, du \, d\tau, \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{K}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2 t} \, d\xi = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\xi - \frac{ix}{2t}\right)^2 t} \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Consideriamo ora il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{VI.49}$$

Per risolvere la (VI.49) introduciamo la trasformata di Fourier seno

$$(\mathcal{F}_s u)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x) \sin(x\xi) \, dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \, \hat{u}(\xi), \tag{VI.50}$$

dove $u(x) = -u(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^-$ è l'estensione di u ad una funzione dispari. Si vede subito che

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\mathcal{F}_s u)(\xi) \sin(x\xi) \, d\xi. \tag{VI.51}$$

Applicando la trasformata di Fourier seno $\mathcal{F}_s$ alla (VI.49) risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_s u}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 (\mathcal{F}_s u)(\xi, t) + (\mathcal{F}_s f)(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ (\mathcal{F}_s u)(\xi, 0) = (\mathcal{F}_s u_0)(\xi), \end{cases} \tag{VI.52}$$

e ha la soluzione unica (VI.48). Dunque

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(x\xi)(\mathcal{F}_s u)(\xi,t) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(x\xi) \left[e^{-\xi^2 t}(\mathcal{F}_s u_0)(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)}(\mathcal{F}_s f)(\xi,\tau)\, d\tau \right] d\xi \\
&= \int_0^\infty \mathcal{K}_s(x,y;t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{K}_s(x,y;t-\tau) f(y,\tau)\, dy\, d\tau,
\end{aligned}$$

dove[10]

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_s(x,y;t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(x\xi)\sin(y\xi) e^{-\xi^2 t}\, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \left\{ -\cos((x+y)\xi) + \cos((x-y)\xi) \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right]. \qquad \text{(VI.53)}
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \qquad \text{(VI.54)}$$

Per risolvere la (VI.54) introduciamo la trasformata di Fourier coseno

$$(\mathcal{F}_c u)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x)\cos(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u}(\xi), \qquad \text{(VI.55)}$$

dove $u(x) = u(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^-$ è l'estensione di u ad una funzione pari. Si vede subito che

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\mathcal{F}_c u)(\xi)\cos(x\xi)\, d\xi. \qquad \text{(VI.56)}$$

Applicando la trasformata di Fourier coseno $\mathcal{F}_c$ alla (VI.54) risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_c u}{\partial t}(\xi,t) = -\xi^2(\mathcal{F}_c u)(\xi,t) + (\mathcal{F}_c f)(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ (\mathcal{F}_c u)(\xi,0) = (\mathcal{F}_c u_0)(\xi), \end{cases} \qquad \text{(VI.57)}$$

[10] Si utilizza $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-z^2 t}\cos(zt)\, dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2/4t}$. Vedi [1], Eq. 7.4.6.

e ha la soluzione unica (VI.48). Dunque

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\xi)(\mathcal{F}_c u)(\xi,t) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\xi) \left[e^{-\xi^2 t}(\mathcal{F}_c u_0)(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)}(\mathcal{F}_c f)(\xi,\tau)\,d\tau \right] d\xi \\
&= \int_0^\infty \mathcal{K}_c(x,y;t) u_0(y)\,dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{K}_c(x,y;t-\tau) f(y,\tau)\,dy\,d\tau,
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_c(x,y;t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x\xi)\cos(y\xi) e^{-\xi^2 t}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \{\cos((x+y)\xi) + \cos((x-y)\xi)\}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right].
\end{aligned} \tag{VI.58}$$

3.2 Equazione delle Onde sulla Retta

Consideriamo l'equazione delle onde

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x).
\end{cases} \tag{VI.59}$$

Applicando la trasformata di Fourier arriviamo al sistema di equazioni

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t) + \hat{f}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0, \\
\hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \\
\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \hat{u}_1(\xi),
\end{cases} \tag{VI.60}$$

con la soluzione unica

$$\hat{u}(\xi,t) = \cos(\xi t)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(\xi t)}{\xi}\hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(\xi(t-\tau))}{\xi} \hat{f}(\xi,\tau)\,d\tau. \tag{VI.61}$$

Per $\xi = 0$ si calcola il limite:

$$\hat{u}(0,t) = \hat{u}_0(0) + t\hat{u}_1(0) + \int_0^t (t-\tau)\hat{f}(0,\tau)\,d\tau. \tag{VI.62}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\hat{u}(\xi,t)\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\left[\cos(\xi t)\hat{u}_0(\xi)+\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\hat{u}_1(\xi)+\int_0^t \frac{\sin(\xi(t-\tau))}{\xi}\hat{f}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}(x-y;t)u_0(y)+\mathcal{H}(x-y;t)u_1(y)\right. \\
&\left.+\int_0^t \mathcal{H}(x-y;t-\tau)f(y,\tau)\,d\tau\right]dy,
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(x-y;t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi}\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}\left[H(y-x+t)+H(y-x-t)\right], \\
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}(x-y;t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi}\cos(\xi t)\,d\xi = \frac{1}{2}\left[\delta(y-x+t)-\delta(y-x-t)\right],
\end{aligned}
$$

essendo $H(\tau)$ la funzione di Heaviside [cioè, $H(\tau)=1$ per $\tau>0$ e $H(\tau)=0$ per $\tau<0$] e $\delta(\tau)$ quella di Dirac. In particolare, abbiamo trovato la cosiddetta *soluzione di D'Alembert*

$$
u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x-t)+u_0(x+t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y,\tau)\,dy\,d\tau.
$$

3.3 Equazione del Calore in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo il problema a valori iniziali

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\Delta u+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n, t>0, \\
u(x,0)=u_0(x).
\end{cases}
\tag{VI.63}
$$

Applicando la trasformata di Fourier unidimensionale $u \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{u}$ otteniamo

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t)=-|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)+\hat{f}(\xi,t), & \xi\in\mathbb{R}^n, t>0, \\
\hat{u}(\xi,0)=\hat{u}_0(\xi).
\end{cases}
\tag{VI.64}
$$

La soluzione del problema (VI.64) è elementare:

$$
\hat{u}(\xi,t)=e^{-|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi)+\int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)\,d\tau. \tag{VI.65}
$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x,\xi)} \hat{u}(\xi,t)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \left[e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-|\xi|^2 (t-\tau)} \hat{f}(\xi,\tau)\, d\tau \right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x-y;t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x-y;t-\tau) f(y,\tau)\, du\, d\tau, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} e^{-|\xi|^2 t}\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-|x|^2/4t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\xi + \frac{ix}{2t}, \xi + \frac{ix}{2t}\right) t}\, d\xi = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right)^n e^{-|x|^2/4t}. \end{aligned}$$

In quest'ultima equazione i prodotti scalari sono reali, anche se i vettori sono complessi.

Appendice A

Funzioni analitiche

Nel presente corso faremo uso di alcune proprietà (da discutere in questo paragrafo) delle funzioni analitiche.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$, dove G è un aperto in $\mathbb{C}$. Allora f si dice *analitica* se è derivabile rispetto alla variabile complessa $z \in G$ e la sua derivata f' è continua. In altre parole, per ogni $w \in G$ esiste un numero complesso $f'(w)$ tale che

$$f(z) = f(w) + (z - w)\left[f'(w) + \varepsilon(z)\right],$$

dove $|\varepsilon(z)| \to 0$ se $|z - w| \to 0$ per $z \in G$; inoltre, la funzione $f' : G \to \mathbb{C}$ è continua. Una funzione analitica è continua. Inoltre valgono le regole per l'analiticità della somma, del prodotto e della composta di due funzioni analitiche analoghe quelle che valgono per le funzioni derivabili in una variabile reale.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$ una funzione definita su un aperto G in $\mathbb{C}$ che è rappresentabile come la somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza positiva in ogni punto $w \in G$. Ciòe, per ogni $w \in G$ esistono coefficienti $\{a_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ ed un numero positivo $R(w)$ tali che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w)(z - w)^n, \qquad |z - w| < R(w). \tag{A.1}$$

In tal caso f è analitica indefinitamente derivabile:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}(w)(z-w)^n, \qquad |z-w| < R(z_0),$$

mentre $a_n(w) = f^{(n)}(w)/(n!)$. D'altra parte, una funzione analitica $f : G \to \mathbb{C}$ si può scrivere nella forma (A.1) per un opportuno $R(w) > 0$ per ogni $w \in G$.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$ una funzione analitica su un aperto G in $\mathbb{C}$. All'aperto $G \subset \mathbb{C}$ facciamo corrispondere un aperto $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(x, y) \in \tilde{G}$ se e solo se $x + i\,y \in G$. Ora definiamo $u, v : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ dalla formula

$$f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y), \qquad (x, y) \in \tilde{G}.$$

Allora $u, v : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ sono differenziabili (nel senso del corso di Analisi Matematica II), esiste un numero infinito di derivate parziali successive di u e v rispetto ad x ed y, e valgono le cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*[1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.2}$$

In tal caso, abbiamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \tag{A.3}$$

Usando l'uguaglianza (simbolica) $(u+iv)(dx+i\,dy) = (u\,dx-v\,dy)+i(v\,dx+u\,dy)$, si vede facilmente (dalla (A.2)) che le forme differenziali $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono ambedue chiuse. Quindi, se $\tilde{G}$ (oppure G) è semplicemente connesso, queste due forme differenziali sono esatte. Di conseguenza, se G è semplicemente connesso e γ è una curva chiusa e rettificabile (cioè, di lunghezza ben definita e finita) in G, allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} (u\,dx - v\,dy) = 0, \qquad \int_{\tilde{\gamma}} (v\,dx + u\,dy) = 0,$$

dove $\tilde{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + i\,y \in \gamma\}$. Ciò implica che

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\tilde{\gamma}} (v\,dx + u\,dy) = 0. \tag{A.4}$$

L'affermazione (A.4) si chiama il *Teorema di Cauchy.* È il risultato più importante della teoria delle funzioni analitiche. Osserviamo che purtroppo il ragionamento seguito non è una dimostrazione esaustiva e quindi completamente rigorosa.

Enunciamo adesso due altri importanti teoremi (collegati al precedente).

Teorema A.1 *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche sull'aperto G che converga ad una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ uniformemente in $z \in K$ per un qualunque compatto K in G. Allora f è analitica.*

[1]Se si specifica il valore della f nel punto $a \in G$, allora $f(z) = 2u(\frac{1}{2}[z + \overline{a}], \frac{1}{2i}[z - \overline{a}]) - \overline{f(a)} = 2iv(\frac{1}{2}[z + \overline{a}], \frac{1}{2i}[z - \overline{a}]) + \overline{f(a)}$ per $z \in G$. Vedi [10].

Teorema A.2 *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni analitiche sull'aperto* G *tale che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converga uniformemente in $z \in K$ *per un qualunque compatto* K *in* G*. Allora la sua somma rappresenta una funione analitica su* G*.*

Discutiamo due risultati semplici ed importanti per le funzioni analitiche.

Teorema A.3 *Siano* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *due funzioni analitiche sull'aperto connesso* G *tali che* $f(z) = g(z)$ *per ogni* $z \in E$*, dove* E *è un sottoinsieme di* G *con almeno un punto di accumulazione all'interno di* G*. Allora* $f(z) = g(z)$ *per ogni* $z \in G$*.*

In particolare, applicando il Teorema A.3 per $g(z) \equiv 0$, si vede facilmente che una funzione analitica $f \not\equiv 0$ ha un numero finito di zeri oppure i suoi zeri si accumulano sulla frontiera di G.

Adesso enunciamo il fondamentale *Teorema di Liouville*.

Teorema A.4 *Sia* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una funzione analitica definita sull'intero piano complesso. Allora* f *è non limitata oppure costante.*

La dimostrazione è abbastanza facile. Ne diamo lo schema qui di seguito. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia C_R il cerchio di centro 0 e raggio R in $\mathbb{C}$ con orientamento positivo. Allora $(2\pi i)^{-1} \int_{C_R} (z-w)^{-1}\, dz = 1$ per $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < R$ (lo si controlli!) implica[2] che

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - w}\, dz, \qquad |w| < R.$$

Ciò comporta [perché?] che

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - w)^2}\, dz, \qquad |w| < R.$$

Di conseguenza, se $|f(z)| \leq M$ per $z \in \mathbb{C}$, risulterebbe

$$|f'(w)| \leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{M}{(R - |w|)^2}, \qquad R > |w|,$$

[2]Si scriva $f(z) = f(w) + [f(z) - f(w)]$ e si osservi che $[f(z) - f(w)]/(z - w)$ è analitica in $z \in \mathbb{C}$. Poi si applichi il Teorema di Cauchy.

e quindi $f'(w) = 0$. Siccome $w \in \mathbb{C}$ è arbitrario, f deve essere una funzione costante.

Come corollario si afferma che una funzione analitica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con limite zero per $|z| \to +\infty$ deve annularsi in ogni $z \in \mathbb{C}$.

Definiamo ora le funzioni meromorfe e discutiamo le loro singolarità.

In primo luogo una funzione analitica $f : G \to \mathbb{C}$ con $f \not\equiv 0$ ha un numero finito o un'infinità numerabile di zeri. Un numero complesso z_0 si dice *zero di ordine* m per f se $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ per $g : G \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e $g(z_0) \neq 0$. In altri termini, z_0 è uno zero di ordine m se e solo se $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Se G è un aperto in $\mathbb{C}$, $w \in G$ e f è analitica su $G \setminus \{w\}$, il punto w si dice *polo di ordine* m se esiste una funzione analitica $g : G \to \mathbb{C}$ con $g(w) \neq 0$ tale che $f(z) = g(z)/(z - w)^m$ per $z \in G \setminus \{w\}$.

Sia G un aperto in $\mathbb{C}$. Una funzione f si dice *meromorfa* su G se esiste un sottoinsieme finito oppure numerabile E di G senza punti di accumulazione all'interno di G tale che f sia analitica in $G \setminus E$ ed ogni punto di E sia un polo della f.

Teorema A.5 [*Principio dell'argomento*] *Sia f una funzione meromorfa nell'aperto G. Sia γ una curva chiusa, semplice e rettificabile in G che non passa per i poli e per gli zeri di f, con un orientamento tale che il sottodominio Ω di G racchiuso da γ si trova alla sinistra di γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} N(z_k) - \sum_{j=1}^{m} P(p_j),$$

dove $z_1, \cdots, z_n$ sono gli zeri in Ω, $p_1, \cdots, p_m$ sono i poli in Ω, $N(z_k)$ è l'ordine dello zero z_k e $P(p_j)$ è l'ordine del polo p_j.

Dimostrazione. Posta

$$f(z) = g(z) \frac{\prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{N(z_k)}}{\prod_{j=1}^{m} (z - p_j)^{P(p_j)}},$$

dove $g(z)$ è una funzione meromorfa in G che non ha zeri nè poli in Ω, si ha

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N(z_k)}{z - z_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{P(p_j)}{z - p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

dove $g'(z)/g(z)$ è continua in $\Omega \cup \gamma$ e analitica in Ω. Il teorema segue quindi dal Teorema di Cauchy. $\square$

Corollario A.6 [*Teorema di Rouché*] *Siano f e g funzioni meromorfe nell'aperto G. Sia γ una curva chiusa, semplice e rettificabile in G che non passa per i poli e per gli zeri di f e g, con un orientamento tale che il sottodominio Ω di G racchiuso da γ si trova alla sinistra di γ. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \qquad z \in \gamma, \tag{A.5}$$

allora

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

dove Z_f e P_f sono il numero degli zeri e dei poli della f in Ω e Z_g e P_g sono il numero degli zeri e dei poli della g in Ω.

Dimostrazione. L'ipotesi (A.5) implica che f/g manda γ nella palla $\{w \in \mathbb{C} : |w-1| < 1\}$. In questa palla si può definire $\log(w)$ come funzione analitica tale che $\log(w) \to 0$ se $w \to 1$. In tal caso, $(\log(f/g))' = (f/g)'/(f/g) = (f'/f) - (g'/g)$. Quindi, utilizzando il Teorema di Cauchy e il Teorema A.5, si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g).$$

□

Usando il Teorema di Rouché si trova facilmente una dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Sia $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio complesso di grado n e con coefficiente principale 1. Applichiamo il Teorema di Rouché per $f(z) = p(z)$ e $g(z) = z^n$. Siccome esiste $R > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| = \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right| < 1, \qquad |z| = R,$$

si può applicare il Teorema di Rouché per $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Abbiamo $Z_g = n$ e $P_f = P_g = 0$. Quindi $Z_f = n$; di conseguenza $p(z)$ ha n zeri nel dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Appendice B

La Funzione Gamma

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0, \tag{B.1}$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0,1)$ ed in $(1,+\infty)$. Infatti $|e^{-t}\, t^{z-1}| \leq t^{\operatorname{Re} z - 1}$ per $t \in (0,1)$ e $t^\alpha |e^{-t}\, t^{z-1}| \to 0$ se $t \to +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{B.2}$$

Quest'identità può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$ da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta una funzione analitica nell'aperto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \cdots\}$. Negli punti $z = 0, -1, -2, \cdots$ la funzione Gamma ha dei poli semplici.

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$. Utilizzando la (B.2) risulta

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{B.3}$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando la (B.2) si ottiene

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{B.4}$$

Dimostriamo ora la formula di duplicazione. Per $\mathrm{Re}\, z > 0$ si ha

$$\begin{aligned}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)}(2\sqrt{st})^{2z-1}t^{-1/2}\, dsdt \\ &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)}(2\alpha\beta)^{2z-1}\alpha\, d\alpha d\beta.\end{aligned}$$

Scambiando α e β e prendendo la media delle due espressioni che risultano, si ottiene l'espressione più simmetrica

$$\begin{aligned}&e^{-(\alpha^2+\beta^2)}(2\alpha\beta)^{2z-1}(\alpha+\beta)\, d\alpha d\beta \\ &= 4\int_0^\infty \int_0^\alpha e^{-(\alpha^2+\beta^2)}(2\alpha\beta)^{2z-1}(\alpha+\beta)\, d\beta d\alpha.\end{aligned}$$

Introducendo le nuove variabili $u = \alpha^2 + \beta^2$ e $v = 2\alpha\beta$, si trova

$$\begin{aligned}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty v^{2z-1}\, dv \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}}\, du \\ &= 2\int_0^\infty e^{-v}\, v^{2z-1}\, dv \int_0^\infty e^{-w^2}\, dw = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),\end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Dunque risulta la formula di duplicazione

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z), \qquad \text{(B.5)}$$

valida per ogni $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \cdots$.

Per $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ si ha

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)}s^{-z}t^{z-1}\, dsdt.$$

Sostituendo $u = s + t$ e $v = t/s$ risulta

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u}v^{z-1}\frac{du\, dv}{1+v} = \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v}\, dv.$$

L'ultimo integrale si può scrivere in un'altra forma [vedi E.C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London, 1939; p. 105], cioè

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \qquad \text{(B.6)}$$

valida per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ per l'unicità delle estensioni analitiche.

Appendice C

Approssimazione delle funzioni continue da polinomi

Teorema C.1 [Weierstrass] *Se f è una funzione complessa, continua in $[a, b]$, esiste una successione di polinomi P_n tale che*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

uniformemente in $[a, b]$. Se f è reale, si possono prendere i P_n reali.

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che $[a, b] = [0, 1]$. Possiamo inoltre supporre che $f(0) = f(1) = 0$. Perchè, se il teorema è dimostrato in questo caso, si consideri

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)], \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Allora $g(0) = g(1) = 0$ e, se g può essere ottenuto come limite di una successione uniformemente convergente di polinomi, è chiaro che lo stesso vale per f, visto che $f - g$ è un polinomio.

Inoltre, per definizione, poniamo $f(x)$ uguale a zero per x fuori da $[0, 1]$. Allora f è uniformemente continua su tutta la retta reale.

Poniamo

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove c_n è scelto in modo tale che

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{C.1}$$

Abbiamo bisogno di alcune informazioni sull'ordine di grandezza dei c_n. Dal momento che

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx &= 2\int_0^1(1-x^2)^n\,dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n\,dx\\ &\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,dx=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

dalla (C.1) segue che

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{C.2}$$

Si può facilmente dimostrare la disuguaglianza $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$ che abbiamo usato prima.[1]

Per ogni $\delta > 0$, la (C.2) implica

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n, \qquad \delta \leq |x| \leq 1, \tag{C.3}$$

e quindi $Q_n \to 0$ uniformemente in $\delta \leq |x| \leq 1$.

Sia ora

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Le ipotesi su f ci permettono di dimostrare, con un semplice cambio di variabile, che

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)\,dt,$$

e l'ultimo integrale è chiaramente un polinomio in x. Perciò la $\{P_n\}$ è una successione di polinomi che sono reali se f è reale.

Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta > 0$ tale che per $|y-x| < \delta$ si ha

$$|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $M = \sup|f(x)|$. Servendoci dalla (C.1), della (C.3) e della relazione $Q_n(x) \geq 0$, vediamo che, per $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}|P_n(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]Q_n(t)\,dt\right| \leq \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt\\ &\leq 2M\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)\,dt+2M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\,dt\\ &\leq 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

per n abbastanza grande; il che conclude la dimostrazione del teorema. □

[1] È un corollario della disuguaglianza di Bernouilli.

Appendice D

Integrazione secondo Lebesgue

L'integrale di Riemann non basta per studiare la fisica matematica, grazie alle sua pessime proprietà di convergenza. D'altra parte, l'integrale di Lebesgue copre tutte le applicazioni di fisica matematica ma non è facile da introdurre in poco tempo. Fortunatamente lo studio degli insiemi di Borel e delle funzioni misurabili secondo Borel ci permette a generalizzare il concetto di integrale abbastanza ma a farlo in tempi ragionevoli.

1 Insiemi di Borel

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è detto *insieme di Borel* se appartiene alla famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ più piccola ottenuta dagli insiemi aperti applicando una delle seguenti operazioni: 1) unione finita o numerabile, 2) intersezione finita o numerabile, e 3) complementazione [cioè l'operazione $B \mapsto \mathbb{R}^n \setminus B$]. È chiaro che tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono di Borel. Per $n = 1$ gli intervalli $[a, b) = \cap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ sono di Borel.

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, dove $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $a_1 < b_1$, $\ldots$, $a_n < b_n$. Allora

$$m([a, b)) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

è la *misura* del pluriintervallo $[a, b)$. Per un'unione finita o numerabile E di pluriintervalli due a due disgiunti si definisce la sua misura $m(E)$ come la somma delle misure dei pluriintervalli, possibilmente con $m(E) = +\infty$. Allora $m([a, \infty)) = +\infty$, dove $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > a_1, \ldots, x_n > a_n\}$. Siccome tutte le palle $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < \varepsilon\}$ sono uniuoni numerabili due a due disgiunti di pluriintervalli, anche la misura di $B_\varepsilon(a)$ si può calcolare. Osservando ora che tutti gli aperti sono unioni finite o numerabili di palle, si può estendere la misura a qualsiasi sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sia Σ la cosiddetta σ-algebra degli insiemi di Borel in $\mathbb{R}^n$, dove σ-algebra vuol dire una famiglia di sottoinsiemi chiusa rispetta all'unione finita e numerabile, all'intersezione finita e numerabile e alla complementazione che contiene l'insieme vuoto e $\mathbb{R}^n$ stesso, insieme con la misura di Borel. Questa misura ha le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Borel due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme di Borel e
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi di Borel, allora
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

Purtroppo la σ-algebra degli insiemi di Borel ha la proprietà che non tutti i sottoinsiemi degli insiemi di Borel di misura zero sono di Borel. Per questo motivo la σ-algebra di Borel viene estesa a quella di Lebesgue: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice *misurabile* (*secondo Lebesgue*) se esiste un insieme di Borel B tale che la cosiddetta differenza simmetrica $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è un sottoinsieme di un insieme di Borel di misura zero. In tal caso si definisce come la misura $m(A)$ quella dell'insieme di Borel B. Si può dimostrare che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una σ-algebra con le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme misurabile e
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi misurabili, allora
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

È molto difficile individuare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che non è misurabile. Dall'assioma di scelta segue la sua esistenza. Purtroppo esistono altri assiomi della teoria degli insiemi che conducono ad una situazione in cui ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è misurabile.

2 Integrale di Lebesgue

Si dice *funzione semplice* una funzione complessa φ definita in $\mathbb{R}^n$ che ha soltanto un numero finito di valori e dove tutti gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c\}$ sono misurabili di misura finita. Essendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i valori diversi della funzione semplici φ, si ha

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{E_j} = \begin{cases} \lambda_j, & x \in E_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^{m} E_j, \end{cases}$$

dove $E_1, \ldots, E_m$ sono insiemi misurabili di misura finita disgiunti due a due e χ_E è la funzione caratteristica di E (cioè, $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, e $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$). Come *integrale di Lebesgue* si definisce

$$\int \varphi(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j m(E_j).$$

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice misurable se per ogni insieme di Borel E in $\mathbb{C}$ l'immagina inversa

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$$

è misurabile. In particolare, le funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili.

Le funzioni misurabili hanno le seguenti proprietà:

1. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $f + g$ e $f - g$ sono misurabili.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora λf è misurabile.

3. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile, allora fg è misurabile.

4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile.

5. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f| = \max(f, -f)$, $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$ sono misurabili.

6. Se $f_1, f_2, \ldots$ sono misurabili e $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, allora f è misurabile.

Definiamo ora l'integrale di Lebesgue per le funzioni misurabili non negative. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ misurabile e non negativa. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici non negative $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tali che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (tranne in un sottoinsieme di misura zero). In tal caso la successione degli integrali di Lebesgue $\int f_n(x)\, dx$ è crescente e il suo limite (che potrebbe essere uguale a $+\infty$) si definisce come l'integrale di Lebesgue della f:

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Nel seguente teorema i valori degli integrali possono essere uguali a $+\infty$.

Teorema D.1 [**di Beppo-Levi**] *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione crescente di funzioni misurabili non negative. Sia* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *per* $x \in \mathbb{R}^n$*. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Passiamo ora all'integrazione delle funzioni a valori reali. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo $f_\pm = \max(\pm f, 0)$. Allora $f_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ sono misurabili e non negative e $f_+ - f_- = f$. Poniamo ora

$$\int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x)\,dx - \int f_-(x)\,dx & \text{se ambedue integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx < +\infty, \\ -\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx = +\infty, \\ \text{non definito} & \text{se } \int f_+(x)\,dx = \int f_-(x)\,dx = +\infty. \end{cases}$$

Inoltre,

$$\int |f(x)|\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x)\,dx + \int f_-(x)\,dx & \text{se ambedue integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx = +\infty, \\ \text{non definito} & \text{se } \int f_+(x)\,dx = \int f_-(x)\,dx = +\infty. \end{cases}$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *sommabile* se ambedue gli integrale $\int f_\pm(x)\,dx$ sono finiti.

Per definire gli integrali delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, si osservi prima che $\operatorname{Re} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono misurabili. In tal caso, se sono definiti ambedue gli integrali $\int \operatorname{Re} f(x)\,dx$ e $\int \operatorname{Im} f(x)\,dx$, allora

$$\int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice sommabile se è finito l'integrale della funzione $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$.

L'integrale di Lebesgue ha la seguenti proprietà:

1. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

2. $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$,

3. $|\int f(x)\,dx| \leq \int |f(x)|\,dx$.

4. Se $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura zero, allora $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$.

L'ultima proprietà è di estrema importanza per capire l'integrale di Lebesgue: Il suo valore non si cambia se la funzione viene modificata su un insieme di misura zero. Due funzione f, g come nella proprietà 4 si dicono *quasi uguali*. Oppure: Si dice che $f(x) = g(x)$ *quasi ovunque*.

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \to \mathbb{C}$ si dice misurabile se la sua estensione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

è misurabile. In tal caso

$$\int_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \tilde{f}(x)\chi_E(x)\,dx,$$

dove $\chi_E(x) = 1$ per $x \in E$ e $\chi_E(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Discutiamo ora il seguente esempio illustrativo.

Esempio D.2 Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Allora la f è continua per $x \geq 0$ e quindi misurabile. Vale l'integrale di Riemann generalizzata

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Purtroppo questo integrale non è un integrale di Lebesgue. Infatti,

$$f_+(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & 2(n-1)\pi \leq x \leq (2n-1)\pi, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin(x)}{x}, & (2n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Osservando che

$$\int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \sin(x)\,dx = -\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin(x)\,dx = 1,$$

si vede facilmente che

$$\int f_+(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\pi} = +\infty,$$
$$\int f_-(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} = +\infty.$$

Quindi $\int f(x)\,dx$ non esiste nel senso di Lebesgue.

3 Alcuni Teoremi

Il seguente risultato riguarda lo scambio tra limite e integrazione.

Teorema D.3 [**della convergenza dominata, di Lebesgue**] *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni misurabili tali che*

a. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *per quasi ogni* x,

b. per $n = 1, 2, 3, \ldots$ *si ha* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *per quasi ogni* x, *dove* g *è sommabile.*

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

La seconda condizione è assolutamente necessaria.

Esempio D.4 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = \phi(x-n)$, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = 1, \qquad \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Esempio D.5 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\phi(0) > 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = n\phi(nx)$, si vede subito che $f_n(x) \to 0$ per $x \neq 0$ e $f_n(0) \to +\infty$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = 1, \qquad \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Il Teorema della Convergenza Dominata è fondamentale e ha molti corollari di importanza. Per esempio, sia $f(\cdot,\xi) : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile che depende in modo continuo dal parametro $\xi \in \Omega$. Allora $\int f(x,\xi)\,dx$ depende in modo continuo da $\xi \in \Omega$ **se esiste una funzione sommabile** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ **tale che** $|f(x,\xi)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\xi \in \Omega$. Infatti, scegliendo $\eta \in \Omega$, basterebbe considerare una successione in $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ in Ω convergente ad η e la successione di funzioni $f_n(x) = f(x,\eta_n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ per dimostrare il corollario.

L'ultimo risultato riguarda il cambio dell'ordine di integrazione.

Teorema D.6 [**di Fubini**] *Sia* $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$*, scritta come funzione di* $z = (x,y)$ *con* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $y \in \mathbb{R}^m$ *e* $z \in \mathbb{R}^{n+m}$*, misurabile e non negativa, oppure sommabile. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx \right) dy. \quad \text{(D.1)}$$

In particolare, la (D.1) *vale se almeno uno degli integrali* $\int\int |f(x,y)|\,dy\,dx$ *e* $\int\int |f(x,y)|\,dx\,dy$ *è finito.*

Bibliografia

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.

[2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.

[3] M.S.P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.

[4] Enrico Giusti, *Analisi Matematica* 1-2 (due volumi), Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[5] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.

[6] R.G. Newton, *Scattering of Waves and Particles*, Springer, New York, 1982; Dover, New York, 2002.

[7] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, 2 vols., Hermann, Paris, 1966.

[8] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.

[9] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).

[10] William T. Shaw, *Recovering holomorphic functions from their real or imaginary parts without the Cauchy-Riemann equations*, SIAM Review **46**(4), 717–728 (2004).

[11] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.

[12] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1981.

[13] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Mir Italia-URSS, Mosca, 1987; anche Nauka, Mosca, 1981 [in Russo].

[14] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.

[15] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.