

## FONDAMENTI DI FISICA MATEMATICA

Docente: Prof. Cornelis van der Mee

Laurea magistrale in Matematica (Università di Cagliari)

8 CFU; settore disciplinare: MAT07 (Fisica Matematica)

### Programma:

- a. **Classificazione delle equazioni differenziali (4 ore)**. Classificazione dei principali modelli differenziali alle derivate parziali (PDEs). Problemi modello di tipo stazionario (equazione di Laplace), evolutivo di I ordine (equazione del calore) e di II ordine (equazione delle onde). Condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione.
- b. **Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie, ODE (8 ore)**. La soluzione generale di una ODE lineare del II ordine. Il caso speciale di una ODE lineare del II ordine con coefficienti costanti. Introduzione al metodo spettrale. Teoria spettrale di Sturm-Liouville. Conversione di una ODE di ordine superiore in un sistema di ODE del I ordine. Sistemi ODE lineari a coefficienti costanti.
- c. **Fondamenti di analisi armonica (8 ore)**. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche e sviluppo di una funzione in serie di Fourier. Il caso speciale delle funzioni pari e dispari. Convergenza, integrazione e differenziazione delle serie di Fourier. Convergenza uniforme. Decadimento dei coefficienti di Fourier. Applicazioni alla risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie.
- d. **Metodi analitici di risoluzione (14 ore)**. Risoluzione analitica mediante il metodo degli integrali generali. Il metodo di separazione delle variabili. Risoluzione di PDEs in domini regolari mediante metodi spettrali. L'equazione di Laplace sul rettangolo e sul cerchio unitario. Formula risolvente di Poisson. L'equazione del calore con estremi isolati e con un estremo radiante. L'equazione delle onde in assenza e in presenza di una forza esterna. L'equazione delle onde sul rettangolo. Risoluzione di PDEs in domini regolari, mediante metodi spettrali.
- e. **Risoluzione di PDEs con il metodo alle differenze finite (16 ore)**. Risoluzione delle ODEs lineari del II ordine con valori noti agli estremi. Valutazione dell'errore. Risoluzione numerica dell'associato problema algebrico. Il metodo iterativo di Newton per la risoluzione

di modelli differenziali ordinari debolmente nonlineari con valori agli estremi. Risoluzione di equazioni ellittiche lineari mediante schemi alle differenze centrali. Risoluzione delle equazioni di tipo parabolico con uno schema implicito a quattro punti e di quelle iperboliche mediante uno schema implicito a sette punti. Valutazione dell'errore di discretizzazione. Risoluzione delle equazioni ellittiche e paraboliche debolmente nonlineari con il metodo di Newton-Jacobi.

- f. **Risoluzione di PDEs con il metodo agli elementi finiti (14 ore).** Gli elementi finiti in una dimensione. La formulazione debole di un BVP. Equivalenza fra forma forte e debole. Il metodo di Galerkin. Polinomi continui a tratti e metodo degli elementi finiti. Valutazione dell'errore. Esempi utilizzando elementi finiti a tratti. Il metodo degli elementi finiti in due dimensioni (Caso ellittico, parabolico e iperbolico). Applicazioni alle equazioni di Helmholtz.

**Testi di riferimento:**

1. Libro di testo principale: Sebastiano Seatzu e Pietro Contu, *Equazioni alle Derivate Parziali. Una Introduzione ai Metodi di Risoluzione Analitica e Numerica*, Pitagora Editrice, Bologna, 2012. ISBN 88-371-1866-X.
2. Di sostegno: Mark S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, Philadelphia, USA, 2006.
3. Di sostegno: A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, Springer, Milano, 2003.

**Obiettivi, valutazione e propedeuticità:**

- a. **Obiettivi:** Far acquisire una conoscenza operativa di metodi basilari per lo studio dei modelli differenziali alle derivate parziali di tipo stazionario ed evolutivo. Per tale motivo l'illustrazione di ogni argomento viene corredata dallo svolgimento di esercizi, senza alcuna distinzione formale tra le ore di lezione e quelle di esercitazione.
- b. **Valutazione:** La valutazione avviene mediante n.2 prove scritte intermedie, oppure mediante un esame scritto sull'intero programma. In ambedue i casi segue una prova orale. Lo studente deve sostenere l'orale entro il periodo previsto dal Corso di Laurea in Matematica.

- c. **Propedeuticità:** Il corso presuppone una buona conoscenza degli argomenti di base dell'analisi e dell'algebra lineare.