Appendice B

ANALISI FUNZIONALE

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro. Inoltre si discutono gli operatori compatti su uno spazio di Hilbert.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari $\mathbb{F}$ che supponiamo uguale a $\mathbb{R}$ (numeri reali) oppure a $\mathbb{C}$ (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)

b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)

c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha|\,\|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)

d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Una successione $\{\varphi_n\|_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$

per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X. Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \to Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U che converge a φ. La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω. Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \max_{z\in\Omega} |f(x)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$. Si verifica che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ se e solo se $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente in $x \in \Omega$.

2. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2},$$

è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

3. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \to \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2},$$

è una norma completa in ℓ^2.

4. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^1(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme

di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_1 : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\,dx,$$

è una norma completa in $L^1(\Omega)$.

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme

$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$

è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ. Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in X$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X, la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U.

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X. Dato il sottoinsieme U di X, la sua *chiusura* $\overline{U}$ è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U.

Dato il sottoinsieme U di X, la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una successione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che

$$\partial U = \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\mathrm{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in X\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per ogni vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D. Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{F}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)

b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)

c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)

d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$, (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $(\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$.

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*[1]

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare[2]

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert.* Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert.*

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallologramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \tag{B.1}$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

---

[1]Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4|(\varphi, \chi)|^2 - 4\|\varphi\|^2\,\|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|\,\|\psi\|$.

[2]Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|\,\|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot,\cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$,

$$(f, g) = \left(\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot,\cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \left(\sum_{n=1}^\infty x_n\, \overline{y_n} \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., un sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \\ \varphi_2 = \dfrac{\psi_2 - (\psi_2,\varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2,\varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \dfrac{\psi_3 - (\psi_3,\varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3,\varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3,\varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3,\varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \dfrac{\psi_N - (\psi_N,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N,\varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N,\varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{cases}$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \ldots, N$).

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N, si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X. Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione infinita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in X, risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

di dimensione N, si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se

$N \to \infty$.[3] Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \lambda_n)\lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N.

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \to \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2. Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2. Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2. Concludiamo che, tranne per una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

4 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

[3] Sia $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n \right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ $(n = 1, \ldots, N)$.

ossia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\,e^{inx}\right|^2 dx=0.$$

2. In $X=L^2(-\pi,\pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_n^c(x)=\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_n^s(x)=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},\qquad n=1,2,3,\dots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f\in L^2(-\pi,\pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx, & n=0,1,2,\dots,\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx, & n=1,2,3,\dots,\end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)\right|^2 dx=0.$$