METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA ELETTRONICA

Corso Facoltativo di 5 Crediti
Corso di Laurea Specialistica
in Ingegneria Elettronica

Cornelis VAN DER MEE
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX)
cornelis@bugs.unica.it

Indice

Capitolo I

EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA

1 Coordinate ortogonali

Partendo dalle coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$, sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una trasformazione delle variabili in $\mathbb{R}^3$, dove $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$ $(j = 1, 2, 3)$ sono funzioni di classe C^2 e la matrice Jacobiana è invertibile (per x in un aperto di $\mathbb{R}^3$). Derivando le variabili x_1, x_2, x_3 rispetto alle nuove variabili u_1, u_2, u_3 otteniamo

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j.$$

Quindi la distanza al quadrato tra due punti vicini tra loro è

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, du_i du_j,$$

dove

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}$$

è la cosiddetta metrica. La trasformazione si dice *ortogonale* se la metrica $\{g_{kl}\}_{k,l=1}^{3}$ è una matrice diagonale, cioè se le righe della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_3} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \qquad k \neq l.$$

In tal caso

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (h_i \, du_i)^2,$$

dove

$$h_k = \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Si vede facilmente che la matrice $\operatorname{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3)\, J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

Per ogni punto (u_1, u_2, u_3) delle nuove coordinate per cui $\det J \neq 0$, passano tre superfici $u_i =$ costante ($i = 1, 2, 3$). In questo punto definiamo il vettore $\boldsymbol{e}_i$ di lunghezza 1 normale alla superficie $u_i =$ costante e nella direzione in cui cresce u_i. In tal caso i tre vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ formano un sistema di coordinate cartesiane tale che $\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) > 0$.

Il gradiente di ψ ha la forma

$$\nabla \psi = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \boldsymbol{e}_j,$$

la divergenza della funzione $\boldsymbol{V} = V_1 \boldsymbol{e}_1 + V_2 \boldsymbol{e}_2 + V_3 \boldsymbol{e}_3$ a valori vettoriali ha la forma

$$\nabla \dot{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(V_3 h_1 h_2) \right],$$

e il rotore di $\boldsymbol{V}$ ha la forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \Bigg[& \left(\frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (h_2 V_2)}{\partial u_3} \right) h_1 \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_2 \boldsymbol{e}_2 \\ & + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_3 \boldsymbol{e}_3 \Bigg]. \end{aligned}$$

Quindi l'operatore di Laplace

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

si rappresenta nella seguente forma:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right].$$

Esempi:

a. **Coordinate Cilindriche**: $x = r\cos\theta$, $y = r\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{I.1}$$

Sostituendo per ψ una funzione $\psi = \psi(r,\theta)$ che non dipende da z si trova l'operatore di Laplace in coordinate polari:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \tag{I.2}$$

b. **Coordinate Sferiche**: $x = r\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta$, $y = r\mathrm{sen}\,\varphi\mathrm{sen}\,\theta$, $z = r\cos\varphi$, dove $r \geq 0$, $\varphi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0,2\pi)$. Allora $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_\theta = r\mathrm{sen}\,\varphi$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right). \tag{I.3}$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos\varphi \in [-1,1]$ (tale che $d\xi = -\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi$, $1-\xi^2 = \mathrm{sen}^2\varphi$) otteniamo[1]

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2(1-\xi^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right). \tag{I.4}$$

c. **Coordinate Parabolico-cilindriche** (vedi [9]): $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2)$, $y = cuv$, $z = z$, dove $u \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{u^2+v^2}, \qquad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{I.5}$$

[1] Usando le coordinate ortogonali (r,θ,ξ) direttamente si trovano le espressioni $h_r = 1$, $h_\theta = r\sqrt{1-\xi^2}$ e $h_\xi = (r/\sqrt{1-\xi^2})$.

d. **Coordinate Ellittico-cilindriche** (vedi [9]): $x = c \cosh u \cos v$, $y = c \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$\begin{cases} h_u = h_v = c\sqrt{\cosh^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{senh}^2 u \cos^2 v} = c\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v}, \\ h_z = 1. \end{cases}$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2[\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v]} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \tag{I.6}$$

2 Separazione delle variabili

1. Separazione in Coordinate Cartesiane. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in tre variabili (x, y, z) per $k \geq 0$ nel dominio $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. Ponendo

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

dove $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ sono di classe C^2, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2.$$

In tal caso esistono tre costanti k_x^2, k_y^2 e k_z^2 tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + k_x^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_y^2 = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_z^2 = 0,$$

dove

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in due variabili (x, y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L \right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0.$$

L'espressione precedente è la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione I.1 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2, non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -C, \qquad \Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta).$$

Allora $C = m^2$ per qualche $m = 0, 1, 2, \cdots$ e

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ \text{cost}_1 \cos m\theta + \text{cost}_2 \, sen\, m\theta, & m = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per $C < 0$ si ha la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cosh(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \text{senh}\,(\theta\sqrt{-C}).$$

Sostituendo $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ e le formule d'addizione

$$\begin{cases} \cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha \, \cosh\beta + \text{senh}\,\alpha\, \text{senh}\,\beta \\ \text{senh}\,(\alpha + \beta) = \text{senh}\,\alpha \, \cosh\beta + \cosh\alpha\, \text{senh}\,\beta, \end{cases}$$

risulta

$$\begin{aligned} & c_1 \cosh(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \text{senh}\,(\theta\sqrt{-C}) \\ &= \left[c_1 \cosh(2\pi\sqrt{-C}) + c_2 \text{senh}\,(2\pi\sqrt{-C})\right] \cosh(\theta\sqrt{-C}) \\ &+ \left[c_1 \sinh(2\pi\sqrt{-C}) + c_2 \cosh(2\pi\sqrt{-C})\right] \text{senh}\,(\theta\sqrt{-C}), \end{aligned}$$

dove $\theta \in (0, 2\pi)$ è arbitrario. Quindi

$$\begin{bmatrix} 1-\cosh(2\pi\sqrt{-C}) & -\mathrm{senh}\,(2\pi\sqrt{-C}) \\ -\mathrm{senh}\,(2\pi\sqrt{-C}) & 1-\cosh(2\pi\sqrt{-C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

implicando $c_1 = c_2 = 0$, poichè il determinante del sistema $2(1-\cosh(2\pi\sqrt{-C}))$ < 0. [2] D'altra parte, per $C > 0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \mathrm{sen}\,(\theta\sqrt{-C}).$$

Nella stessa maniera risulta il sistema

$$\begin{bmatrix} 1-\cos(2\pi\sqrt{C}) & -\mathrm{sen}\,(2\pi\sqrt{C}) \\ \mathrm{sen}\,(2\pi\sqrt{C}) & 1-\cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1-\cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie. Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. $\square$

Sostituendo $\dfrac{1}{\Theta(\theta)}\dfrac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \cdots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la

[2] Dimostrazione alternativa per $C < 0$: $\int_0^{2\pi} |\Theta(\theta)|^2\, d\theta = -C\int_0^{2\pi} \Theta''(\theta)\overline{\Theta(\theta)}\, d\theta = -C\left[\Theta'(\theta)\overline{\Theta(\theta)}\right]_0^{2\pi} + C\int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2\, d\theta < 0$, poichè il primo termine dell'ultima parte si annulla per ragioni di periodicità, $C < 0$ e $\Theta'(\theta) \not\equiv 0$. Contraddizione.

condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \cdots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0.$$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \to 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m.

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta, \varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, +\infty)$ e $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V &= \frac{1}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] \\ &+ \frac{1}{r^2 S(\theta, \varphi)}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)\right] + k^2 - V(r). \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) = -CS(\theta, \varphi)$$

e

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2}\right) R(r) = V(r)R(r),$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta, \varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per certi valori della costante C. Per tali valori di C le funzioni $S(\theta, \varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta, \varphi)$. Ponendo

$$S(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) + C = 0.$$

Come di solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

dove $m = 0, 1, 2, \cdots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi) = \Phi(\arccos\xi)$, $\xi = \cos\varphi$ arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right) + \left(C - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)X(\xi) = 0.$$

Quest'equazione si chiama l'equazione per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi \to \pm 1$ esistono soltanto per $C = l(l+1)$ dove $l = m, m+1, m+2, \cdots$. Nel caso particolare $m = 0$ si ottiene l'equazione di Legendre

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right) + l(l+1)X(\xi) = 0,$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$.

Ritorniamo all'equazione per $R(r)$ con $C = l(l+1)$:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + k^2R(r) = \left(V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r),$$

dove $m = -l, -l+1, \cdots, l-2, l-1, l$.

4. Separazione in Coordinate Parabolico-Cilindriche. L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (I.5). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)}\right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)}\right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$U''(u) + (\mu - \lambda^2c^2u^2)U(u) = 0,$$
$$V''(v) - (\mu + \lambda^2c^2u^2)V(v) = 0,$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu + 1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) = 0, \\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) = 0. \end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \tag{I.7}$$

dove u, z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2}\, v, \tag{I.8}$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \tag{I.9}$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ la (I.9) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (I.7) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

Capitolo II

SPAZI DI BANACH E DI HILBERT

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari $\mathbb{F}$ che supponiamo uguale a $\mathbb{R}$ (numeri reali) oppure a $\mathbb{C}$ (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)

b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)

c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \, \|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)

d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Uns successione $\{\varphi_n\|_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X. Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \to Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U che converge a φ. La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di $\mathbb{R}^n$,[1] sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω. Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \max_{z\in\Omega} |f(x)|,$$

   introduce una norma completa in $C(\Omega)$.

2. Per ogni sottoinsieme limitato Ω di $\mathbb{R}^n$,[2] sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue **e limitate** in Ω. Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(x)|,$$

   introduce una norma completa in $C(\Omega)$.

3. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

   è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

[1] In generale, per ogni spazio compatto di Hausdorff Ω

[2] In generale, per ogni spazio di Tychonoff Ω, cioè per ogni sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff.

4. Sia $1 \le p < \infty$. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^p(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili alla potenza p-esima (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$,
$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$
è una norma completa in $L^p(\Omega)$.

5. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \to \mathbb{R}$,
$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \right)^{1/2},$$
è una norma completa in ℓ^2.

6. Sia $1 \le p < \infty$. Sia ℓ^p lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$,
$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p},$$
è una norma completa in ℓ^p.

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme
$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$
è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ. Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in X$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X, la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U.

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X. Dato il sottoinsieme U di X, la sua *chiusura* $\overline{U}$ è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U.

Dato il sottoinsieme U di X, la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una succesione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che
$$\partial U = \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\mathrm{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in X\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r \geq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per un opportuno vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D. Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{F}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)

b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)

c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)

d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$, (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $(\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$.

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*[3]

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare[4]

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \qquad \varphi, \psi \in X.$$

[3]Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4(\varphi, \chi)|^2 - 4\|\varphi\|^2 \, \|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$.

[4]Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\| \, \|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert.* Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert.*

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallologramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2, & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$,

   $$(f, g) = \left(\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx \right)^{1/2},$$

   è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$,

   $$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \left(\sum_{n=1}^\infty x_n\, \overline{y_n} \right)^{1/2},$$

   è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza

1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \\ \varphi_2 = \dfrac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \dfrac{\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \dfrac{\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{cases}$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \ldots, N$).

Per trovare la base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ dalla base $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ in modo non iterativo, si consideri la matrice di Gram

$$G = \{(\psi_n, \psi_m)\}_{n,m=1}^N.$$

Sostituendo

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_{nk}\psi_k, \quad \varphi_m = \sum_{l=1}^m c_{ml}\psi_l,$$

e richiedendo che $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ (essendo δ_{nm} la delta di Kronecker), otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{nk}\overline{c_{ml}}(\psi_k, \psi_l).$$

In altre parole, si cerchi una matrice sottotriangolare $C = (c_{nm})_{n,m=1}^N$ tale che

$$CGC^* = \mathbb{I},$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità e C^* è la trasposta coniugata di C. Quindi bisogna trovare una matrice sottotriangolare L (con trasposta coniugata L^*) tale che vale la cosiddetta fattorizzazione di Cholesky $G = LL^*$ e poi invertire la L: $C = L^{-1}$. Per ottenere un risultato unico si richiede che L_{11} sia positivo.

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^N |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N, si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X. Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione finita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X, risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

di dimensione N, si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se $N \to \infty$.[5] Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \lambda_n)\lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N.

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \to \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty} ,$$

[5]Sia $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \left\|\varphi - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\varphi_n\right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ $(n = 1, \ldots, N)$.

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2. Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2. Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2. Concludiamo che, tranne una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

4 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\, e^{inx} \right|^2 dx = 0.$$

2. In $X = L^2(-\pi,\pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, & n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, & n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} \left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\right|^2 dx = 0.$$

3. Sia $X = L^2(-1,1)$. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono le versioni normalizzate dei *polinomi di Legendre*. Infatti, moltiplicando questi polinomi da costanti positive tali che hanno il valore 1 in $x = 1$, risultano i soliti *polinomi di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,(n!)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

soddisfacenti

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}.$$

Data una funzione $f \in L^2(-1,1)$ e definendo i coefficienti

$$\beta_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\,dx, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

Tabella II.1: I polinomi ortogonali classici

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1,1)$	1
Chebyshev di 1^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1,1)$	$(1-x^2)^m$ per $m=1,2,3,\ldots$
Jacobi	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha,\beta>-1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1,1)$	$(1-x^2)^\lambda$ con $\lambda>-1$
Laguerre	$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha>-1$
Hermite	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1}\,|\beta_l|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l P_l(x)$$

nel senso che

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(x) \right|^2 dx = 0.$$

4. Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n} w(x)\,dx < \infty$ ($n=0,1,2,\ldots$). Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x)=x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rispetto al peso w, dove il grado di pn è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f\in L^2(I;w\,dx)$ e definendo i coeffienti

$$c_n = \int_I f(x)p_n(x)w(x)\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n p_n(x) \right|^2 w(x)\,dx = 0.$$

5 Operatori lineari

Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \to Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \qquad x_1, x_2 \in X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\mathrm{Im}\,(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y. Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\mathrm{Ker}\,T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y.

Proposizione II.2 *Un operatore lineare $T : X \to Y$ è invertibile se e solo se $Im T = Y$ e $Ker T = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se T è invertibile, si ha ovviamente $\mathrm{Im}\,T = Y$ e $\mathrm{Ker}\,T = \{0\}$. D'altra parte, se $\mathrm{Im}\,T = Y$ e $\mathrm{Ker}\,T = \{0\}$, per ogni $y \in Y$ l'equazione $Tx = y$ ha almeno una soluzione $x \in X$ (poichè $\mathrm{Im}\,T = Y$). Se ci fossero $x_1, x_2 \in X$ tali che $Tx_1 = Tx_2 = y$, allora $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$ e quindi $x_1 - x_2 = 0$ (poichè $\mathrm{Ker}\,T = \{0\}$) e $x_1 = x_2$. Quindi la soluzione $x \in X$ dell'equazione $Tx = y$ è unica per ogni $y \in Y$. □

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T. Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \to Y$ è limitato.

a. Sia $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonica di F^n. Allora ogni operatore limitato $T : F^n \to Y$ può essere rappresentato come

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i.$$

Se si applica ad una matrice, la norma si chiama *norma spettrale*.[6] Utilizzando questa rappresentazione, si dimostri la limitatezza di T.

b. Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \to Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Si dimostri questo fatto.

Proposizione II.3 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. T è un operatore limitato.

b. $T : X \to Y$ è una funzione uniformemente continua.

c. $T : X \to Y$ è una funzione continua.

d. $T : X \to Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a)$\Longrightarrow$(b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T: $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(d)] Ovvio.

[(d)$\Longrightarrow$(a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. □

Consideriamo adesso lo spazio normato $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y, dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Se $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$), $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con lo spazio delle matrici $n \times m$.

Proposizione II.4 *Siano X, Y spazi di Banach. Allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$. In altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ per $n, m > \nu$.

[6] La norma spettrale di una matrice è uguale al suo numero singolare più grande.

Per $x \in X$ abbiamo la successione di Cauchy $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ in Y. Per $x = 0$ questo è chiaro. Per $x \neq 0$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$ se $n, m > \nu$, mentre $\varepsilon \|x\|$ è una costante positiva arbitraria. Siccome Y è uno spazio completo, esiste, per ogni $x \in X$, un vettore $Tx \in Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$. Si dimostra facilmente che T è un operatore lineare. Inoltre, per quel $\nu = \nu(\varepsilon)$ si ha $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$ se $n > \nu$ (calcolando il limite se $m \to \infty$). Quindi per un opportuno $n_0 > \nu$ si ha

$$\|Tx\| \leq \|T_{n_0} x - Tx\| + \|T_{n_0}\| \|x\| \leq (\varepsilon + \|T_{n_0}\|) \|x\|, \qquad x \in X,$$

implicando la limitatezza di T. Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$ se $n > \nu$, si ha $\|T_n - T\| \to 0$ se $n \to \infty$. In altre parole, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ è convergente in $\mathcal{L}(X, Y)$. □

Discutiamo due esempi.

a. Sullo spazio ℓ^1 definiamo l'operatore A come

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} x_j, \qquad \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty},$$

dove $\{a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ è una matrice infinita. Allora A è limitato se

$$\|A\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i,j}| < +\infty.$$

Infatti, sotto questa condizione abbiamo

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |(A\mathbf{x})_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| |x_j| \leq \|A\| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|A\| \|\mathbf{x}\|_1.$$

Abbiamo infatti trovato il valore esatto della norma di A, ma questo non verrà dimostrato.

b. Sullo spazio $L^2(G)$ e per qualsiasi funzione misurabile limitata h su G definiamo l'operatore M da

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \qquad x \in G.$$

Allora hf è misurabile se f è misurabile. Inoltre,

$$\|hf\|^2 = \int_G |h(x)f(x)|^2 \, dx \leq \|h\|_\infty^2 \int_G |f(x)|^2 \, dx = \|h\|_\infty^2 \|f\|_2^2,$$

dove $\|h\|_\infty = \sup_{x \in G} |h(x)|$. Quindi M è limitato su $L^2(G)$. Si dimostra nella stessa maniera che M è limitato su $L^1(G)$. In entrambi i casi $\|h\|_\infty$ è un maggiorante della norma di M. Infatti $\|h\|_\infty$ è il valore esatto della norma, ma questo non verrà dimostrato.

Finora tutte le dimostrazioni sono state abbastanza elementari. Il prossimo teorema non è facile da dimostrare e richiede una certa proprietà topologica (quella di Baire) degli spazi metrici completi.

Teorema II.5 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.*

Il prossimo teorema fornisce un algoritmo per dimostrare l'invertibilità di un operatore limitato e per calcolare (almeno in principio) la sua inversa. L'operatore inverso verrà costruito come la somma della cosiddetta *serie di Neumann* che generalizza la serie geometrica. Abbiamo bisogno dell'operatore d'identità I_X (oppure I se non c'è pericolo di confusione) su uno spazio di Banach X: Si definisca $I_X x = x$ per ogni $x \in X$.

Teorema II.6 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora T è invertibile se $\|I - T\| < 1$. In tal caso*

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (I-T)^j,$$

dove $(I-T)^0 = I_X$ e la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$.

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali

$$S_n = I + (I-T) + (I-T)^2 + \cdots + (I-T)^n = \sum_{j=0}^{n} (I-T)^j.$$

Si vede subito (o quasi subito) che

$$TS_n = S_n T = S_n - (I-T)S_n = S_n - S_{n+1} + I. \tag{II.1}$$

Adesso facciamo la stima [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+p} (I-T)^j \right\| \le \sum_{j=n+1}^{n+p} \|I-T\|^j \le \frac{\|I-T\|^{n+1}}{1 - \|I-T\|},$$

ciò implica che $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$. Dalla Proposizione II.4 segue l'esistenza di $S \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|S_n - S\| \to 0$ se $n \to \infty$. Calcolando il limite in (II.1) se $n \to \infty$, otteniamo

$$TS = ST = S - (I-T)S = S - S + I.$$

Di conseguenza $TS = ST = I$, cioè $S = T^{-1}$. □

Dalla serie di Neumann si ottiene facilmente

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$$

se $\|I - T\| < 1$.

Corollario II.7 *Siano X, Y spazi di Banach, $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e T invertibile. Se*

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

allora S è invertibile. In altre parole, l'insieme degli operatori invertibili in $\mathcal{L}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dimostrazione. Ovviamente, $T^{-1}S \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre,

$$\left\|I_X - T^{-1}S\right\| = \left\|T^{-1}[T - S]\right\| \leq \|T^{-1}\|\|T - S\| < \|T^{-1}\|\|T^{-1}\|^{-1} = 1$$

implica (secondo il teorema precedente) che $T^{-1}S$ è invertibile. In tal caso S è invertibile. □

6 Spettro di un operatore lineare

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ.

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ, più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$ implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$ per trovare tutti gli autovalori di T. Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo *spettro* di T, $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T. Il numero complesso λ appartiene al *risolvente* di T, $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$.

Teorema II.8 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto non limitato.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(T)$. Se $|\mu-\lambda| < \|(\lambda-T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\mu \in \rho(T)$. Questo segue subito dal Corollario II.7, poichè $(\mu-\lambda)I_X = (\mu-T)-(\lambda-T)$. Quindi $\rho(T)$ è un aperto in $\mathbb{C}$.

Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \tag{II.2}$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è un insieme chiuso contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$. □

Utilizzando il teorema di Liouville dell'analisi complessa e il teorema di Hahn-Banach dell'analisi funzionale, si può dimostrare che lo spettro di un operatore lineare limitato non è mai vuoto. Quindi il suo risolvente non è mai l'intero piano complesso.

Sia $r(T)$, il *raggio spettrale* di T, il minimo di tutti gli r per cui la serie (II.2) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \le \|T\|$ e $\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T. Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze, troviamo

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di $\mathbb{C}$ in quattro insiemi due a due disgiunti.

a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.

b. Se $\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\operatorname{Im}(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo *spettro continuo* di T. In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.

c. Se $\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$ e $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X, si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo *spettro residuo* di T].

d. Se $\operatorname{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T. L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\operatorname{Ker}(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

Per determinare lo spettro continuo più facilmente, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma II.9 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Sia $\sigma_{ap}(T)$*[7] *l'insieme di tutti i λ tali che $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ per un'opportuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n\| = 1$. Allora*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $0 \neq x \in X$ è un corrispondente autovettore, prendiamo $x_n = (x/\|x\|)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso $(\lambda - T)x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $\lambda \in \alpha_{ap}(T)$. Quindi $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon$ se $\|x\| = 1$. In tal caso si ha

$$\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon\|x\|, \qquad x \in X.$$

Quindi λ non è un autovalore di T. Se $y \in \mathrm{Im}\,(\lambda - T)$, esiste un unico vettore $x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = y$. In tal caso

$$\|(\lambda - T)^{-1}y\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\|, \qquad y \in \mathrm{Im}\,(\lambda - T). \tag{II.3}$$

Se $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ non è denso in X, ne segue che $\lambda \in \sigma_r(T)$. Se $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è denso in X, la stima (II.3) si estende ad $y \in X$ per continuità, e dunque $\lambda \in \rho(T)$. In altre parole, $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T) \subset \rho(T) \cup \sigma_r(T)$, oppure $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \rho(T)$, esistono $M, m > 0$ tali che $M\|x\| \geq \|(\lambda - T)x\| \geq m\|x\|$ per ogni $x \in X$ (infatti, $M = \|\lambda - T\|$ e $m = \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$). Quindi se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione con $\|x_n\| = 1$, non si ha $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Ne segue che $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. □

7 Operatori lineari autoaggiunti e unitari

Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in X.$$

Utilizzando l'esercizio 1.3 si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< T^*x, y >| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< x, Ty >| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.

---

[7] L'insieme si dice "approximate point spectrum.

1.8. Si dimostrino le seguenti proprietà: $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ $[(\lambda T)^* = \lambda T^*$ in uno spazio di Hilbert reale], $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(TS)^* = S^* T^*$, $(T^*)^* = T$.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

a. Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.
b. Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.
c. Gli operatori *normali*: $TT^* = T^*T$. Osserviamo che gli operatori autoaggiunti e unitari sono ambedue normali.

1.9. Sia X uno spazio di Hilbert *complesso* e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si dimostri che T è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$. Si consiglia sviluppare il prodotto scalare $(T(x+iy), x+iy)$ per $x, y \in X$, utilizzando che $(Tz, z) \in \mathbb{R}$ per $z = x$, $z = y$ e $z = x + iy$. Il risultato non vale in uno spazio di Hilbert reale.

Teorema II.10 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \overline{\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Secondo il Lemma II.9 esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ se $n \to \infty$. Allora la stima $|((\lambda - T)x_n, x_n)| \leq \|(\lambda - T)x_n\| \|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{II.4}$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$, segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X, esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\overline{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\overline{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (II.4) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo chiuso e limitato più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \qquad x \in X.$$

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \geq ((\lambda - T)x, x) \geq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. $\square$

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo chiuso e limitato reale più piccolo che contiene lo spettro di T. In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema II.11 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \qquad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \to \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. $\square$

Passiamo ora agli operatori unitari. Utilizzando la formula di polarizzazione si può dimostrare che un'isometria (cioè, un operatore lineare U su uno spazio di Hilbert X tale che $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ per ogni $\varphi \in X$) ha la proprietà

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X,$$

e quindi la proprietà

$$(U^*U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Quest'ultimo implica che U è un'isometria in X se e solo se $U^*U = I_X$. Nella stessa maniera si vede che un operatore U ha la proprietà che U^* è un'isometria se e solo se $UU^* = I_X$. Conclusione: U è un operatore unitario se e solo se U e U^* sono ambedue isometrie se e solo se U è un'isometria invertibile. Siccome in tal caso anche U^n e $U^{-n} = (U^{-1})^n$ sono isometrie ($n = 1, 2, 3, \ldots$) se U è unitario, risulta

$$\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Di conseguenza,

$$r(U) = r(U^{-1}) \leq 1,$$

e quindi $\sigma(U) \subset \{z \in C : |z| = 1\}$.

Capitolo III

Funzioni Test, Distribuzioni e Applicazioni

In questo capitolo discuteremo le distribuzioni, le funzioni test e loro applicazioni principali. Il motivo principale per introdurre le distribuzioni nella seconda metà degli anno 40 è stato la giustificazione rigorosamente matematica della funzione delta di Dirac utilizzata in fisica teorica. Secondo i libri di testo in fisica la funzione $\delta(x-x_0)$ è una funzione con valori uguali a zero per $x \neq x_0$, con il valore $+\infty$ per $x = x_0$ e tale che l'integrale $\int \delta(x-x_0)\, dx = 1$. Una tale funzione non si puo' inquadrare nell'ambito delle funzioni misurabli, poichè essa si annulla quasi ovunque ma il suo integrale è uguale a 1. D'altra parte, se $f(x)$ è una funzione, si ha

$$\int f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0).$$

Quindi si potrebbe inquadrare la funzione delta di Dirac come l'applicazione lineare $f \mapsto f(x_0)$ applicata ad un'opportuna classe di funzioni test f. Siccome deve avere senso il valore della f nel punto x_0, la f deve essere almeno continua.

Una possibile descrizione della funzione delta è la sua rappresentazione come caso limite di una successione $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni δ_n abbastanza regolari tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\delta_n(x-x_0)\, dx = f(x_0)$$

per un'opportuna classe di funzioni test f. Per esempio, se il dominio della funzione delta fosse la retta reale, ci sarebbero le seguenti possibilità:

a. $\delta_n(x) = n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{2n}$;

b. $\delta_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$;

c. $\delta_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}$;

d. $\delta_n(x) = -n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$, $\delta_n(x) = 2n$ per $\frac{1}{2n} \leq |x| \leq \frac{1}{n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{n}$.

Osserviamo che 1) $\delta_n(x - x_0)$ ha una peak per $x = x_0$, 2) tende all'infinito se $x = x_0$, 3) tende a zero se $x \neq x_0$, e 4) verifica $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1$.

1 Funzionali Lineari

Sia X uno spazio di Banach reale o complesso (cioè $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Un'applicazioni lineare $\Phi : X \to \mathbb{F}$ tale che

$$|\Phi\varphi| \leq \text{cost.}\|\varphi\|, \qquad \varphi \in X,$$

si dice *funzionale lineare continuo* in X. Utilizzando

$$\|\Phi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\Phi\varphi\|$$

per normalizzare i funzionali lineari continui si ottiene uno spazio di Banach X^*, il cosiddetto *spazio duale.*

Se $X = \mathbb{F}^n$ ha dimensione finita n, esiste una corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari (continui) e i vettori $\psi \in \mathbb{F}^n$, dove

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \varphi_k \psi_k, & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \sum_{k=1}^n \varphi_k \overline{\psi}_k, & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

per $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ e $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Inoltre, se la norma è quella euclidea, si ha $\|\Phi\| = \|\psi\|$. Di conseguenza, X^* ha la stessa struttura di X.

Se X è uno spazio di Hilbert, esiste un'analoga corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari continui Φ in X e i vettori di X. Secondo il Teorema di Rappresentazione di Riesz (Riesz' representation theorem), per ogni $\Phi \in X^*$ esiste $\psi \in X$ tale che

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi), \qquad \varphi \in X.$$

Inoltre, $\|\Phi\| = \|\psi\|$.

Generalmente X^* non ha la stessa struttura di X se X è uno spazio di Banach separabile.

2 Funzioni Test

Sia $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un insieme limitato. Allora gli elementi di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si chiamano *funzioni test*. Per esempio,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che

a. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;

b. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se esiste un insieme limitato K tale che $\varphi_m(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ (qualunque sia m) e se $D^\alpha \varphi_m(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Spesso la terminologia funzione test viene utilizzata per gli elementi di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ più esteso di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$(1+|x|)^\beta = (1+|x_1|)^{\beta_1} \ldots (1+|x_n|)^{\beta_n}, \ x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Allora una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ appartiene ad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se essa è di classe C^∞ e $(1+|x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ tende a zero se $|x| \to \infty$, qualunque siano i multiindici α, β. Si vede facilmente che

a. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;

b. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, per ogni insieme limitato K, $(1+|x|)^\beta (D^\alpha \varphi_m)(x) \to (1+|x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque siano i multiindici $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

È chiaro che

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

La vera sorpresa è che $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sia un sottospazio lineare denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3 Distribuzioni

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice *localmente sommabile* se converge finito l'integrale $\int_E |f(x)|\,dx$ per ogni regione limitata E in $\mathbb{R}^n$. L'insieme di tutte le funzioni localmente sommabili è uno spazio vettoriale: $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Essenzialmente una distribuzione è un funzionale lineare: Per una distribuzione f e una funzione test φ si consideri il prodotto scalare (inglese: pairing)

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Purtroppo, invece di considerare due funzioni $f, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si prendano una distribuzione f in uno spazio vettoriale più esteso e una funzione test φ in uno spazio vettoriale più ristretto tali che

$$\lim_{m\to\infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ che converge a φ.

Più precisamente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m\to\infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ. Identificando $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con il funzionale lineare

$$\varphi \mapsto (f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_K f(x)\varphi(x)\,dx,$$

dove K è una regione limitato K fuori della quale si annulla la φ, si vede facilmente che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ovviamente $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale.

In modo analogo si definisce $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme di tutti i funzionali f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m\to\infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ. Ovviamente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale tale che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Purtroppo esistono funzioni localmente sommabili non contenute in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per esempio, $e^{|x|}$ appartiene ad $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ma non appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Fortunatamente le distribuzioni che importano alle applicazioni principali, appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

Una successione $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) converge a φ se

$$\lim_{m\to\infty}(f_m,\varphi)=(f,\varphi)$$

per ogni $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (risp., per ogni $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Discutiamo ora alcuni esempi.

a. Dato il punto $x_0\in\mathbb{R}^n$, il funzionale

$$\varphi\mapsto\varphi(x_0)$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), poichè per una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\varphi_m(x_0)\to\varphi(x_0)$. Questa distribuzione si chiama la distribuzione delta di Dirac:

$$(\delta_{x_0},\varphi)=\varphi(x_0).$$

b. Dato $x_0\in\mathbb{R}$, il funzionale

$$\varphi\mapsto\int_{x_0}\varphi(x)\,dx$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), poichè per una successione qualsiasi $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{x_0}^\infty\varphi_m(x_0)\,dx\to\int_{x_0}^\infty\varphi(x)\,dx.$$

Questa distribuzione si chiama la funzione di Heaviside:

$$(H_{x_0},\varphi)=\int_{x_0}^\infty\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^\infty H(x-x_0)\varphi(x)\,dx.$$

Si vede facilmente che $H(\cdot-x_0)\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

c. Una funzione localmente sommabile tale che per un certo $m\ge 0$

$$\int|f(x)|(1+|x|)^{-m}\,dx<+\infty,$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Per due funzioni $f,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè per due funzioni $f,\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano rapidamente se $|x|\to\infty$, abbiamo

$$(D^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi),$$

qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e per $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Infatti, per dimostrarlo si facciamo α_1 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_1, α_2 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_2, ecc. Ad ogni integrazione per parti si guadagna un meno e ci sono $|\alpha|$ integrazioni per parti in tutto. Tale formula si può ora utilizzare per definire $D^\alpha f$ per $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ [oppure: per $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$]. La derivazione $D^\alpha f$ non è quella classica. Tale derivazione si chiama *derivazione debole*.[1] La derivazione debole è una trasformazione lineare continua nel seguente senso: Se $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ è una successione che converge a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), allora $\{D^\alpha f_m\}_{m=1}^\infty$ converge a $D^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Ciò è chiaro, poichè

$$(D^\alpha f_m, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f_m, D^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi),$$

qualunque sia la funzione test φ.

Per esempio, calcoliamo ora la derivata debole H'_{x_0} della funzione di Heaviside H_{x_0}, dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$(H'_{x_0}, \varphi) = -(H_{x_0}, \varphi') = -\int_{x_0}^\infty \varphi'(x)\,dx = -\left[\varphi(x)\right]_{x=x_0}^\infty = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi),$$

e quindi

$$H'_{x_0} = \delta_{x_0},$$

essendo la distribuzione delta di Dirac. Purtroppo, non vale la relazione

$$\frac{d}{dx}\,H(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

in modo classico, poichè la derivata classica non esiste per $x = x_0$.

4 Trasformata di Fourier

4.1 Trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} F[f](\xi) = \int f(x) e^{-i(\xi,x)}\,dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)|\,dx$ è la norma L^1 di f. In tal caso si definisce una funzione

$$\xi \stackrel{\hat{f}}{\mapsto} F[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$$

[1]Tecnicamente i due pairing $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ e $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ conducono a due derivazioni deboli diversi, ma in pratica non c'è alcuna differenza, poichè le nostre distribuzioni appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

su $\mathbb{R}^n$ che si chiama la *trasformata di Fourier* della f. Segue che $\hat{f}(\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione III.12 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \to +\infty$.*[2]

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f], F[g] \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. In tal caso risulta per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(\hat{f}, g) &= \int \left[\int f(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx\right] g(\xi)\,d\xi \\ &= \int f(x)\left[\int g(\xi)e^{-i(\xi,x)}\,d\xi\right] dx = (f, \hat{g}); \end{aligned} \tag{III.1}$$

$$\begin{aligned}(\hat{f}, g)_c &= \int \left[\int f(x)e^{-i(x,\xi)}dx\right] \overline{g(\xi)}d\xi \\ &= \int f(x)\left[\overline{\int g(\xi)e^{i(\xi,x)}d\xi}\right] dx = (f, \hat{g}(-\xi))_c. \end{aligned} \tag{III.2}$$

Inoltre, $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso di $L^2(\mathbb{R}^n)$, mentre $(\cdot,\cdot)$ è quello reale.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

conduce ad una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Segue che

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h),$$

dove $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x - y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned}F[f * g](\xi) &= \int \left(\int f(y)g(x-y)\,dy\right) e^{-i(x,\xi)}\,dx \\ &= \int \left(\int f(y)e^{-i(y,\xi)}g(z)e^{-i(z,\xi)}\,dy\right) dz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \end{aligned} \tag{III.3}$$

In altre parole, la trasformata di Fourier manda $L^1(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto di convoluzione in $C(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto algebrico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

[2] La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema III.13 (*di Plancherel*). *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int |f(x)|^2 \, dx. \tag{III.4}$$

Inoltre, F ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa (III.4) *per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Siccome $c_n[e^{-ixt} f] = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n + t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(n + t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (III.4) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ che soddisfa (III.4). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbb{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. $\square$

Corollario III.14 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i(x,\xi)}\, dx. \tag{III.5}$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \overline{g}) = (f, F[\overline{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dalla (III.4) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n} (F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n} (f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (III.5). $\square$

Dal Corollario III.14 si vede subito che $(2\pi)^{-n/2}F$ è un operatore lineare unitario sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione dell'operatore lineare $(2\pi)^{-n/2}F$ ad una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non ne cambia la norma L^2.

4.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

La proprietà rimarchevole della classe $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

4.2.a Trasformazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Visto che le funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono sommabili in $\mathbb{R}^n$, su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ, è limitata e continua in $\mathbb{R}^n$. La funzione φ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (-ix)^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx = F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi), \tag{III.6}$$

da cui segue che $\hat{f} = F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\beta\varphi$ e quindi

$$\begin{aligned} F[D^\beta\varphi](\xi) &= \int \left(D^\beta\varphi(x)\right) e^{-i(\xi,x)}\, dx = (-1)^{|\beta|} \int \varphi(x) \left(D^\beta e^{-i(\xi,x)}\right) dx \\ &= (-1)^{|\beta|}(-i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx = (i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx. \end{aligned} \tag{III.7}$$

Infine, dalle formule (III.6) e (III.7) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\beta|}(i\xi)^\beta F[(-ix)^\alpha\varphi](\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha\varphi)](\xi). \tag{III.8}$$

Dall'uguaglianza (III.8) segue che per tutti gli α, β i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta(x^\alpha\varphi)|\, dx. \tag{III.9}$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su $\mathbb{R}^n$, allora, siccome $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{III.10}$$

dove

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \tag{III.11}$$

Dalle formule (III.10) e (III.11) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$. Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre in modo univoco.

Lemma III.15 *La trasformazione di Fourier F è un'applicazione continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, applicando la (III.9) alle funzioni φ_k, si ottiene per tutti gli α, β

$$
\begin{aligned}
|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|\, dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha\varphi_k)|(1+|x|)^{n+1} \int \frac{dy}{(1+|y|)^{n+1}},
\end{aligned}
$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il lemma è dimostrato. □

La trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

4.2.b Trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Assumiamo l'uguaglianza (III.1) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{III.12}$$

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 3.1, $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \to 0$ per $k \to \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In questo caso, in base alla (III.12), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1}:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{III.13}$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F, cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{III.14}$$

Infatti, dalle (III.10)-(III.13) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
&(F^{-1}[F[f]], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f](-\xi), F[\varphi]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\
&= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi),
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al sesto ed al settimo passaggio.[3] Ora seguono le formule (III.14).

Dalle formule (III.14) deriva che ogni distribuzione f appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della distribuzione $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in modo biunivoco e continuo.

Supponiamo che $f = f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{III.15}$$

Come nel Lemma 3.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(\xi, x)}\, d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, di modo che la formula (III.15) definisce realmente una distribuzione $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{-i(\xi, x_0)}. \tag{III.16}$$

[3] Si noti che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$.

Infatti,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x-x_0)],\varphi) &= (\delta(x-x_0),F[\varphi]) = F[\varphi](x_0)\\ &= \int \varphi(\xi)e^{-i(\xi,x_0)}\,d\xi = (e^{-i(\xi,x_0)},\varphi), \qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Ponendo nella (III.16) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \tag{III.17}$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n}F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n\delta(\xi). \tag{III.18}$$

4.2.c Proprietà della trasformazione di Fourier

(a) **Derivazione della trasformata di Fourier**. Se $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(-ix)^\alpha f]. \tag{III.19}$$

Infatti, utilizzando la (III.7), si ottiene per tutte le $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&(D^\alpha F[f],\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F[f],D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,F[D^\alpha\varphi])\\ &= (-1)^{|\alpha|}(f,(ix)^\alpha F[\varphi]) = ((-ix)^\alpha f,F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f],\varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.19). In particolare, ponendo nella (III.19) $f = 1$ ed utilizzando la formula (III.18), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = i^{|\alpha|}D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n\, i^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi). \tag{III.20}$$

(b) **Trasformata di Fourier della derivata**. Se $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[D^\beta f] = (i\xi)^\beta F[f]. \tag{III.21}$$

Infatti, utilizzando la formula (III.6), si ottiene per tutte le $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&(F[D^\beta f],\varphi) = (D^\beta f,F[\varphi]) = (-1)^{|\beta|}(f,D^\beta F[\varphi])\\ &= (-1)^{|\beta|}(f,F[(-i\xi)^\beta\varphi]) = (-1)^{|\beta|}(F[f],(-i\xi)^\beta\varphi) = ((i\xi)^\beta F[f],\varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.21).

(c) **Trasformata di Fourier di una traslazione**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f(x-x_0)] = e^{-i(x_0,x)}F[f]. \tag{III.22}$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(F[f(x-x_0)],\varphi) &= (f(x-x_0),F[\varphi]) = (f,F[\varphi](x+x_0))\\ &= (f,F[\varphi e^{-i(x_0,\xi)}]) = (F[f],e^{-i(x_0,\xi)}\varphi) = (e^{-i(x_0,\xi)}F[f],\varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.22).

(d) **Traslazione della trasformata di Fourier**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f](\xi+\xi_0) = F[e^{i(\xi_0,x)}f](\xi). \tag{III.23}$$

Infatti, utilizzando la formula (III.22), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}F[f](\xi+\xi_0),\varphi) &= (F[f],\varphi(\xi-\xi_0)) = (f,F[\varphi(\xi-\xi_0)])\\ &= (f,e^{i(\xi_0,x)}F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0,x)}f,F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0,x)}f],\varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.23).

(e) **Trasformata di Fourier di rescaling**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n}F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{III.24}$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned}&(F[f(cx)],\varphi) = (f(cx),F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n}\left(f,F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right)\\ &= \frac{1}{|c|^n}\left(f,\int \varphi(\xi)e^{-i(\frac{x}{c},\xi)}\,d\xi\right) = (f,\int \varphi(c\xi')e^{-i(x,\xi')}\,d\xi') = (f,F[\varphi(c\xi)])\\ &= (F[f],\varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right),\varphi\right).\end{aligned}$$

5 Distribuzione in un Dominio

Sis Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{D}(\Omega)$ sarà lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω. Una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ è detta di convergere a φ se esiste un sottoinsieme chiuso e limitato K di Ω fuori del quale si annullano tutte le funzioni φ_m e tale che $(D^\alpha \varphi_m)(x)$ tende a $(D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$. Osserviamo che per $\Omega = \mathbb{R}^n$ la definizione di convegenza coincide con quella precedente. Evidentemente ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ può essere estesa ad una funzione test in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definendola uguale a zero fuori del dominio Ω. Di conseguenza, la distribuzioni appartenenti a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si possono applicare all (estensioni delle) funzioni test in $\mathcal{D}(\Omega)$. Ora definiamo $\mathcal{D}'(\Omega)$ come lo spazio vettoriale di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\Omega)$ che sono continui nel seguente senso: Se $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $(f, \varphi_m) \to (f, \varphi)$. In particolare, se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si annulla fuori di Ω quasi ovunque, allora $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Più precisamente,

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Le derivazioni deboli si definiscono ora in $\mathcal{D}'(\Omega)$ in modo naturale:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi), \;\; f \in \mathcal{D}'(\Omega), \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

qualunque sia il multiindice α.

Capitolo IV

PROBLEMI AL CONTORNO

In questo capitolo risolviamo alcuni problemi al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziale, dove il dominio ci permette di eseguire una separazione delle variabili.

1 Equazione di Laplace

1.1 Equazione di Laplace nel disco

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{IV.1}$$

nel disco $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial G. \tag{IV.2}$$

Assumiamo che f sia continua sul cerchio ∂G, e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. In coordinate polari l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove $0 \leq \theta < 2\pi$ (con periodicità) e $0 < r < L$ con continuità della soluzione per $r \to 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni $u_0(r)$, $u_m(r)\cos m\theta$ e $u_m(r)\sin m\theta$, dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e la funzione $u_m(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_m}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}u_m(r) = 0. \tag{IV.3}$$

L'equazione (IV.3) è un'equazione di Eulero $[r^2u''_m(r)+ru'_m(r)-m^2u_m(r)=0]$ con la soluzione generale

$$u_m(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r), & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2\, r^{-m}, & m = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. La continuità se $r \to 0^+$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^m se $m = 1, 2, \ldots$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right), \tag{IV.4}$$

dove $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sono opportune costanti.

Sostituiamo $r = L$ in (IV.4) e applichiamo la condizione al contorno $u(L,\theta) = f(\theta)$. Risulta

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right). \tag{IV.5}$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier abbiamo for $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta \\ a_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \qquad b_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \end{cases}$$

dove la serie (IV.5) è uniformente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ (e anche totalmente convergente) se $f(\theta)$ è continua (con $f(-\pi) = f(\pi)$) e regolare a tratti.

Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r,\theta)$. Risulta

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{L}\right)^n\left[\cos n\theta\cos n\hat{\theta}+\sin n\theta\sin n\hat{\theta}\right]\right)f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{L}\right)^n\cos n(\theta-\hat{\theta})\right]f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{L}e^{i(\theta-\hat{\theta})}\right)^n+\left(\frac{r}{L}e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\right)^n\right\}\right]f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[1+\left\{\frac{e^{i(\theta-\hat{\theta})}\frac{r}{L}}{1-e^{i(\theta-\hat{\theta})}\frac{r}{L}}+\frac{e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\frac{r}{L}}{1-e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\frac{r}{L}}\right\}\right]f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\left(\frac{r}{L}\right)^2}{1-2\frac{r}{L}\cos(\theta-\hat{\theta})+\left(\frac{r}{L}\right)^2}f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|L^2-r^2|}{L^2-2rL\cos(\theta-\hat{\theta})+r^2}f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta},
\end{aligned}$$

il cosiddetto *integrale di Poisson.* Osserviamo che il nucleo di Poisson

$$\frac{|L^2-r^2|}{L^2-2rL\cos(\theta-\hat{\theta})+r^2}$$

è simmetrico in r e L e simmetrico in θ e $\hat{\theta}$. Inoltre, è strettamente positivo; le sue uniche singolarità si trovano sulla circonferenza $r=L$ per $\theta=\hat{\theta}$.

Discutiamo adesso le proprietà delle funzioni $u(r,\theta)$.

Proposizione IV.1 *Sia $f\in L_2(-\pi,\pi)$. Allora $u\in L_2(G)$. Inoltre,*

$$\lim_{r\to L^-}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)-u(r,\theta)|^2\,d\theta=0. \tag{IV.6}$$

Dimostrazione. Applicando l'uguaglianza di Parseval alla (IV.5) si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}L^{2n}(|a_n|^2+|b_n|^2)<+\infty.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\|u\|^2_{L_2(G)} &= \int_0^L \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r|u(r,\theta)|^2\,d\theta\,dr \\
&= \frac{L^2|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L^{2n+2}}{2n+2}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right) \\
&\le \frac{L^2}{2}\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n}(|a_n|^2+|b_n|^2)\right] = \frac{1}{\pi}\frac{L^2}{2}\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}.
\end{aligned}
$$

In altre parole, $u \in L_2(G)$.

Per dimostrare la (IV.6), si calcoli

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)-u(r,\theta)|^2\,d\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\left(L^{2n}-r^{2n}\right)\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right),
$$

implicando la (IV.6). □

1.2 Equazione di Laplace nella sfera

Consideriamo l'equazione di Laplace (IV.1) nella sfera $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2} < L\}$ sotto la condizione al contorno (IV.2). Assumiamo che f sia continua sul cerchio ∂G, e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$. In coordinate sferiche l'equazione di Laplace ha la forma

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] = 0,
$$

dove $0<\varphi<\pi$, $0\le\theta<2\pi$ (con periodicità) e $0<r<L$ con continuità della soluzione per $r\to 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni

$$
r^l\,Y_l^m(\theta,\varphi),
$$

dove $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sono le funzioni sferiche ($l=0,1,2,\ldots$ e $m=-l,\ldots,l$). Tali funzioni hanno la forma

$$
Y_l^m(\varphi,\theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m\,\cos(m\theta), & m=0,1,\cdots,l; \\ P_l^{|m|}(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m\operatorname{sen}(|m|\theta), & m=-1,-2,\cdots,-l, \end{cases}
$$

dove $l=0,1,2,\cdots$. La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L_2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$
f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)}Y_l^m(\theta,\varphi),
$$

convergente in $L^2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0,m})} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi,$$

poichè le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L^2(S^2)$, ed inoltre

$$\|Y_l^m\|^2_{L^2(S^2)} = 2\pi \frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{l-|m|)!}.$$

In tal caso, la soluzione $u(r,\theta,\varphi)$ del problema al contorno (IV.1)-(IV.2) ha la seguente forma

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} \left(\frac{r}{L}\right)^l Y_l^m(\theta,\varphi).$$

1.3 Equazione di Laplace nel cilindro

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{IV.7}$$

nel cilindro $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < L,\ 0 < z < h\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial G \text{ del cilindro.}$$

Assumiamo che f sia continua sul bordo ∂G del cilindro e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ del problema al contorno. Tale soluzione è unica (perchè?). Suddividendo ∂G nei tre insiemi $\partial_L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = L,\ 0 \le z \le h\}$, $\partial_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le L,\ z = 0\}$ e $\partial_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le L,\ z = h\}$, scriviamo f come la somma $f_L + f_0 + f_h$ di tre funzioni con supporto in ∂_L, ∂_0 e ∂_h, rispettivamente. Le corrispondenti soluzioni u_L, u_0 e u_h dell'equazione di Laplace (IV.7) con condizione al contorno $u_L = f_L$, $u_0 = f_0$ e $u_h = f_h$ su ∂G soddisfano

$$u_l + u_0 + u_h = u,$$

grazie alla linearità del problema al contorno.

Risolviamo i tre problemi (per u_L, u_0 e u_h) separatamente, utilizzando le coordinate cilindriche (r,θ,z). In queste coordinate si ha $G = \{(r,\theta,z) : 0 <$

$r < L,\ 0 < z < h\}$. Applicando la separazione delle variabili all'equazione di Laplace in coordinate cilindriche

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{IV.8}$$

cioè sostituendo $u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ nella (IV.7) e utilizzando la condizione di periodicità $\Theta(\theta+2\pi)\equiv\Theta(\theta)$, otteniamo

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}=0, \tag{IV.9}$$

dove $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\Theta(\theta)$ è costante per $m = 0$ e $\Theta(\theta)$ è una combinazione lineare di $\cos m\theta$ e $\sin m\theta$ per $m = 1, 2, \ldots$.

Prima risolviamo il problema al contorno per u_L. Per convenienza scriviamo u al posto di u_L e f invece di f_L. In coordinate cilindriche si ha

$$u(r,\theta,0) = u(r,\theta,h) = 0 \implies Z(0) = Z(h) = 0,$$

mentre $Z''(z)/Z(z)$ è una costante C. Affinché $Z(z)$ sia non banale, questa costante C deve essere non positiva. Si ottiene

$$Z(z) \sim \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), \qquad C = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Dalla (IV.9) e dal valore di C troviamo

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\left(\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2+\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0.$$

Sostituendo $R(r) = \tilde{R}(\rho)$ per $\rho = n\pi r/h$, otteniamo l'equazione di Bessel immaginaria di ordine m

$$\frac{d^2\tilde{R}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{R}}{d\rho}-\left(1+\frac{m^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}(\rho)=0. \tag{IV.10}$$

L'unica soluzione della (IV.10) (tranne un fattore costante) limitata se $\rho \to 0^+$ è la funzione di Bessel immaginaria $I_m(\rho)$. Questa funzione è reale per $\rho > 0$, è proporzionale a $J_m(i\rho)$, e non ha nessuno zero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ciò segue dal fatto che la funzione di Bessel $J_m(\rho)$ non ha zeri non reali. Quindi $J_m(\rho) > 0$ per $\rho > 0$.

In variabili separate abbiamo trovato le soluzioni

$$\begin{cases} I_0\left(\dfrac{n\pi r}{h}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi z}{h}\right), & m = 0,\ n = 1, 2, \ldots, \\ I_m\left(\dfrac{n\pi r}{h}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi z}{h}\right)[c_1\cos m\theta + c_2\sin m\theta], & m, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Dunque la soluzione $u(r,\theta,z)$ si può sviluppare nella serie di Fourier

$$\begin{aligned}u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \Bigg[\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{IV.11}$$

dove

$$\begin{aligned}f(\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \left[\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right)\right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)\right].\end{aligned} \tag{IV.12}$$

Discutiamo ora la convergenza della serie (IV.12). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_L e si annulli su $\partial_L \cap [\partial_0 \cup \partial_h]$. Allora, per ogni $\theta \in [0,2\pi]$, $f(\theta,\cdot)$ è di classe C^1 in $[0,h]$, soddisfa $f(\theta,0) \equiv f(\theta,h) \equiv 0$ e $f(0,z) \equiv f(2\pi,z)$ e è di classe C^1 in $\theta \in [0,2\pi]$. Quindi la sua serie di Fourier in z è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di θ di classe C^1 che hanno gli stessi valori per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) \\ = \frac{2}{h}\int_0^h f(\theta,z)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,dz.\end{aligned} \tag{IV.13}$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville monodimensionali. Sia $Lu = -u''$ su $[0,2\pi]$ con condizioni periodiche $u(0) = u(2\pi) = 0$ e $u'(0) = u'(2\pi)$. Allora ogni $g \in C^1[0,2\pi]$ con $g(0) = g(2\pi)$ e $g'(0) = g'(2\pi)$ ha uno sviluppo uniformemente convergente

$$g(\theta) = \frac{g_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(g_{mc}\cos(m\theta) + g_{ms}\sin(m\theta)\right),$$

dove

$$g_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta, \qquad g_{mc} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta,$$

$$g_{ms} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(m\theta)\,d\theta, \qquad \|g\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \frac{|g_0|^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|g_{mc}|^2 + |g_{ms}|^2\right).$$

Torniamo al problema originale. Dalle (IV.13) si ha

$$a_{0n} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,z)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,d\theta dz;$$
$$a_{mn} I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,z)\cos m\theta\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,d\theta dz;$$
$$b_{mn} I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) = \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,z)\sin m\theta\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,d\theta dz,$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)^2\right)$$
$$= \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta,z)|^2\,d\theta dz.$$

Nel modo analogo si ottiene dalla (IV.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right) I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)^2\right)$$
$$= \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz,$$

e dalla (IV.11) e (IV.12)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}\left[I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\right]^2\right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right)\left[I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) - I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\right]^2\right)$$
$$= \frac{2}{\pi h}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta,z)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz.$$

Quindi

$$\lim_{r\to L^-}\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta,z)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz = 0. \tag{IV.14}$$

Adesso risolviamo i problemi al contorno per la u_0 e u_h, cioè sotto l'ipotesi che $f(L,\theta,z)\equiv 0$ e ponendo $u = u_0 + u_h$ e $f = f_0 + f_h$. In tal caso sfruttiamo il fatto che dalla separazione delle variabili segue:

$$\frac{1}{R(r)}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2} = C$$

è costante. Affinché ci sia una soluzione non banale limitata se $r \to 0^+$ e con uno zero per $r = L$, bisogna scegliere la costante C tale che risulta l'equazione di Bessel [cioè, $C < 0$] invece dell'equazione di Eulero [$C = 0$] e l'equazione di Bessel immaginaria [$C > 0$]. Ponendo $C = -\nu^2$ con $\nu > 0$, risulta

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R(r) = 0.$$

La sostituzione $\tilde{R}(\rho) = R(r)$ e $\rho = r\nu$ conduce all'equazione di Bessel di ordine m

$$\frac{d^2\tilde{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{R}}{d\rho} + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \tilde{R}(\rho) = 0.$$

Affinché la sua soluzione sia limitata se $\rho \to 0^+$, bisogna richiedere $\tilde{R}(\rho) \sim J_m(\rho)$. Siano $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \ldots$ gli infiniti zeri della funzione di Bessel $J_m(\cdot)$ in $(0, +\infty)$. Allora la condizione al contorno

$$u(L, \theta, z) = 0 \implies R(L) = 0$$

implica che $\nu L = \nu_{mn}$ per qualche $n = 1, 2, \ldots$. Di conseguenza,

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = \nu^2 = \left(\frac{\nu_{mn}}{L}\right)^2.$$

In tal caso

$$Z(z) \sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn}z}{L}\right) \qquad \begin{cases} u = u_h, \ f = f_h, \\ \text{quindi se } u(r,\theta,0) = 0 \text{ e } f(r,\theta) = 0; \end{cases}$$

$$Z(z) \sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h-z)}{L}\right) \qquad \begin{cases} u = u_0, \ f = f_0, \\ \text{quindi se } u(r,\theta,h) = 0 \text{ e } f(r,\theta) = 0. \end{cases}$$

Nel primo caso [$u(r, \theta, 0) = 0$ e $f(r, \theta) = 0$] si ha lo sviluppo

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{0n}z}{L}\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn}z}{L}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{IV.15}$$

dove

$$\begin{aligned} f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right) \sinh(\nu_{0n}) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{IV.16}$$

mentre nel secondo caso $[u(r,\theta,h)=0$ e $f(r,\theta)=0]$ si ha lo sviluppo

$$u(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{0n}}{2}J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{0n}(L-z)}{L}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta\right)J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h-z)}{L}\right)\right], \tag{IV.17}$$

dove

$$f(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{0n}}{2}J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right)\sinh(\nu_{0n})\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta\right)J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)\right], \tag{IV.18}$$

Discutiamo ora la convergenza delle serie (IV.16) e (IV.18). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_h [rispettivamente, ∂_0] e si annulli su $\partial_h\cap\partial_L$ [rispettivamente, $\partial_0\cap\partial_L$]. Allora, per ogni $r\in[0,L]$, $f(r,\cdot)$ è di classe C^1 in $[-\pi,\pi]$, soddisfa $f(r,-\pi)\equiv f(r,\pi)$, è di classe C^1 in $r\in[0,L]$ e si annulla per $r=L$. Quindi la sua serie di Fourier è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di r di classe C^1 che si annullano per $r=L$. Si ha Analogamente alle (IV.13) si ha in ambedue casi

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{0n}J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{0n}h}{L}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\,d\theta; \tag{IV.19}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\cos m\theta\,d\theta; \tag{IV.20}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\sin m\theta\,d\theta. \tag{IV.21}$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville. Sia $Lu=-(ru')'+(m^2/r)$ con condizioni al contorno $u(r)=O(1)$ per $m=0$, $u(r)=O(r)$ per $m=1,2,\ldots$, e $u(L)=0$, e problema agli autovalori $(Lu)(r)=\nu ru(r)$.Allora gli autovalori sono ν_{mn}^2 e le autofunzioni sono $J_m(\nu_{mn}r/L)$ dove μ_{mn} è lo zero positivo n-esimo delle $J_m(\cdot)$ $(n=1,2,\ldots)$. Essi sono ortogonali nello spazio di Hilbert $L_2([0,L];r\,dr)$. Inoltre,

$$\int_0^L rJ_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)^2dr=L^2\int_0^1 xJ_m(\nu_{mn}x)^2\,dx=\frac{L^2}{2}J_m'(\mu_{mn})^2.$$

Allora ogni $g \in C^2((0,L])$ che soddisfa le condizioni al contorno in $r=0$ ed $r=L$ e la condizione $-(rg')' + (m^2/r)g \in L_2([0,L]; r\,dr)$ [cioè, $g \in \mathcal{M}_{L_m}$.si può sviluppare nella serie uniformemente convergente

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right),$$

dove

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{2}{L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \int_0^L g(r) J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) dr; \\ \|g\|^2_{L_2([0,L]; r\,dr)} &= \frac{L^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 J_m'(\nu_{mn})^2. \end{aligned}$$

Partendo dalle (IV.19)-(IV.21), si ha

$$a_{0n} \sinh \left(\frac{\nu_{0n} h}{L} \right) = \frac{2}{\pi L^2 J_0'(\nu_{0n})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) J_0 \left(\frac{\nu_{0n} r}{L} \right) d\theta dr; \tag{IV.22}$$

$$a_{mn} \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) = \frac{2}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) \cos m\theta J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) d\theta dr; \tag{IV.23}$$

$$b_{mn} \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) = \frac{2}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) \sin m\theta J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) d\theta dr, \tag{IV.24}$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J_0'(\mu_{0n})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{0n} h}{L} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J_m'(\mu_{mn})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{mn} h}{L} \right] \right]$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r,\theta)|^2 \, d\theta dr.$$

Nel modo analogo si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J_0'(\mu_{0n})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{0n} z}{L} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J_m'(\mu_{mn})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{mn} z}{L} \right] \right]$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}J_0'(\mu_{0n})^2\left[\sinh\left(\frac{\nu_{0n}h}{L}\right)-\sinh\left(\frac{\nu_{0n}z}{L}\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2)J_m'(\mu_{mn})^2\left[\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)-\sinh\left(\frac{\nu_{mn}z}{L}\right)\right]^2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi L^2}\int_0^L\int_{-\pi}^{\pi} r|f(r,\theta)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dr.$$

Di consequenza, se f ha il suo supporto su ∂_0 (∂_h, rispettivamente), allora

$$\int_0^L\int_{-\pi}^{\pi} r|f(r,\theta)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dr$$

tende a zero se $z\to 0^+$ ($z\to h^-$, rispettivamente).

2 Equazione di Helmholtz

2.1 Equazione di Helmholtz sull'Intervallo

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$u''+k^2u=0,\qquad 0<x<L, \tag{IV.25}$$

con una delle seguenti condizioni al contorno:

$$u(0)=u(L)=0,\qquad \text{Dirichlet} \tag{IV.26}$$
$$u'(0)=u'(L)=0,\qquad \text{Neumann} \tag{IV.27}$$
$$u(0)=u'(L)=0,\qquad \text{Dirichlet a sinistra, Neumann a destra} \tag{IV.28}$$
$$u'(0)=u(L)=0,\qquad \text{Neumann a sinistra, Dirichlet a destra} \tag{IV.29}$$
$$u(0)=u(L),\ u'(0)=u'(L),\qquad \text{condizioni periodiche} \tag{IV.30}$$
$$u(0)=0,\ (\cos\alpha)u(L)+(\sin\alpha)u'(L)=0, \tag{IV.31}$$
$$(\cos\beta)u(0)-(\sin\beta)u'(0)=0,\ (\cos\alpha)u(L)+(\sin\alpha)u'(L)=0, \tag{IV.32}$$

dove $0\le\alpha\le(\pi/2)$ e $0\le\beta\le(\pi/2)$. Le condizioni nelle (IV.31) e (IV.32) si chiamano miste. In tutti i casi determineremo gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno. In tutti i casi gli autovalori k^2 sono positivi, tranne nel caso delle condizioni di Neumann (IV.27) dove uno degli autovalori si annulla.

a. Condizioni di Dirichlet. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k>0$. Utilizzando la condizione $u(0)=0$ si ottiene

$$u(x)\sim\sin(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin(n\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{IV.33}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

b. Condizioni di Neumann. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos(n\pi x/L)$ per $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}, \\ \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2, & \varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right), \end{cases} \tag{IV.34}$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

c. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e di Neumann in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n-\frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin((n-\frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n = 1,2,3,\ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0,L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\right), \tag{IV.35}$$

dove $n = 1,2,3,\ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0,L)$.

d. Condizione di Neumann in $x = 0$ e di Dirichlet in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n-\frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos((n-\frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n = 1,2,3,\ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0,L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\right), \tag{IV.36}$$

dove $n = 1,2,3,\ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0,L)$.

e. Condizioni periodiche. Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0 = 0, \\ \varphi_n^c(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2, \\ \varphi_n^s(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2, \end{cases} \tag{IV.37}$$

dove $n = 1,2,3,\ldots$. Quindi l'autovalori zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno moltiplicità 2.

f. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e mista in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $(\cos\alpha)u(L) + (\sin\alpha)u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos\alpha\,\sin(kL) + k\sin\alpha\,\cos(kL) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Escludendo i casi già trattati, cioè $\alpha = 0$ [Dirichlet] e $\alpha = (\pi/2)$ [Dirichlet in $x = 0$ e Neumann in $x = L$], risultano $k > 0$, $\sin(kL) = 0$ e $\cos(kL) \neq 0$. Arriviamo all'equazione transcedentale

$$\tan(kL) = -k\tan\alpha, \tag{IV.38}$$

dove $\tan\alpha > 0$. Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e la retta $k \mapsto -k\tan\alpha$ con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori $\lambda_n = k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in $L^2(0, L)$, risultando in una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

g. Condizioni Miste Diverse. Ci limitiamo al caso in cui $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1\cos(kx) + c_2\frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti c_1, c_2 e per $k > 0$ soddisfa alle due condizioni

$$c_1\cos\beta - c_2\sin\beta = 0, \tag{IV.39}$$

$$c_1\left[\cos\alpha\cos(kL) - k\sin\alpha\sin(kL)\right] + c_2\left[\cos\alpha\frac{\sin(kL)}{k} + \sin\alpha\cos(kL)\right] = 0. \tag{IV.40}$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\begin{aligned}\cos\beta&\left[\cos\alpha\frac{\sin(kL)}{k} + \sin\alpha\cos(kL)\right]\\ &+ \sin\beta\left[\cos\alpha\cos(kL) - k\sin\alpha\sin(kL)\right] = 0,\end{aligned}$$

oppure

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(kL) = -\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{k} - k\sin\alpha\sin\beta\right]\sin(kL).$$

Si cerchino i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e quello della funzione razionale

$$k \mapsto -\frac{k\,\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta - k^2\sin\alpha\sin\beta}.$$

2.2 Equazione di Helmholtz sul Rettangolo

2.3 Equazione di Helmholtz sul Disco e sulla Sfera

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{IV.41}$$

dove x appartiene al disco (sfera() di raggio L e centro l'origine, con una delle condizioni al contorno

$$u(x) = 0 \text{ per } |x| = L \quad \text{[Dirichlet]}, \tag{IV.42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ per } |x| = L \quad \text{[Neumann]}. \tag{IV.43}$$

Utilizzando le coordinate polari (per il disco) o sferiche (per la sfera) si può scrivere la (IV.43) nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad \text{[Neumann]}, \tag{IV.44}$$

dove $r = |x|$. Gli autovalori sono tutti positivi nel caso della condizione di Dirichlet, mentre nel caso di Neumann si annulla uno degli autovalori.

a. Disco. La separazione delle variabili in corrdinate polari (r, θ) conduce all'equazione differenziale

$$R''(r) + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R(r) = 0, \tag{IV.45}$$

dove $0 < r < L$, $R(0)$ esiste limitato e $R(L) = 0$ [Dirichlet] oppure $R'(L) = 0$ [Neumann]. Nel caso di Neumann, $k = 0$ è autovalore con la corrispondente autofunzione $\varphi_0(x) = (\pi L^2)^{-1/2}$ normalizzata in $L^2(|x| < L)$. Tutti gli altri autovalori sono positivi. Dalla condizione che esista finita $R(0)$ segue subito che per $k > 0$

$$R(r) \sim J_m(kr),$$

dove $J_m(kL) = 0$ [Dirichlet] oppure $J'_m(kL)$ [Neumann]. Siano $0 < \nu_{m,1} < \nu_{m,2} < \nu_{m,3} < \ldots$ gli zeri positivi (e automaticamente semplici) della funzione di Bessel $J_m(x)$ [Dirichlet] oppure della sua derivata $J'_m(x)$. In tal caso gli autovalori positivi sono

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\nu_{m,n}}{L}\right)^2$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N_{0,n}^{\text{Dir}}\sqrt{2\pi}} J_0\left(\dfrac{\nu_{0,n}\, r}{L}\right), & \text{Dirichlet}, \\ \dfrac{1}{N_{0,n}^{\text{Neu}}\sqrt{2\pi}} J_0\left(\dfrac{\nu_{0,n}\, r}{L}\right), & \text{Neumann}, \end{cases}$$

per $m = 0$ e

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N_{m,n}^{\text{Dir}}\sqrt{\pi}} J_m\left(\dfrac{\nu_{m,n}\, r}{L}\right) {\cos \atop \sin}(m\theta), & \text{Dirichlet}, \\ \dfrac{1}{N_{m,n}^{\text{Neu}}\sqrt{\pi}} J_m\left(\dfrac{\nu_{m,n}\, r}{L}\right) {\cos \atop \sin}(m\theta), & \text{Neumann} \end{cases}$$

per $m = 1, 2, \ldots$, dove le costanti di normalizzazione valgono

$$\begin{cases} N_{m,n}^{\text{Dir}} = \left[\dfrac{L^2}{2} J_m'(\nu_{m,n})^2\right]^{1/2}, & \text{Dirichlet}, \\ N_{m,n}^{\text{Neu}} = \left[\dfrac{L^2}{2}\left(1 - \dfrac{m^2}{\nu_{m,n}^2}\right) J_m(\nu_{m,n})^2\right]^{1/2}, & \text{Neumann}, \end{cases}$$

per $m = 0, 1, 2, \ldots$. Gli autovalori enumerati $m = 0$ sono semplici, mentre quelli enumerati $m = 1, 2, \ldots$ hanno moltiplicità 2. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(|x| < L)$.

b. Sfera. La separazione delle variabili in coordinate sferiche conduce all'equazione radiale

$$R''(r) + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R(r) = 0, \tag{IV.46}$$

dove $0 < r < L$, $R(0)$ esiste limitato e $R(L) = 0$ [Dirichlet] oppure $R'(L) = 0$ [Neumann]. Nel caso di Neumann, $k = 0$ è autovalore con la corrispondente autofunzione $\varphi_0(x) = (\pi L^2)^{-1/2}$ normalizzata in $L^2(|x| < L)$. Tutti gli altri autovalori sono positivi. Il fattore angolare nell'autofunzione è la funzione sferica $Y_l^m(\theta, \varphi)$, dove $m = -l, = l+1, = l+2, \ldots, l-1, l$. Quindi ad ogni autovalore dell'equazione radiale (IV.46) con termine $l(l+1)/r^2$ corrispondono $2l+1$ autofunzioni linearmente indipendente dell'equazione tridimensionale. Sostituendo

$$S(r) = \sqrt{r}\, R(r)$$

si arriva all'equazione

$$S''(r) + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \left(k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right) S(r) = 0, \tag{IV.47}$$

dove $0 < r < L$, $\lim_{r \to 0^+} r^{-1/2} S(r)$ esiste limitato e $S(L) = 0$ [Dirichlet] oppure $(S'(L)/S(L)) = (1/2L)$.

3 Equazioni delle onde e del calore

3.1 Equazioni delle onde e del calore per uno spettro di autovalori

Partendo da un operatore differenziale L di Sturm-Liouville definito su un opportuno dominio spaziale G di funzioni che soddisfano ad opportune condizioni al contorno omogenee (Dirichlet, Neumann, miste, ecc.), studiamo la corrispondente equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(Lu)(x,t) + f(x,t), \qquad x \in G,\ t > 0, \tag{IV.48}$$

con le due condizioni iniziali

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{IV.49}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \tag{IV.50}$$

Per $f(x,t) \equiv 0$ la separazione delle variabili

$$u(x,t) = \psi(x)T(t) \tag{IV.51}$$

conduce all'equazione

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{(L\psi)(x)}{\psi(x)} = \text{costante}. \tag{IV.52}$$

Partendo da un operatore di Sturm-Liouville L con spettro non negativo (tale che la costante nella (IV.52) è uguale a λ per un'opportuna $\lambda \geq 0$), risultano le equazioni

$$(L\psi)(x) = \lambda\psi(x), \tag{IV.53}$$

$$T(t) = \begin{cases} T(0)\cos(t\sqrt{\lambda}) + T'(0)\dfrac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ T(0) + T'(0)t, & \lambda = 0. \end{cases}. \tag{IV.54}$$

Dunque, se L ha un numero infinito di autovalori $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ di molteplicità finita (dove un certo autovalore appare m volte se la sua molteplicità è uguale ad m) e una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ di corrispondenti autofunzioni (in $L^2(G)$), allora per

$$u_n(t) = \langle u(\cdot,t),\varphi_n\rangle = \int_G u(x,t)\overline{\varphi_n(x)}\,dx, \tag{IV.55}$$

$$f_n(t) = \langle f(\cdot,t),\varphi_n\rangle = \int_G f(x,t)\overline{\varphi_n(x)}\,dx, \tag{IV.56}$$

$$u_{0,n} = \langle u_0,\varphi_n\rangle = \int_G u_0(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx, \tag{IV.57}$$

$$u_{1,n} = \langle u_1,\varphi_n\rangle = \int_G u_1(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx, \tag{IV.58}$$

otteniamo

$$u_n''(t) = -\lambda_n u_n(t) + f_n(t), \tag{IV.59}$$

$$u_n(0) = u_{0,n}, \tag{IV.60}$$

$$u_n'(0) = u_{1,n}. \tag{IV.61}$$

La soluzione del sistema di equazioni (IV.59)-(IV.61) è

$$u_n(t) = \begin{cases} u_{0,n}\cos(t\sqrt{\lambda_n}) + u_{1,n}\dfrac{\sin(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} + \displaystyle\int_0^t \dfrac{\sin((t-\tau)\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau)\,d\tau, & \lambda_n > 0, \\ u_{0,n} + u_{1,n}t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau, & \lambda_n = 0. \end{cases} \tag{IV.62}$$

Nello stesso modo si risolve l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(Lu)(x,t) + f(x,t), \qquad x \in G,\ t > 0, \tag{IV.63}$$

con la condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{IV.64}$$

Utilizzando la precedente base ortonormale di autofunzioni di L risulta

$$u_n'(t) = -\lambda_n u_n(t) + f_n(t), \tag{IV.65}$$

$$u_n(0) = u_{0,n}, \tag{IV.66}$$

La soluzione del sistema di equazioni (IV.65)-(IV.66) è

$$u_n(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_n t}u_{0,n} + \displaystyle\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau, & \lambda_n > 0, \\ u_{0,n} + \displaystyle\int_0^t f_n(\tau)\,d\tau, & \lambda_n = 0. \end{cases} \tag{IV.67}$$

Utilizzando la formula di Parseval

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x) = \int_G u(y,t) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(y)}\varphi_n(x)\, dy, \tag{IV.68}$$

otteniamo per l'equazione del calore

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x) \int_G \overline{\varphi_n(y)}u_0(y)\, dy \\ &\quad + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)}\varphi_n(x) \int_G \overline{\varphi_n(y)} f(y,\tau)\, dy d\tau \\ &= \int_G \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_G \mathcal{G}(x,y;t-\tau)f(y,\tau)\, dy d\tau, \end{aligned} \tag{IV.69}$$

dove

$$\mathcal{G}(x,y;t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}. \tag{IV.70}$$

Utilizzando la (IV.68) troviamo per l'equazione delle onde

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_G \left[\mathcal{H}(x,y;t)u_1(y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x,y;t)u_0(y)\right] dy \\ &\quad + \int_0^t \int_G \mathcal{H}(x,y;t-\tau)f(y,\tau)\, dy d\tau, \end{aligned} \tag{IV.71}$$

dove[1]

$$\mathcal{H}(x,y;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}, \tag{IV.72}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x,y;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(t\sqrt{\lambda_n})\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}. \tag{IV.73}$$

3.2 Alcuni esempi

a. $Lu = -u''$ **con** $u(0) = u(a) = 0$. Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con le condizioni di Dirichlet $u(0) = u(a) = 0$. In tal caso

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

[1]Si calcoli il limite di $(\sin(t\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda})$ per $\lambda \downarrow 0$ se $\lambda = 0$.

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\\ &= \frac{1}{a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{-\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2}\right]\\ &= \frac{-\vartheta_3(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}) + \vartheta_3(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a},\end{aligned}$$

dove $\vartheta_3(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2nz)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([14], 21.11).[2]

b. $Lu = -u''$ **con** $u'(0) = u'(a) = 0$. Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(a) = 0$. In tal caso

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{1}{a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right]\\ &= \frac{1}{a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2}\right]\\ &= \frac{\vartheta_3(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}) + \vartheta_3(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a}.\end{aligned}$$

c. $Lu = -u''$ **con** $u(0) = u'(a) = 0$. Consideriamo ora $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con la condizione di Dirichlet all'estremo sinistro e quella di Neumann all'estremo destro: $u(0) = u'(a) = 0$. In tal caso

$$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{a}\right),$$

[2] Si ha $\vartheta_3(z,q) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n-1}\cos(2z) + q^{4n-2})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}(x,y;t)\\
&= \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\right)\\
&= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \left\{-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x+y)}{2a}\right)\right.\\
&\left.+\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x-y)}{2a}\right)\right\} = \frac{-\vartheta_2(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}) + \vartheta_2(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a},
\end{aligned}$$

dove $\vartheta_2(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/4}\cos((2n+1)z)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([14], 21.11).[3]

3.3 Quando esiste lo spettro continuo

Finora abbiamo considerato equazioni delle onde e del calore, dove il corrispondente operatore di Sturm-Liouville ha uno spettro consistente in autovalori. In tal caso la trasformazione $\mathcal{F}$ di una funzione $u \in L^2(G)$ nella successione $\{\langle u, \varphi_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ dei suoi coefficienti rispetto alla base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un operatore unitario da $L^2(G)$ in ℓ^2, cioè

$$\mathcal{F}u = (\langle u, \varphi_n\rangle)_{n=1}^{\infty}, \qquad \mathcal{F}^{-1}((c_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \tag{IV.74}$$

secondo la formula di Parseval:

$$\|u\|^2_{L^2(G)} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 .$$

In tal caso l'operatore di Sturm-Liouville L viene convertito nella matrice diagonale infinita $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. In altre parole,

$$\begin{array}{ccc}
L^2(G) & \xrightarrow{L} & L^2(G)\\
{\scriptstyle\mathcal{F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}}\\
\ell^2 & \xrightarrow{\Lambda} & \ell^2
\end{array} \tag{IV.75}$$

a. ***$Lu = u''$* sulla retta reale**. Consideriamo prima $Lu = -u''$ in $L^2(\mathbb{R})$. In tal caso la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ (che ha la proprietà $\|\mathcal{F}u\|_2 = (2\pi)^{1/2}\|u\|_2$) converte l'operatore L nella moltiplicazione Λ da k^2, cioè

$$(\Lambda v)(k) = (\mathcal{F}L\mathcal{F}^{-1}v)(k) = k^2\, v(k), \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{IV.76}$$

[3] Si ha $\vartheta_2(z,q) = 2Gq^{1/4}\cos(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n}\cos(2z) + q^{4n})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})$.

In altre parole, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R},dx) & \xrightarrow{L=-(d^2/dx^2)} & L^2(\mathbb{R},dx) \\ {\scriptstyle\mathcal{F}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}} \\ L^2(\mathbb{R},dk) & \xrightarrow{\Lambda=k^2} & L^2(\mathbb{R},dk) \end{array} \tag{IV.77}$$

Per l'equazione del calore la trasformata di Fourier conduce ai sistemi iniziali

$$\hat{u}'(k,t) = -k^2\hat{u}(k,t) + \hat{f}(k,t), \tag{IV.78}$$
$$\hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k), \tag{IV.79}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è soltanto un parametro. La soluzione del sistema (IV.78)-(IV.79) è

$$\hat{u}(k,t) = e^{-k^2t}\hat{u}_0(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)}\hat{f}(k,\tau)\,d\tau. \tag{IV.80}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\left[e^{-k^2t}\hat{u}_0(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)}\hat{f}(k,\tau)\,d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(x,y;t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau, \end{aligned} \tag{IV.81}$$

dove

$$\mathcal{G}(x,y;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(y-x)}e^{-k^2t}\,dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-(x-y)^2/4t}. \tag{IV.82}$$

Per l'equazione delle onde l'applicazione della trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ conduce ai sistemi a valori iniziali

$$\hat{u}''(k,t) = k^2\hat{u}(k,t) + \hat{f}(k,t), \tag{IV.83}$$
$$\hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k), \tag{IV.84}$$
$$\hat{u}'(k,0) = \hat{u}_1(k), \tag{IV.85}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è soltanto un parametro. La soluzione del sistema (IV.83)-(IV.85) è

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}_0(k)\cos(kt) + \hat{u}_1(k)\frac{\sin(kt)}{k} + \int_0^t \frac{\sin(k(t-\tau))}{k}\hat{f}(k,\tau)\,d\tau, \tag{IV.86}$$

e dunque

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{u}_0(k)\cos(kt)+\hat{u}_1(k)\frac{\sin(kt)}{k}\right]e^{-ikx}\,dk$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k(t-\tau))}{k}\hat{f}(k,\tau)e^{-ikx}\,dxd\tau. \tag{IV.87}$$

Si trova la (IV.71), dove

$$\mathcal{H}(x,y;t)=\frac{1}{2}\left\{H(y-x+t)-H(y-x-t)\right\}, \tag{IV.88}$$
$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}(x,y;t)=\frac{1}{2}\left\{\delta(y-x+t)+\delta(y-x-t)\right\}, \tag{IV.89}$$

essendo $H(\tau)$ la funzione di Heaviside e $\delta(\tau)$ quella di Dirac. In particolare, se $u_1(x)\equiv 0$ e $f(x,t)\equiv 0$ si trova la soluzione

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{u_0(x-t)+u_0(x+t)\right\}. \tag{IV.90}$$

b. $Lu=u''$ sulla semiretta. Consideriamo ora $Lu=-u^{-''}$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$ con la condizione di Dirichlet $u(0)=0$ [risp., di Neumann $u'(0)=0$]. Considerando $u\in L^2(\mathbb{R}^+,dx)$ si introduce le trasformata di Fourier seno $\mathcal{F}_s$ e di Fourier coseno $\mathcal{F}_c$:

$$(\mathcal{F}_s u)(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin(kx)u(x)\,dx=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\hat{u}_{\text{dispari}}(k), \tag{IV.91}$$
$$(\mathcal{F}_c u)(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(kx)u(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{u}_{\text{pari}}(k), \tag{IV.92}$$

dove u_{pari} e u_{dispari} sono le funzioni pari e dispari definite su $\mathbb{R}$ tali che $u_{\text{pari}}(x)+u_{\text{dispari}}(x)=u(x)$ per $x\in\mathbb{R}^+$. È facile controllare le seguenti uguaglianze:

$$(\mathcal{F}_s^{-1}v)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin(kx)v(k)\,dk, \tag{IV.93}$$
$$(\mathcal{F}_c^{-1}v)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(kx)v(k)\,dk, \tag{IV.94}$$

mentre

$$(\mathcal{F}_s u')(k)=-k(\mathcal{F}_c u)(k), \qquad (\mathcal{F}_s u'')(k)=-k^2(\mathcal{F}_s u)(k)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,ku(0), \tag{IV.95}$$
$$(\mathcal{F}_c u')(k)=k(\mathcal{F}_s u)(k)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u(0) \quad (\mathcal{F}_c u'')(k)=-k^2(\mathcal{F}_c u)(k)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u'(0). \tag{IV.96}$$

In altre parole, abbiamo i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^+,dx) & \xrightarrow{L=-(d^2/dx^2)} & L^2(\mathbb{R}^+,dx) \\ {\scriptstyle\mathcal{F}_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}_s} \\ L^2(\mathbb{R}^+,dk) & \xrightarrow{\Lambda=k^2} & L^2(\mathbb{R}^+,dk) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^+,dx) & \xrightarrow{L=-(d^2/dx^2)} & L^2(\mathbb{R}^+,dx) \\ {\scriptstyle\mathcal{F}_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}_c} \\ L^2(\mathbb{R}^+,dk) & \xrightarrow{\Lambda=k^2} & L^2(\mathbb{R}^+,dk) \end{array}$$

Condizioni di Dirichlet | Condizioni di Neumann

Per l'equazione delle onde con la condizione di Dirichlet [risp., Neumann] applichiamo la trasformata di Fourier seno [risp., coseno] e arriviamo ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_s''(k,t) = -k^2\hat{u}_s(k,t) + \hat{f}_s(k,t), \\ \hat{u}_s(k,0) = \widehat{u_0}_s(k), \\ \hat{u}_s'(k,0) = \widehat{u_1}_s(k), \end{cases} \tag{IV.97}$$

per il caso di Dirichlet ed ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_c''(k,t) = -k^2\hat{u}_c(k,t) + \hat{f}_c(k,t), \\ \hat{u}_c(k,0) = \widehat{u_0}_c(k), \\ \hat{u}_c'(k,0) = \widehat{u_1}_c(k), \end{cases} \tag{IV.98}$$

per il caso di Neumann. Le soluzioni dei sistemi iniziali sono

$$\hat{u}_s(k,t) = \cos(kt)\widehat{u_0}_s(k) + \frac{\sin(kt)}{k}\widehat{u_1}_s(k) + \int_0^t \frac{\sin(k(t-\tau))}{k}\hat{f}_s(k,\tau)\,d\tau \tag{IV.99}$$

per il caso di Dirichlet e

$$\hat{u}_c(k,t) = \cos(kt)\widehat{u_0}_c(k) + \frac{\sin(kt)}{k}\widehat{u_1}_c(k) + \int_0^t \frac{\sin(k(t-\tau))}{k}\hat{f}_c(k,\tau)\,d\tau \tag{IV.100}$$

per il caso di Neumann.

Per l'equazione del calore con la condizione di Dirichlet [risp., Neumann] applichiamo la trasformata di Fourier seno [risp., coseno] e arriviamo ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_s'(k,t) = -k^2\hat{u}_s(k,t) + \hat{f}_s(k,t), \\ \hat{u}_s(k,0) = \widehat{u_0}_s(k), \end{cases} \tag{IV.101}$$

per il caso di Dirichlet ed ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_c'(k,t) = -k^2\hat{u}_c(k,t) + \hat{f}_c(k,t), \\ \hat{u}_c(k,0) = \widehat{u_0}_c(k), \end{cases} \tag{IV.102}$$

per il caso di Neumann. Le soluzioni dei sistemi iniziali sono

$$\hat{u}_s(k,t) = e^{-k^2t}\widehat{u_0}_s(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)}\hat{f}_s(k,\tau)\,d\tau \tag{IV.103}$$

per il caso di Dirichlet e

$$\hat{u}_c(k,t) = e^{-k^2t}\widehat{u_0}_c(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)}\hat{f}_c(k,\tau)\,d\tau \tag{IV.104}$$

per il caso di Neumann. Quindi

$$u(x,t) = \int_0^\infty \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{G}(x,y;t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau, \tag{IV.105}$$

dove[4]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2t}\sin(kx)\sin(ky)\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2t}\left\{-\cos(k(x+y)) + \cos(k(x-y))\right\}dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left[-e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t}\right] \end{aligned} \tag{IV.106}$$

per il caso di Dirichlet e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2t}\cos(kx)\cos(ky)\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2t}\left\{\cos(k(x+y)) + \cos(k(x-y))\right\}dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left[e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t}\right] \end{aligned} \tag{IV.107}$$

per il caso di Neumann.

[4]Si utilizzi la formula $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-k^2t}\cos(kz)\,dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-z^2/4t}$. Vedi [1], Eq. 7.4.6.

3.4 Impostazione generale

Sia L un operatore di Sturm-Liouville sullo spazio di Hilbert $L^2(G; w\,dx)$ tale che $w(x)$ è un peso positivo quasi ovunque. Supponiamo che lo spettro dell'operatore lineare $w^{-1}L$ sullo spazio $L^2(G; w\,dx)$ sia non negativo (in parte autovalori e in parte spettro continuo).[5] In tal caso si cerchi uno spazio di Hilbert $L^2(\mu)$ per un'opportuna misura di Borel μ, una funzione μ-misurabile e non negativa σ e un operatore unitario $\mathcal{F} : L^2(G; w\,dx) \to L^2(\mu)$ tale che $\Lambda = \mathcal{F}L\mathcal{F}^{-1}$ è l'operatore di molteplicazione per la funzione σ. In altre parole, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
L^2(G, w\,dx) & \xrightarrow{L} & L^2(G, w\,dx) \\
{\scriptstyle\mathcal{F}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}} \\
L^2(\mu) & \xrightarrow{\Lambda=\sigma(\cdot)} & L^2(\mu)
\end{array}$$

Per l'equazione del calore risultano i sistemi a valori iniziali

$$\begin{aligned}
&\hat{u}'(\xi, t) = -\sigma(\xi)\hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t), \\
&\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi),
\end{aligned}$$

che ha la soluzione

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\sigma(\xi)t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-\tau)}\hat{f}(\xi, \tau)\,d\tau.$$

Quindi

$$u(x, t) = \int \mathcal{G}(x, y; t)u_0(y)w(y)\,dy + \int_0^t \int \mathcal{G}(x, y; t-\tau)f(y, \tau)w(y)\,dyd\tau,$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y; t) = \int e^{-\sigma(\xi)t}\varphi(x, \xi)\overline{\varphi(y, \xi)}\,d\mu(\xi).$$

La trasformata $\mathcal{F}$ ha la forma

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}u)(\xi) &= \int_G \varphi(x, \xi)u(x)w(x)\,dx, \\
(\mathcal{F}^{-1}v)(x) &= \int \overline{\varphi(x, \xi)}v(\xi)\,d\mu(\xi).
\end{aligned}$$

[5] In questo caso supponiamo che l'insieme di tutte i λ per cui $(w - L)^{-1}$ non ha l'inverso limitato in $L^2(G; w\,dx)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^+$.

In altre parole,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \text{identità} &\Longleftrightarrow \int \varphi(y,\xi)\overline{\varphi(x,\xi)}\, d\mu(\xi) &= \delta(x-y),\\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \text{identità} &\Longleftrightarrow \int_G \varphi(x,\xi)\overline{\varphi(x,\eta)} w(x)\, dx &= \delta(\xi-\eta).\end{aligned}$$

Tabella IV.1: Impostazione per alcuni esempi dove $Lu = -u''$ e $w(x) \equiv 1$.

G	condizioni al contorno	misura μ	$\sigma(\xi)$	$\varphi(x,\xi)$
$\mathbb{R}$	nessuna	dk su $\mathbb{R}$	k^2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$
$\mathbb{R}^+$	$u(0) = 0$	dk su $\mathbb{R}^+$	k^2	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sin(kx)$
$\mathbb{R}^+$	$u'(0) = 0$	dk su $\mathbb{R}^+$	k^2	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos(kx)$
$(0,a)$	$u(0) = u(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su $\mathbb{N}$	$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$	$\sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$
$(0,a)$	$u'(0) = u'(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su $\mathbb{N} \cup \{0\}$	$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{a}}\, \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$
$(0,a)$	$u(0) = u'(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su $\mathbb{N} \cup \{0\}$	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right)^2$	$\sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right)$

Discutiamo ora un esempio per cui il peso $w(x) \not\equiv 1$. Sia $G = (0,a)$, $w(x) = x$, $Lu = -(xu')'$, $u(0^+)$ finito e $u(a) = 0$. In tal caso gli autovalori sono i numeri λ per cui l'equazione

$$Lu = \lambda w u \Longleftrightarrow \begin{array}{c}(-(xu')' = \lambda x\, u(x) \text{ per } x \in (0,a),\\ \text{mentre } u(0^+) \text{ è finito e } u(a) = 0)\end{array}$$

ha una soluzione non banale u in $L^2((0,a); x\, dx)$. Si vede facilmente che gli autovalori e autofunzioni sono (per $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_{0,n}}{a}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{a\, J_0'(\mu_{0,n})}\, J_0\left(\frac{x\mu_{0,n}}{a}\right),$$

dove $0 < \mu_{0,1} < \mu_{0,2} < \ldots$ sono gli zeri positivi della funzione di Bessel J_0 di ordine zero. Le autofunzioni $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ formano una base ortonormale di $L^2((0,a); x\, dx)$.

Tabella IV.2: Impostazione per alcuni esempi dove e $w(x) \not\equiv 1$.

G $w(x)$	operatore di Sturm-Liouville e condizioni al contorno	misura μ	$\sigma(\xi)$	$\varphi(x,\xi)$
$(0,a)$ $w(x)=x$	$Lu=-(xu')'$ $u(0^+)$ finito, $u(a)=0$	$\mu(n)=1$ su $\mathbb{N}$	$\left(\frac{\mu_{0,n}}{a}\right)^2$	$\frac{\sqrt{2}}{a\,J_0'(\mu_{0,n})}\,J_0\left(\frac{x\mu_{0,n}}{a}\right)$

Capitolo V

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

In questo capitolo discuteremo l'equazione di Schrödinger. Prima verranno introdotti l'equazione di Schrödinger, i suoi stati limite e il problema di scattering. Poi verrà discussa l'equazione di Schrödinger per i potenziali radiali.

1 Equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger descrive (nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica) la probabilità che una particella si trova in una regione dello spazio al momento t. Se m è la massa della particella e $h = 2\pi\hbar$ la costante di Planck, si ha per la funzione onda $\psi(x,t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \tag{V.1}$$

$$\psi(x,t=0) = \psi_0(x), \tag{V.2}$$

con condizioni al contorno. La funzione $V(x)$ è reale e rappresenta il potenziale. Scegliendo unità fisiche tali che $\hbar = 1$ e $2m = 1$, risulta invece della (V.1)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(x)\psi(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0. \tag{V.3}$$

Se $E \subset \mathbb{R}^3$ è misurabile, $\int_E |\psi(x,t)|^2\,dx$ (sotto la condizione di normalizzazione $\psi(\cdot,t) \in L_2(\mathbb{R}^3)$) è la probabilità di trovare la particella in E al momento t.

Noi studiamo esclusivamente il problema stazionario, dove l'energia λ prende il posto dell'operatore $i(\partial/\partial t)$, cioè

$$-\Delta\psi + V(x)\psi(x) = k^2\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{V.4}$$

dove $\lambda = k^2$ con $\operatorname{Im} k \geq 0$. Ci sono due problemi di rilevante importanza:

1. il problema degli stati limite: $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$. In tal caso l'energia $\lambda = k^2$ è un valore discreto negativo.

2. il problema di scattering: in tal caso si impone la condizione di Sommerfeld
$$\psi(k,x) = e^{ik\theta\cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to +\infty,$$
dove $A(k,\theta,\theta')$ è l'ampiezza (come funzione dell'energia $\lambda = k^2$ e le direzioni $\theta,\theta' \in S^2$); $e^{ik\theta\cdot x}$ rappresenta un'onda piana nella direzione θ. Nel problema di scattering si ha l'energia $\lambda > 0$.

In quest'ultimo caso la funzione onda $\psi(k,x)$ non appartiene a $L^2(\mathbb{R}^3)$ e infatti soddisfa alla condizione di Sommerfeld
$$\begin{aligned}\psi(k,x) &= e^{ik\theta\cdot x} + \psi_s(x)\\ &= e^{ik\theta\cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to +\infty,\end{aligned}$$
dove $A(k,\theta,\theta')$ è l'ampiezza e $k > 0$. Ovviamente il potenziale $V(x)$ deve essere localmente sommabile (cioè, $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ e tendere a zero abbastanza rapidamente se $|x| \to \infty$.[1] Cercando la cosiddetta *funzione di Green* $\mathcal{G}(k;x,x')$ tale che
$$(\Delta + k^2)\mathcal{G}(k;x,x') = -4\pi\delta(x-x'),$$
cioè scegliendo
$$\mathcal{G}(k;x,x') = \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|},$$
si ottiene facilmente
$$\psi_s(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathcal{G}(k;x,x')V(x')\psi(x')\,dx'.$$
Quindi
$$\psi(x) = e^{ik\theta\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{G}(k;x,x')V(x')\psi(x')\,dx'.$$
Per calcolare ψ dal potenziale si può risolvere l'equazione precedente per iterazione. Facendo una singola iterazione si arriva alla cosiddetta *approssimazione di Born*
$$\psi(x) \simeq e^{ik\theta\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{G}(k;x,x')V(x')e^{ik\theta\cdot x'}\,dx'.$$

[1] I potenziali di Coulomb $V(x) = \frac{\text{cost.}}{|x|}$ non conducono ad una teoria di scattering quantistica semplice, poichè non decadono abbastanza rapidamente.

2 Equazione di Schrödinger Radiale

In problemi in cui c'è la simmetria sferica il potenziale ha la proprietà

$$V(x) = V(r), \qquad r = |x|.$$

Un tale potenziale si dice *radiale.*

a. Trovare i stati limite. Per studiarne i stati limite (dove l'energia $\lambda < 0$) si esprime l'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - V(r)\psi = -\lambda\psi,$$

dove $x = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3$. Sostituendo

$$\psi(x) = R(r)X(\varphi,\theta)$$

e moltiplicando da $r^2/R(r)X(\varphi,\theta)$ si ottiene

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{X(\varphi,\theta)}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}\right] - r^2V(r) = -\lambda r^2.$$

Come al solito, seguono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{C}{r^2} + \lambda - V(r)\right]R(r) = 0; \tag{V.5}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2} = -CX(\varphi,\theta), \tag{V.6}$$

dove C è una costante. L'equazione (V.6) si chiama spesso l'equazione di Beltrami.

Grazie alle (C1.2) degli appunti sulle funzioni sferiche, esiste una soluzione non banale della (V.6) se e solo se $C = l(l+1)$ per qualche $l = 0, 1, 2, \ldots$, ed in tal caso $X(\varphi,\theta)$ è una combinazione lineare delle funzioni sferiche $Y_l^m(\varphi,\theta)$, dove $m = -l, \ldots, l$. Infatti, eseguendo un'ulteriore separazione delle variabili nella (V.6), $X(\varphi,\theta) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta)$ dove $\xi = \cos\varphi$ e $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, risultano

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1\cos m\theta + c_2\sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \ldots; \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi). \tag{V.7}$$

La (V.7) si dice equazione differenziale per le funzioni di Legendre associate: $\mathcal{P}(\xi) \sim \mathcal{P}_l^m(\xi)$, dove $l = m, m+1, m+2, \ldots$ e $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Discutiamo ora la (V.5). Sostituendo $R(r) = r^\alpha S(r)$ nella (V.5) [con $C = l(l+1)$] per un'opportuna α (da stabilire successivamente) e dividendo da r^α, si trova

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{2(\alpha+1)}{r}\frac{dS}{dr} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1) - l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right] S(r) = 0. \qquad \text{(V.8)}$$

Per far somigliare la (V.8) all'equazione di Bessel si scelga α tale che $2(\alpha+1) = 1$, cioè $\alpha = -1/2$:

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \left[-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} + \lambda - V(r)\right] S(r) = 0. \qquad \text{(V.9)}$$

Per far sparire il termine con la derivata prima dalla (V.8), ci vuole $\alpha = -1$. Quindi per $S(r) = rR(r)$ abbiamo

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \left[\frac{-l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right] S(r) = 0. \qquad \text{(V.10)}$$

Per $\alpha = 0$ otteniamo dalla (V.8)

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right] R(r) = 0, \qquad \text{(V.11)}$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Noi imporremo le seguenti due condizioni al contorno:

$$\begin{cases} R(r) = O(r^l), & r \to 0^+ \\ \displaystyle\int_0^\infty r|R(r)|^2\,dr < +\infty. \end{cases} \qquad \text{(V.12)}$$

I seguenti casi sono di rilevante interesse:

1. Il buco di potenziale, dove $V(r) = -V_0 < 0$ per $0 < r < r_0$ e $V(r) = 0$ per $r > r_0$.

2. L'oscillatore armonico, dove $V(r) = (\gamma/2)r^2$ per una costante $\gamma > 0$.

3. L'atomo di idrogeno, dove $V(r) = -e^2/r$ per e la carica dell'elettrone.

b. Il problema di scattering. Nel corrispondente problema di scattering l'ampiezza dipende da k e dall'angolo tra le direzioni θ e θ':

$$A(k, \theta, \theta') = A(k, \theta \cdot \theta').$$

In tal caso bisogno separare le variabili in coordinate cilindriche, dove la direzione di θ prende il posto dall'asse z positivo.

Per $V \equiv 0$ l'equazione di Schrödinger per $E = k^2$ con $k > 0$ ha la soluzione generale [6]

$$\psi(x) = \text{cost.}_1 \, f_l(kr) + \text{cost.}_2 \, g_l(kr),$$

dove

$$f_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} \, J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = \rho j_l(\rho), \qquad g_l(\rho) = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} \, J_{-(l+\frac{1}{2})}(\rho) = -\rho n_l(\rho),$$

dove $l = 0, 1, 2, \ldots$ e j_l e n_l si chiamano funzioni di Bessel sferiche di prima e seconda specie. Sviluppando l'onda piana

$$e^{ik\theta\cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} \frac{f_l(kr)}{kr} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

si trova per l'ampiezza

$$f(k; \theta \cdot \theta') \stackrel{\text{def}}{=} A(k, \theta, \theta') = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\theta \cdot \theta'),$$

dove $\delta_l(k)$ si chiamano *fasi di scattering*.

2.1 Il buco di potenziale

In tal caso

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \tag{V.13}$$

dove $V_0 > 0$. Sostituendo $R(r) = r^{-1/2} S(r)$ otteniamo [Vedi (V.9)]

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \left[V_0 - \kappa^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} \right] S(r) = 0, \qquad 0 < r < r_0, \\ &\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} - \left[\kappa^2 + \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} \right] S(r) = 0, \qquad r > r_0, \end{aligned} \tag{V.14}$$

dove $\lambda = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$. Ovviamente, per $r > r_0$ la (V.14) è l'equazione immaginaria di Bessel di ordine $l + \frac{1}{2}$ nella variabile κr. Siccome deve tendere a zero se $r \to \infty$, si trova

$$S(r) \sim K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r), \qquad r > r_0, \tag{V.15}$$

dove $K_\nu(z)$ è la funzione di MacDonald di ordine ν. Per $\nu, z > 0$ La funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ è decrescente.

Per $0 < r < r_0$ la situazione è più complicata. Siccome $S(0^+)$ esiste, risulta per $0 < r < r_0$

$$S(r) \sim \begin{cases} J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), & V_0 > \kappa^2, \\ r^{l+\frac{1}{2}}, & V_0 = \kappa^2, \\ I_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\kappa^2 - V_0}), & V_0 < \kappa^2, \end{cases} \tag{V.16}$$

dove $J_\nu(z)$ è la funzione di Bessel di ordine ν e $I_\nu(z)$ è la funzione di Bessel imaginaria di ordine ν.

Per trovare i stati limite richiediamo che la derivata logaritmica della S (cioè, S'/S) sia continua in $r = r_0$. Grazie al decadimento della funzione di MacDonald, si vede subito che $S'(r)/S(r)$ ha un limite negativo se $r \to (r_0)^+$. D'altra parte, $r^{l+\frac{1}{2}}$ e la funzione di Bessel immaginaria sono crescenti per $r > 0$, mentre la funzione di Bessel stessa è oscillatoria. Quindi gli stati limiti possono esistere soltanto per $V_0 > \kappa^2$. In tal caso

$$S(r) \sim J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), \tag{V.17}$$

dove

$$\kappa r_0 \frac{K'_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)}{K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)} = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}\, \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{J_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}. \tag{V.18}$$

Le energie $\lambda = -\kappa^2$ corrispondenti dagli stati limite si trovano dal numero finito di zeri della (V.18) per $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$; ci sono zeri per soltanto un numero finito di $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Per $l = 0$ abbiamo

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}, \qquad J_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}}\, \sin(w).$$

Allora (V.18) si riduce all'identità

$$\frac{\tan(\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2})}{\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2}} = -\frac{1}{1+z},$$

dove $z = \kappa r_0$. Gli zeri $z = \kappa r_0 \in (0, r_0\sqrt{V_0})$ si ottengono graficamente.

2.2 Oscillatore armonico

a. Utilizzando le coordinate sferiche. In tal caso

$$V(r) = \frac{1}{2}\gamma r^2, \tag{V.19}$$

dove $\gamma > 0$ è una costante. Ponendo $c = \sqrt{\gamma/8}$ e $R(r) = e^{-cr^2}\phi(r)$, la (V.11) si riduce all'equazione differenziale

$$\phi''(r) + \left(\frac{2}{r} - 4cr\right)\phi'(r) + \left(k^2 - 6c - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\phi(r) = 0. \tag{V.20}$$

Sostituendo la serie di potenze

$$\phi(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s, \tag{V.21}$$

dove α è un parametro da stabilire, troviamo

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[\{(\alpha+s)(\alpha+s-1) + 2(\alpha+s) - l(l+1)\}c_s \right.$$
$$\left. + \{(k^2 - 6c) - 4c(\alpha+s-2)\}c_{s-2}\right] r^{\alpha+s-2} = 0,$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Supponendo che il coefficiente di $r^{\alpha-2}$ sia diverso da zero, si trova

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1) = 0,$$

e quindi $\alpha = l$ oppure $\alpha = -(l+1)$. La condizione al contorno (V.12) se $r \to 0^+$ implica che $\alpha = l$. In tal caso $c_1 = 0$ e

$$s(s+2l+1)c_s + \{(k^2 - 6c) - 4c(s+l-2)\}c_{s-2} = 0. \tag{V.22}$$

Dunque $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$c_s = \frac{4c(s+l-2) - (k^2 - 6c)}{s(s+2l+1)} c_{s-2},$$

dove $s = 2, 4, 6, \cdots$. Il rapporto $c_s r^2/c_{s-2} \sim (2r^2/s)$ se $s \to +\infty$. Quindi scegliamo k^2 tale che $c_s = 0$ per qualche $s = 2, 4, 6, \cdots$, cioè

$$k^2 = 4c(s+l-2) + 6c, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots.$$

Quindi abbiamo trovato gli autovalori e le autofunzioni

$$\begin{cases} k_{l,n}^2 = 2c(2n+3), & l = n, n+2, n+4, \ldots, \ l = 0, 1, 2, \cdots, \\ \psi_{l,n}(r, \theta, \varphi) = e^{-cr^2}\phi_{l,n}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l+1, \cdots, l, \end{cases} \tag{V.23}$$

dove $\phi_{l,n}(r) = r^l v_{l,n}(r)$ e $v_{l,n}(r)$ è un polinomio in r^2 di grado $n - l$. Quel polinomio soddisfa l'equazione

$$r^2 v''(r) + 2r(l + 1 - 2cr^2)v'(r) + 4c(n-l)r^2 v(r) = 0.$$

Ponendo $t=2cr^2$ e $w(t)=v(r)$ otteniamo l'equazione differenziale

$$tw''(t)+(l+\frac{3}{2}-t)w'(t)+(n-l)w(t)=0, \tag{V.24}$$

dove $w(t)$ è un polinomio in t di grado $n-l$.

b. Utilizzando le coordinate cartesiane. Siccome $V(r)=\frac{\gamma}{2}r^2=\frac{\gamma}{2}(x^2+y^2+z^2)$, l'equazione di Schrödinger è anche separabile in coordinate Cartesiane. Infatti, scrivendo $\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ otteniamo le tre equazioni

$$\begin{cases} X''(x)+\left(k_x^2-\dfrac{\gamma x^2}{2}\right)X(x)=0, \\ Y''(y)+\left(k_y^2-\dfrac{\gamma y^2}{2}\right)Y(y)=0, \\ Z''(z)+\left(k_z^2-\dfrac{\gamma z^2}{2}\right)Z(z)=0, \end{cases} \tag{V.25}$$

dove $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$. Studiamo ora una delle equazioni in una variabile. Ponendo $X(x)=e^{-cx^2}\phi(x)$ per $c=\sqrt{\gamma/8}$, l'equazione $X''(x)+[k_x^2-(\gamma x^2/2)]X(x)=0$ si riduce all'equazione

$$\phi''(x)-4cx\phi'(x)+(k_x^2-2c)\phi(x)=0. \tag{V.26}$$

Sostituendo $\phi(x)=x^\alpha\sum_{s=0}^\infty c_sx^s$, otteniamo

$$\sum_{s=0}^\infty\left[(\alpha+s)(\alpha+s-1)c_s+\{(k_x^2-2c)-4c(\alpha+s-2)\}c_{s-2}\right]x^{\alpha+s-2}=0, \tag{V.27}$$

dove $c_{-1}=c_{-2}=0$. Scegliendo $\alpha=0$, troviamo $c_1=c_3=c_5=\cdots=0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}}=\frac{4c(s-2)-(k_x^2-2c)}{s(s-1)}, \qquad s=2,4,6,\cdots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n=0,2,4,\cdots$ se $k_x^2=2c(2n+1)$. Scegliendo $\alpha=1$, troviamo $c_1=c_3=c_5=\cdots=0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}}=\frac{4c(s-1)-(k_x^2-2c)}{s(s+1)}, \qquad s=2,4,6,\cdots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n=1,3,5,\cdots$ se $k_x^2=2c(2n+1)$. Insieme troviamo le seguenti soluzioni $X_n(x)=\phi_n(x)e^{-cx^2}$, dove $\phi_n(x)$ è un polinomio di grado $n=0,1,2,3,4,\cdots$ e $k_x^2=2c(2n+1)$. Raccogliendo X, Y e Z risulta

$$\begin{cases} k^2=2c(2n+3), & n=0,1,2,3,\cdots, \\ \psi(x,y,z)=e^{-c(x^2+y^2+z^2)}\phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y)\phi_{n_3}(z), \end{cases} \tag{V.28}$$

dove $n = n_1 + n_2 + n_3$.

c. Analisi dei polinomi. Sostituendo $z = x\sqrt{2c}$ e $v(z) = \phi(x)$ si arriva all'equazione differenziale di Hermite. Quindi i polinomi $\phi_n(x)$ nella (V.28) sono proporzionali a $H_n(x\sqrt{2c})$, dove H_n è il poinomio di Hermite di grado n. Vale la relazione d'ortogonalità

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x\sqrt{2c})H_m(x\sqrt{2c})e^{-2cx^2}\,dx = \frac{2^n(n!)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}\,\delta_{n,m},$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

I polinomi $w_m(t)$ ($m = n - l = 0, 1, 2, \ldots$) soddisfano l'equazione differenziale

$$tw_m''(t) + (l + \frac{3}{2} - t)w_m'(t) + mw_m(t) = 0.$$

Quest'ultima equazione coincide con l'equazione differenziale di Laguerre per $\alpha = l + \frac{1}{2}$. Quindi $w_m(t)$ è proporzionale al polinomio di Laguerre $L_m^{(l+\frac{1}{2})}(t)$. In altre parole,

$$\phi_{l,n}(r) = \text{cost.}r^l\, L_{n-l}^{(l+\frac{1}{2})}(2cr^2).$$

Calcoliamo ora il numero N_n di autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti allo stesso livello di energia, cioè allo stesso intero $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dalla derivazione in coordinate cartesiane segue che N_n è uguale al numero di punti (n_1, n_2, n_3) con coordinate intere non negative per cui $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Dalla derivazione in coordinate sferiche segue che

$$N_n = \begin{cases} \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+ : n_1 + n_2 + n_3 = n\} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \\ \displaystyle\sum_{\substack{l=0,1,\ldots,n \\ n-l \text{ pari}}} (2l+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{cases}$$

dove ci rendiamo conto del fatto che ad ogni $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ corrispondono $2l + 1$ autofunzioni linearmente indipendenti con lo stesso livello di energia.

2.3 Atomo d'idrogeno

In tal caso $V(r) = -e^2/r$, dove e è la carica dell'elettrone. Ponendo $\lambda = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$ (cioè, richiedendo che l'energia sia negativa), l'equazione di Schrödinger (V.10) ha la seguente forma:

$$S''(r) + \left(-\kappa^2 + \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)S(r) = 0, \tag{V.29}$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Sostituendo $S(r) = e^{-\kappa r} w(r)$ otteniamo

$$w''(r) - 2\kappa w'(r) + \left(\frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w(r) = 0. \tag{V.30}$$

Sostituendo ora $w(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^\infty c_s r^s$ si ottiene

$$\sum_{s=0}^\infty \left[\{(\alpha+s)(\alpha+s-1) - l(l+1)\} c_s + \{e^2 - 2\kappa(\alpha+s-1)\} c_{s-1} \right] r^{\alpha+s-2} = 0. \tag{V.31}$$

Osserviamo che il termine costante nella (V.31) coincide con $(\alpha - l - 1)(\alpha + l)c_0$. Scegliendo $\alpha = l + 1$ (escludendo $\alpha = -l$) otteniamo

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{2\kappa(s+l) - e^2}{s(s+2l+1)}, \qquad s = 1, 2, 3, \cdots. \tag{V.32}$$

Per produrre soluzioni polinomiali richiediamo che $\kappa = (e^2/2n)$ per $n = l+1, l+2, \cdots$.[2] In tal caso risulta $c_{n-l} = c_{n+1-l} = \cdots = 0$; dunque $w(r) = r^{l+1} v(r)$, dove $v(r)$ è un polinomio in r di grado $n - l - 1$. In altre parole,

$$\begin{cases} \kappa_n^2 = -\dfrac{e^4}{4n^2}, & n = l+1, l+2, \cdots, \\ \psi(r, \theta, \varphi) = r^{l+1} e^{-e^2 r/2n}\, v_{l,n-l-1}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l+1, \cdots, l. \end{cases} \tag{V.33}$$

Ponendo $w(r) = r^{l+1} v(r)$, $t = 2\kappa r$, $e^2 = 2\kappa n$ e $\tilde{v}(t) = v(r)$, otteniamo

$$t\,\tilde{v}''(t) + (2l + 2 - t)\tilde{v}'(t) + (n - l - 1)\tilde{v}(t) = 0. \tag{V.34}$$

Sostituendo $x \mapsto t$, $\alpha \mapsto 2l + 1$ e $n \mapsto n - l - 1$ nell'equazione differenziale di Laguerre si arriva alla (V.34). Dunque $\tilde{v}(t)$ è proporzionale a $L_{n-l-1}^{(2l+1)}(t)$. In altre parole,

$$\begin{cases} E_n = -\kappa_n^2 = -\dfrac{e^4}{4n^2}, & n = l+1, l+2, \cdots, \\ \psi(r, \theta, \varphi) = \text{cost.} r^{l+1} e^{-e^2 r/2n} L_{n-l-1}^{(2l+1)}\left(\dfrac{e^2 r}{n} \right) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l+1, \cdots, l, \end{cases} \tag{V.35}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, $l = 0, 1, \ldots, n - 1$ e $m = -l, -l + 1, \ldots, l$.

Osserviamo ora che le energie $E_n = -(e^2/2n^2)$ degli stati limite dell'idrogeno vengono determinate dall'intero $n \in \mathbb{N}$. Ad ogni $n \in \mathbb{N}$ corrispondono $n - 1$

[2] Si pone $n = s + l$, dove $s = 1, 2, \ldots$ e $l = 0, 1, 2, \ldots$. Quindi $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $l = 0, 1, \ldots, n - 1$.

valori di l ($l = 0, 1, \ldots, n-1$) e ad ogni tale l $2l+1$ valori di m ($m = -l, \ldots, l$). Quindi ad ogni $n \in \mathbb{N}$ corrispondono

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

valori di (l, m) ($l, m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l < n$). In altre parole, per $E = -e^4/4n^2$ l'equazione di Schrödinger con potenziale $V(r) = -(e^2/r)$ ha n^2 soluzioni linearmente indipendenti in $L_2(\mathbb{R}^3)$.

3 Equazione di Schrödinger Periodica

a. Problemi al contorno con periodicità. Consideriamo ora l'equazione di Schrödinger con potenziale periodico

$$V(x) = V(x + a_j), \qquad j = 1, 2, 3, \tag{V.36}$$

dove $\{a_1, a_2, a_3\}$ è un sistema di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ e il potenziale $V(x)$ è continuo. Allora, dato $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ si può studiare l'equazione di Schrödinger sotto le *condizioni k-periodiche*

$$\psi(x + k_j a_j) = \psi(x), \qquad j = 1, 2, 3, \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{V.37}$$

Ciò include le *condizioni periodiche*

$$\psi(x + a_j) = \psi(x), \qquad j = 1, 2, 3, \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{V.38}$$

oppure le *condizioni* $\mathbf{1}$*-periodiche*, dove $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$. Una terza classe di condizioni al contorno consiste nelle *condizioni* $\boldsymbol{t}$*-periodiche*

$$\psi(x + a_j) = e^{i\pi t_j} \psi(x), \qquad j = 1, 2, 3, \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{V.39}$$

dove $\exp(i\pi t_j)$ è una radice dell'unità di ordine k_j ($j = 1, 2, 3$) e $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)$.

Sia

$$A = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 : x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]\} \tag{V.40}$$

il cosiddetto *parallelogramma periodo* e sia

$$A(k) = \{x_1 k_1 a_1 + x_2 k_2 a_2 + x_3 k_3 a_3 : x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]\}, \tag{V.41}$$

dove $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$. L'equazione di Schrödinger con le condizioni k-periodiche si può considerare come un problema al contorno sul dominio limitato $A(k)$, mentre l'equazione di Schrödinger con condizioni periodiche o $\boldsymbol{t}$-periodiche si può considerare come un problema al contorno sul dominio limitato A. Se il potenziale $V(x)$ è reale, continua e periodica (seconda la

(V.36)), allora tutti e tre problemi al contorno hanno uno spettro di autovalori reali che si accumulano a $+\infty$. In tutte e tre casi esiste una base ortonormale (in $L^2(A(k))$ oppure in $L^2(A)$) di autofunzioni del problema al contorno.

Per $k = (k_1, k_2, k_3)$ siano

$$\Lambda_0(k) \leq \Lambda_1(k) \leq \Lambda_2(k) \leq \ldots \tag{V.42}$$

gli autovalori del problema k-periodico e per $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)$ un vettore di radici dell'unità

$$\lambda_0(\boldsymbol{t}) \leq \lambda_1(\boldsymbol{t}) \leq \lambda_2(\boldsymbol{t}) \leq \ldots \tag{V.43}$$

gli autovalori del problema $\boldsymbol{t}$-periodico.

Si vede facilmente che una soluzione dell'equazione di Schrödinger con condizione al contorno

$$\psi(x + a_j) = \exp(2\pi i r_j/k_j)\psi(x)$$

per opportuni interi $r_j \in \{0, 1, \ldots, k_j - 1\}$ $(j = 1, 2, 3)$ soddisfa anche alle condizioni (V.37).

Teorema V.1 *Per* $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ *siano* $\exp(i\pi t_{r_j}) = \exp(2\pi i r_j/k_j)$ *(*$r_j = 0, 1, \ldots, k_j - 1$*) le radici dell'unità di ordine* k_j *(*$j = 1, 2, 3$*). Allora le basi ortonormali dei* $k_1k_2k_3$ *problemi al contorno con condizioni* $(t_{r_1}, t_{r_2}, t_{r_3})$*-periodiche in* $L^2(A)$ *possono essere messe insieme per formare una base ortonormale del problema con condizioni* k*-periodiche in* $L^2(A(k))$*.*

Per esempio, sia $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 4$. Allora i vettori $\boldsymbol{t}$ appartengono all'insieme di 24 elementi tali che il vettore $(\exp(it_{r_1}), \exp(it_{r_2}), \exp(it_{r_3}))$ vale uno di

$$\begin{cases} (1,1,1), (1,1,i), (1,1,-1), (1,1,-i), \\ (1,\varepsilon,1), (1,\varepsilon,i), (1,\varepsilon,-1), (1,\varepsilon,-i), \\ (1,\varepsilon^2,1), (1,\varepsilon^2,i), (1,\varepsilon^2,-1), (1,\varepsilon^2,-i), \\ (-1,1,1), (-1,1,i), (-1,1,-1), (-1,1,-i), \\ (-1,\varepsilon,1), (-1,\varepsilon,i), (-1,\varepsilon,-1), (-1,\varepsilon,-i), \\ (-1,\varepsilon^2,1), (-1,\varepsilon^2,i), (-1,\varepsilon^2,-1), (-1,\varepsilon^2,-i), \end{cases}$$

dove $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ e $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

b. Principio variazionale. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni in A continue e di classe C^1 a tratti. Per $f, g \in \mathcal{F}$ si ha secondo l'identità di Green

$$\begin{aligned} J(f,g) &= \int_A \left[\nabla f(x) \cdot \nabla\overline{g(x)} + V(x)f(x)\overline{g(x)}\right] dx \\ &= -\int_A f(x) \left[\Delta\overline{g(x)} - V(x)\overline{g(x)}\right] + \int_{\partial A} f \frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\, d\sigma, \end{aligned} \tag{V.44}$$

dove ∂A è la frontiera del parallelogramma periodo e $\partial/\partial n$ la derivata normale esterna. Per $f \in \mathcal{F}$ e $g = \psi_n(\cdot;\boldsymbol{t}) \in \mathcal{F}$ che soddisfa all'equazione di Schrödinger con condizioni $\boldsymbol{t}$-periodiche, si ha

$$J(f,g) = \lambda_n(\boldsymbol{t}) f_n(\boldsymbol{t}), \qquad f_n(\boldsymbol{t}) = \int_A f(x)\overline{\psi_n(x;\boldsymbol{t})}\,dx. \tag{V.45}$$

Per $f = \psi_m(\cdot;\boldsymbol{t})$ si ha, grazie all'ortonormalità delle autofunzioni,

$$J(\psi_m(\cdot;\boldsymbol{t}), \psi_n(\cdot;\boldsymbol{t})) = \begin{cases} \lambda_(\boldsymbol{t}), & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Riordinando gli autovalori in ordine crescente si trova il *principio di Rayleigh-Ritz*[3]

$$\lambda_n(\boldsymbol{t}) = \min_{\substack{f \perp \psi_m(\cdot;\boldsymbol{t}),\ m<n \\ f\in\mathcal{F}, f \text{ soddisfa alla (V.39)}}} \frac{J(f,f)}{\int_A |f(x)|^2\,dx}. \tag{V.46}$$

Introduciamo ora due problemi ausiliari:

a. l'equazione di Schrödinger in A con condizioni di Dirichlet $\psi(x) = 0$ per $x \in \partial A$: autovalori $\Lambda_0 \leq \Lambda_1 \leq \cdots$, base ortonormale di autofunzioni $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

b. l'equazione di Schrödinger in A con condizioni di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}(x) = 0$ per $x \in \partial A$: autovalori $\nu_0 \leq \nu_1 \leq \cdots$, base ortonormale $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Anche per questi due problemi al contorno esiste il principio di Rayleigh-Ritz. Utilizzando l'identità di Green (V.44) si può dimostrare che

$$\nu_n \leq \lambda_n(\boldsymbol{t}) \leq \Lambda_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots. \tag{V.47}$$

c. Bandi e funzioni di Bloch. Sia $\mathcal{L}_n$ l'insieme di tutti gli autovalori $\lambda_n(\boldsymbol{t})$, dove $\exp(i\pi t_j)$ sono opportune radici dell'unità, e sia $\mathcal{L} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n$. Allora $\mathcal{L}_n$ è un intervallo chiuso e $\mathcal{L}$ è un insieme chiuso. Si può dimostrare che $\mathcal{L}$ coincide con l'insieme di tutte le λ per cui l'equazione di Schrödinger $\Delta\psi = \lambda\psi$ ha una soluzione limitata non banale. Si può anche mostrare che $\mathcal{L}$ è la chiusura dell'insieme di tutti gli autovalori $\Lambda_n(k)$ dei problemi al contorno per l'equazione di Schrödinger con condizioni k-periodichee. L'insieme $\mathcal{L}$ si chiama l'*insieme di stabilità condizionale*. I sottoinsiemi $\mathcal{L}_n$ sono i cosiddetti *bandi*. I bandi $\mathcal{L}_n$ sono tutti intervalli chiusi, dove i punti interni sono autovalori ma gli estremi dell'intervallo spesso non lo sono.

[3]Per una matrice $n\times n$ A arbitraria si trovano così i numeri singolari $s_1(A) \geq \ldots \geq s_n(A)$.

Se $\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$, esistono soluzioni limitate non banali dell'equazione di Schrödinger del tipo

$$\psi(x) = p(x)e^{ic\cdot x}, \tag{V.48}$$

dove $p(x) \not\equiv 0$ soddisfa alle condizioni periodiche (V.38) e c è un vettore reale costante. Soluzioni del tipo (V.48) si chiamano *onde di Bloch* oppure *funzioni di Bloch*. Tranne per un fattore costante, le onde di Bloch sono le autofunzioni $\psi(x;\boldsymbol{t})$ dell'equazione di Schrödinger con condizioni $\boldsymbol{t}$-periodiche.

Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vale la cosiddetta *formula di Gelfand*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \int |\alpha_n(\boldsymbol{t})|^2\,d\boldsymbol{t},$$

dove

$$\alpha_j(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi_j(x;\boldsymbol{t})}\,dx.$$

Utilizzando la formula di Gelfand si può dimostrare che le autofunzioni $\psi_n(x;\boldsymbol{t})$ (per $n = 0, 1, 2, \ldots$ e tutti i $\boldsymbol{t}$ costituiscono una base dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Se il potenziale $V(x)$ è reale, continuo e peridico, allora il corrispondente operatore di Schrödinger $L = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ (definito su un opportuno dominio denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$) è autoaggiunto e quindi il suo spettro è reale. Lo spettro consiste in autovalori e spettro continuo. Purtroppo, gli autovalori possono, magari, avere una moltiplicità infinita, un fenomeno che non si vede nei problemi unidimensionali. Si può infatti dimostrare la non esistenza di autovalori di moltiplicità finita. Lo spettro è composto di bandi. La distanza tra due bandi consecutivi tende a zero se $n \to \infty$.

Abbiamo ora discusso lo spettro dell'operatore differenziale di Schrödinger in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Lo spettro dello stesso operatore in $L^2(A)$ (sotto condizioni $\boldsymbol{t}$-periodiche) oppure in $L^2(A(k))$ (sotto condizioni k-periodiche) è molto diverso e consiste esclusivamente in autovalori di moltiplicità finita.

d. Reticolato reciproco e zona di Brillouin. Siano a_j $(j = 1, 2, 3)$ i tre vettori che generano il parallelogramma periodo A. Sia

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{col}(a_1, a_2, a_3)$$

la matrice non singolare con colonne a_1, a_2, a_3. Per $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ e $e_3 = (0, 0, 1)^T$ si ha $a_1 = \boldsymbol{A}e_1$, $a_2 = \boldsymbol{A}e_2$ e $a_3 = \boldsymbol{A}e_3$. Ora definiamo $b_j = (\boldsymbol{A}^T)^{-1}e_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Allora

$$(b_k, a_j) = \big((\boldsymbol{A}^T)^{-1}e_k, \boldsymbol{A}e_j\big) = \big(e_k, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}e_j\big) = (e_k, e_j) = \delta_{k,j}, \qquad j, k = 1, 2, 3. \tag{V.49}$$

Il reticolato $\{m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3 : m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$ si chiama il *reticolato reciproco* $\mathcal{R}$. Per un punto $b \in \mathcal{R}$ qualsiasi abbiamo

$$\exp(2\pi i b \cdot a_j) = 1, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{V.50}$$

Allora la *zona di Brillouin* associata ai vettori a_1, a_2, a_3 è l'insieme

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq \|x - 2\pi b\|_2 \text{ per ogni } 0 \neq b \in \mathcal{R} \right\}, \tag{V.51}$$

cioè i punti $x \in \mathbb{R}^3$ più vicino all'origine che a tutti i punti dl $2\pi\mathcal{R}$ diversi dall'origine. Per trovare Z si construiscono i non più di 18 piani $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = \|x - 2\pi b\|_2\}$, dove b è uno dei punti $m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3$ con $m_1, m_2, m_3 \in \{-1, 0, 1\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Questi piani dividono $\mathbb{R}^3$ in domini poliedrali. La zona di Brillouin Z è il poliedro chiuso che contiene l'origine.

Per $c \in \mathbb{R}^3$ equidistante da due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ uno dei punti di $2\pi\mathcal{R}$ più vicino a c. In tal caso $c_0 = c - 2\pi b_0 \in Z$ e $\|c_0\|_2 \leq \|c - 2\pi b\|_2$ per ogni $b \in \mathcal{R}$. D'altra parte, se c non è equidistante da due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ il punto di $2\pi\mathcal{R}$ più vicino a c; allora $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} c - 2\pi b_0 \notin \partial Z$ e $\|c_0\|_2 < \|c - 2\pi b\|_2$ per ogni $b \in \mathcal{R} \setminus \{b_0\}$. Grazie alla (V.50), si ha

$$\exp(ic \cdot a_j) = \exp(ic_0 \cdot a_j), \qquad j = 1, 2, 3. \tag{V.52}$$

Si vede facilmente che Z consiste nei punti c_0 di norma euclidea minma per cui vale la (V.53) per qualunque $c \in \mathbb{R}^3$ collegato a c_0 tramite $c_0 = c - 2\pi b$ con $b \in \mathcal{R}$.

e. Il problema al contorno $\boldsymbol{t}$-periodico per $q \equiv 0$. Sia $c \in \mathbb{R}^3$ il vettore unico che soddisfa alle equazioni

$$c \cdot a_j = \pi t_j, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{V.53}$$

Allora $c = \pi(t_1b_1 + t_2b_2 + t_3b_3)$. Se c è equidistante tra due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ uno di quelli e poniamo $c_0 = c - 2\pi b_0 \in Z$. Se c non è equidistante da due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ il punto di $2\pi\mathcal{R}$ più vicino a c e poniamo $c_0 = c - 2\pi b_0$. In tal caso

$$\psi(x) = \exp(i(c_0 + 2\pi b) \cdot x) \tag{V.54}$$

per qualsiasi $b \in \mathcal{R}$ è una soluzione limitata non banale dell'equazione di Schrödinger $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ per $\lambda = \|c_0 + 2\pi b\|_2^2$. Quindi se $b \in \mathcal{R}$, questi valori di λ costituiscono gli autovalori del problema al contorno $\boldsymbol{t}$-periodico. Non ci sono altri autovalori del problema al contorno con condizioni $\boldsymbol{t}$-periodiche e le corrispondenti autofunzioni (V.53) costituiscono una base ortogonale di $L^2(A)$.

Bibliografia

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.

[2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.

[3] M.S.P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.

[4] Enrico Giusti, *Analisi Matematica* 1-2 (due volumi), Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[5] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.

[6] R.G. Newton, *Scattering of Waves and Particles*, Springer, New York, 1982; Dover, New York, 2002.

[7] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, 2 vols., Hermann, Paris, 1966.

[8] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.

[9] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).

[10] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.

[11] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1981.

[12] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Mir Italia-URSS, Mosca, 1987; anche Nauka, Mosca, 1981 [in Russo].

[13] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.

[14] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.