Tabella 4: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
5	5	5	5	5	5	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 21.09.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = 15t, \qquad y = 8\sin(t), \qquad z = -8\cos(t),$$

essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.
   b. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.
   c. Qual'è la torsione della curva in ogni punto?

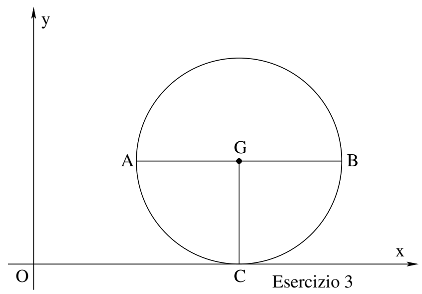
2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 3\vec{k}), \quad (P_2, -\vec{i} + \vec{k}), \quad (P_3, 2\vec{j} - \vec{k}), \quad (P_4, -3\vec{k}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = P_4 = (0, 0, 1)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.
   c. Trovare un sistema di al massimo tre vettori applicati con lo stesso asse centrale.

3. Si consideri un disco di raggio R che rotola su una guida rettilinea x. Sia G il centro del disco e C il punto di contatto con la guida. Il rotolamento sia puro, cioè senza strisciamento (in ogni istante risulti $\vec{v}_C = \vec{0}$). Si supponga di conoscere ad un dato istante t_1 la velocità $\vec{v}_G = v_G\vec{i}$ ($\vec{i} = (1, 0)$) e l'accelerazione $\vec{a}_G = (dv_G/dt)\vec{i}$ del punto G. Determinare in tale istante velocità e accelerazione dei punti A, B (estremi del diametro ortogonale a GC) e del punto C.



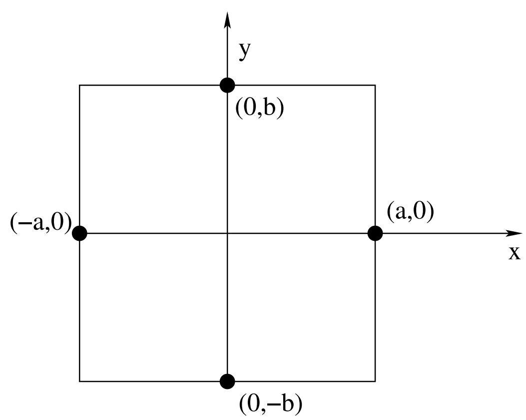
Esercizio 3

4. Sia data una lamina rettangolare disposta come in figura. Supponiamo che la parte (rettangolare) del semipiano destro abbia densità costante μ_1 e quella sul semipiano sinistro densità μ_2 (con $\mu_1 \neq \mu_2$). Si determinino

   a. il baricentro del rettangolo,

   b. il momento d'inerzia rispetto all'asse x.

   c. il momento d'inerzia rispetto all'asse di equazione $x = a$.



5. Una particella di massa m cade sotto l'effetto della forza gravitazionale e di una seconda forza d'attrito proporzionale al suo vettore velocità, cioè,

$$\vec{F} = -mg\vec{k} - c\dot{\vec{x}}$$

   per un'opportuna costante $c > 0$, essendo $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

   a. È olonomo il sistema? Determinarne i gradi di libertà.

b. Date la posizione iniziale $(0, 0, z_0)$ e la velocità iniziale $(\dot{x}_0, 0, \dot{z}_0)$, determinare la velocità $\dot{\vec{x}}(t)$.

c. Discutere l'andamento della velocità se $t \to +\infty$.

Si consiglia di studiare separatamente le equazioni del moto nelle direzioni x, y e z.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie conica di equazione $z = \frac{1}{3}\sqrt{3(x^2 + y^2)}$ sotto l'effetto della forza centrale $\vec{F} = -k(x^2 + y^2 + z^2)\hat{e}_r$, essendo $k > 0$ un'opportuna costante e $\hat{e}_r$ il versore radiale esterno.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.

   b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   c. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

SOLUZIONI:

1. a) $\dot{x} = 15$, $\dot{y} = 8\cos(t)$ e $\dot{z} = 8\sin(t)$. Quindi $\|\dot{\vec{x}}\| = 17$ e $s(t) = 17t$.
   b) Quindi

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{1}{17}\dot{\vec{x}} = (\tfrac{15}{17}, \tfrac{8}{17}\cos(\tfrac{s}{17}), \tfrac{8}{17}\sin(\tfrac{s}{17})),$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = (0, -\tfrac{8}{289}\sin(\tfrac{s}{17}), \tfrac{8}{289}\cos(\tfrac{s}{17})),$$

   $k(s) = (8/289)$ e

$$\vec{n} = (0, -\sin(\tfrac{s}{17}), \cos(\tfrac{s}{17})).$$

   c) Di conseguenza,

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = (\tfrac{8}{17}, -\tfrac{15}{17}\cos(\tfrac{s}{17}), -\tfrac{15}{17}\sin(\tfrac{s}{17})),$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = (0, \tfrac{15}{289}\sin(\tfrac{s}{17}), -\tfrac{15}{289}\cos(\tfrac{s}{17})),$$

   e $\chi(s) = -(15/289)$.

2. a) $\vec{R} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ e $R^2 = 5$. Inoltre,

   $\vec{M}(O) = \vec{i} \wedge 3\vec{k} + \vec{j} \wedge (-\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \wedge (2\vec{j} - \vec{k}) + \vec{k} \wedge (-3\vec{k}) = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}.$

   Inoltre $\vec{M}(O) \cdot \vec{R} = -5$ e $\vec{M}_p = -\frac{1}{5}(-\vec{i} + 2\vec{j})$. b) L'asse centrale segue nel seguente modo:

$$A - O = \tfrac{1}{5}(-\vec{i} + 2\vec{j}) \wedge (\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \tfrac{1}{5}(2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}),$$

   e quindi $A = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1)$. Infine, $P - A = \lambda\vec{R}$ oppure

$$x - \tfrac{2}{5} = -\lambda, \qquad y - \tfrac{1}{5} = 2\lambda, \qquad z - 1 = 0.$$

   Quindi l'asse centrale è dato dalle seguenti equazioni:

$$2x + y = 1, \qquad z = 1.$$

   c) Poichè $P_3 = P_4$, il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 3\vec{k}), \qquad (P_2, -\vec{i} + \vec{k}), \qquad (P_3, 2\vec{j} - 4\vec{k}),$$

   ha lo stesso invariante scalare e lo stesso asse centrale.

3. Dalla formula fondamentale dei moti rigidi si ha

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge CG.$$

Essendo $\vec{\omega}$ ortogonale a CG, si ha:

$$\vec{\omega} = -\frac{v_G}{R}\vec{k}, \qquad \dot{\vec{\omega}} = -\frac{a_G}{R}\vec{k}.$$

Risultano:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge GA = \vec{v}_G - \frac{v_G}{R}[\vec{k} \wedge (-R\vec{i})] = v_G(\vec{i} + \vec{j}),$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge GB = \vec{v}_G - \frac{v_G}{R}[\vec{k} \wedge (R\vec{i})] = v_G(\vec{i} - \vec{j}).$$

Le accelerazioni sono:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge GA + \omega^2 R\vec{i} = a_G(\vec{i} + \vec{j}) + \omega^2 R\vec{i},$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge GB - \omega^2 R\vec{i} = a_G(\vec{i} - \vec{j}) - \omega^2 R\vec{i}.$$

Per quanto riguarda il punto C abbiamo $\vec{v}_C = \vec{0}$ e

$$\vec{a}_C = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge GC - \omega^2 GC = \vec{a}_G - \frac{a_G}{R}[\vec{k} \wedge (-R\vec{j})] - \omega^2 GC = \omega^2 R\vec{j},$$

essendo $\vec{a}_G \wedge \vec{i} = \vec{0}$.

4. a) La parte destra ha baricentro $(\frac{1}{2}a, 0)$ e massa $2ab\mu_1$, mentre la parte sinistra ha baricentro $(-\frac{1}{2}a, 0)$ e massa $2ab\mu_2$. Dunque la massa totale è $M = 2ab(\mu_1 + \mu_2)$. Quindi il baricentro della figura totale è

$$x_G = \frac{2ab\mu_1 \cdot \frac{1}{2}a - 2ab\mu_2 \cdot \frac{1}{2}a}{2ab\mu_1 + 2ab\mu_2} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\frac{1}{2}a, \qquad y_G = 0.$$

b) Il momento d'inerzia rispetto all'asse x è

$$I_{y=0} = \int_{-a}^{0} dx \int_{-b}^{b} dy\, \mu_2 y^2 + \int_{0}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy\, \mu_1 y^2 = \tfrac{2}{3}(\mu_1 + \mu_2)ab^3 = \tfrac{1}{3}Mb^2.$$

Poichè l'asse x passa per il baricentro, si ha

$$I_{y=b} = I_{y=0} + \underbrace{2(\mu_1 + \mu_2)ab^3}_{\text{massa}\times b^2} = \tfrac{8}{3}(\mu_1 + \mu_2)ab^3 = \frac{4}{3}Mb^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}I_{x=a} &= \int_{-a}^{0} dx\,(a-x)^2 \int_{-b}^{b} dy\,\mu_2 + \int_{0}^{a} dx\,(a-x)^2 \int_{-b}^{b} dy\,\mu_1 \\ &= \tfrac{16}{3}(\mu_1+\mu_2)a^3 b = \tfrac{8}{3}Ma^2.\end{aligned}$$

5. a) Ci sono $N=3$ gradi di libertà. Il sistema è olonomo. b) Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -c\dot{x}, \\ m\ddot{y} = -c\dot{y}, \\ m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}. \end{cases}$$

Le loro soluzioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-ct/m}, \qquad x = x_0 + \frac{m\dot{x}_0}{c}\left\{1-e^{-ct/m}\right\}, \\ &\dot{y} = \dot{y}_0 e^{-ct/m}, \qquad y = y_0 + \frac{m\dot{y}_0}{c}\left\{1-e^{-ct/m}\right\}, \\ &\dot{z} = e^{-ct/m}\dot{z}_0 - \frac{mg}{c}\left\{1-e^{-ct/m}\right\}, \\ &z = z_0 - \frac{mg}{c}t + \frac{m}{c}\left[\dot{z}_0 + \frac{mg}{c}\right]\left\{1-e^{-ct/m}\right\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\dot{x} \to 0, \qquad \dot{y} \to 0, \qquad \dot{z} \to -\frac{mg}{c},$$

se $t \to +\infty$ [caduta libera con velocità scalare mg/c].

6. Ci sono $N = 3-1 = 2$ gradi di libertà, essendoci una particella e un vincolo. In coordinate cilindriche si ha

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = \tfrac{1}{3}\rho\sqrt{3}.$$

Dunque

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{z} = \tfrac{1}{3}\dot{\rho}\sqrt{3}.$$

Inoltre, $U = \frac{1}{2}k(\rho^2+z^2) = \frac{2}{3}k\rho^2$. Di conseguenza,

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m\left\{\tfrac{4}{3}\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right\} - \tfrac{4}{3}k\rho^2.$$

b) Le equazioni di Eulero-Lagrange sono $p_\theta = m\rho^2\dot\theta =$ costante e

$$m\rho\dot\theta^2 - \tfrac{4}{3}k\rho = \tfrac{4}{3}m\ddot\rho,$$

oppure

$$\ddot\rho = \tfrac{3}{4}\frac{p_\theta^2}{m^2\rho^3} - \frac{k}{m}\rho.$$

c) Le due costanti del moto sono il momento generalizzato p_θ (essendo θ una variabile ciclica) e l'hamiltoniano (essendo $\mathcal{L}$ indipendente dal tempo).