Tabella 2: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
5	5	5	5	5	5	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 19.07.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = t - \tfrac{1}{4}\sin(4t), \qquad y = \tfrac{1}{4}[1-\cos(4t)], \qquad z = -\sin(2t),$$

   essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.
   b. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.
   c. Qual'è la torsione della curva in ogni punto?

2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 2\vec{j}+\vec{k}), \quad (P_2, -\vec{i}+\vec{k}), \quad (P_3, -\vec{j}-\vec{k}), \quad (P_4, 2\vec{i}),$$

   essendo $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,0)$, $P_4 = (0,0,1)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.
   c. Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.

3. Interpretiamo il moto $\vec{x}(t)$ lungo una curva regolare come il moto di un corpo rigido.

a. Spiegare perchè i versori tangente, normale e binormale $\vec{t}$, $\vec{n}$ e $\vec{b}$ costituiscono una terna solidale.

b. Utilizzando s come variabile temporale e scrivendo

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{t}, \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{n}, \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{b},$$

trovare la velocità angolare $\vec{\omega}$. [Suggerimento: Utilizzare le formule di Frenet dopo aver rappresentato $\vec{\omega}$ come combinazione lineare dei tre versori.]

c. Dimostrare che il moto del corpo rigido è rotatorio se e solo se la curva è piana.

4. Consideriamo la semisfera omogenea

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}.$$

   a. Determinare il baricentro.

   b. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

   c. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse x.

5. Consideriamo il sistema dei due corpi, il Sole di massa M_S e un pianeta di massa m. I due corpi si muovono nel piano xy.

   a. Determinare la velocità iniziale $\vec{v}_0$ affinchè la traiettoria del pianeta attorno al baricentro sia una circonferenza.

   b. Dimostrare la terza legge di Newton (cioè, a^3/τ^2 costante) se la traiettoria del pianeta è una circonferenza attorno al baricentro.

   c. Applicare la legge della conservazione dell'energia per calcolare la velocità di fuga v_e dal sistema Solare, partendo da una distanza r dal baricentro. In altre parole, determinare la minima velocità scalare v_g per allontanarsi in modo definitivo dal sistema Solare, partendo da una distanza r dal baricentro Sole-pianeta.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di rotazione catenoide di equazione $z = \cosh(x^2 + y^2)$ sotto l'effetto della forza centrale $\vec{F} = -k(x^2 + y^2 + z^2)\hat{e}_r$, essendo $k > 0$ un'opportuna costante e $\hat{e}_r$ il versore radiale esterno.

a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.

b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

c. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

SOLUZIONI:

1. a) $\dot{x} = 1 - \cos(4t)$, $\dot{y} = \sin(4t)$ e $\dot{z} = -2\cos(2t)$, quindi
$$\|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{[1-\cos(4t)]^2 + \sin^2(4t) + 4\cos^2(2t)} = 2.$$
Dunque $s(t) = 2t$ e $t = \frac{1}{2}s$. b) $\ddot{x} = 4\sin(4t)$, $\ddot{y} = 4\cos(4t)$ e $\ddot{z} = 4\sin(2t)$. Quindi
$$k(s) = \left\|\frac{d^2\vec{x}}{ds^2}\right\| = \tfrac{1}{4}\|\ddot{\vec{x}}\| = \sqrt{1+\sin^2(2t)} = \sqrt{1+\sin^2(s)}.$$
c) I versori tangenziale, normale e binormale sono:
$$\begin{aligned}
\vec{t} &= (\tfrac{1}{2}[1-\cos(2s)], \tfrac{1}{2}\sin(2s), -\cos(s)),\\
\vec{n} &= \frac{1}{k(s)}\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{k(s)}(\sin(2s), \cos(2s), \sin(s)),\\
\vec{b} &= \vec{t}\wedge\vec{n}\\
&= \frac{1}{k(s)}(\tfrac{1}{2}\sin(2s)\sin(s) + \cos(2s)\cos(s),\\
&\sin(2s)\cos(s) - \tfrac{1}{2}[1-\cos(2s)]\sin(s), \tfrac{1}{2}[\cos(2s)-1]),
\end{aligned}$$
Dalla terza legge di Frenet,
$$\chi(s) = \frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{n} = \frac{d}{ds}(\vec{b}\cdot\vec{n}) - \vec{b}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} = -\vec{b}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}.$$

2. Si ha $\vec{R} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e
$$\vec{M}(O) = \vec{i}\wedge(2\vec{j}+\vec{k}) + \vec{j}\wedge(-\vec{i}+\vec{k}) + \vec{k}\wedge 2\vec{i} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}.$$
Quindi l'invariante scalare è $\vec{M}(O)\cdot\vec{R} = 5$. Inoltre
$$A - O = \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}(O)}{R^2} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{3},$$
e quindi $A = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$. Dunque l'asse centrale è:
$$x - \tfrac{2}{3} = \lambda, \qquad y + \tfrac{2}{3} = \lambda, \quad z = \lambda.$$
c) Il primo vettore applicato è $(A, \vec{R})$ e una coppia di vettori appartenenti al piano ortogonale all'asse centrale.

3. Si ha

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k(s) & 0\\ -k(s) & 0 & -\chi(s)\\ 0 & \chi(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{pmatrix},$$

dove $\vec{t}\wedge\vec{n} = \vec{b}$, $\vec{n}\wedge\vec{b} = \vec{t}$ e $\vec{b}\wedge\vec{t} = \vec{n}$. Si ha per ogni combinazione lineare $\vec{F}$ dei vettori solidali $\vec{t}$, $\vec{n}$ e $\vec{b}$:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \vec{\omega}\wedge\vec{F},$$

essendo $\vec{\omega} = c_1\vec{t} + c_2\vec{n} + c_3\vec{b}$. Dunque

$$\begin{pmatrix}-c_2\vec{b} + c_3\vec{n}\\ c_1\vec{b} - c_3\vec{t}\\ -c_1\vec{n} + c_2\vec{t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{\omega}\wedge\vec{t}\\ \vec{\omega}\wedge\vec{n}\\ \vec{\omega}\wedge\vec{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k(s) & 0\\ -k(s) & 0 & -\chi(s)\\ 0 & \chi(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{pmatrix},$$

e quindi $c_1 = -\chi(s)$, $c_2 = 0$ e $c_3 = k(s)$. Infine risulta

$$\vec{\omega} = -\chi(s)\vec{t} + k(s)\vec{b}.$$

Il moto è rotatorio se e solo se $\chi(s)\equiv 0$.

4. Sia $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0\}$ il corpo. Allora $x_G = y_G = 0$, mentre

$$z_G = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R z\,dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{\int_0^R \pi z(R^2-z^2)\,dz}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \tfrac{3}{8}R.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è:

$$\mu\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3\,dr = \mu\int_0^R \tfrac{\pi}{2}(R^2-z^2)^2\,dz = \frac{4}{15}\mu\pi R^5.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse x è:

$$\begin{aligned}\mu\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r(r^2\sin^2\theta + z^2)\,dr\\ = \mu\int_0^R\left[\tfrac{\pi}{4}(R^2-z^2)^2 + \pi(R^2-z^2)z\right]dz = \frac{4}{15}\mu\pi R^5.\end{aligned}$$

5. a. Se la traiettoria è una circonferenza attorno al baricentro, allora la forza centripetale coincide con quella gravitazionale. Ciò vuol dire $\frac{\mu v^2}{r} = \frac{GM\mu}{r^2}$. Oppure:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

b. Si ha

$$\frac{r^3}{\tau^2} = \frac{r^3}{[2\pi r/v]^2} = \frac{v^2 r}{4\pi^2} = \frac{\mu v^2}{r}\frac{r^2}{4\pi^2\mu} = \frac{GM\mu}{r^2}\frac{r^2}{4\pi^2\mu} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

c. L'energia totale

$$H = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r}$$

è una costante del moto. Quindi

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + \frac{2H}{\mu}} \to \sqrt{\frac{2H}{\mu}}, \qquad r \to +\infty,$$

essendo non negativa l'energia totale H. In altre parole,

$$v \geq v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

6. Poichè la forza è centrale e dipende soltanto dalla distanza dall'origine, si ha $U = \frac{1}{3}k(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$. In coordinate cilindriche si ha:

$$\begin{aligned}
&U = \tfrac{1}{3}k(r^2 + z^2)^{3/2} = \tfrac{1}{3}k(r^2 + \cosh^2(r^2))^{3/2},\\
&\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{z} = 2r\dot{r}\sinh(r^2),\\
&T = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2\sinh^2(r^2)\right).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2\sinh^2(r^2)\right] - \tfrac{1}{3}k(r^2 + \cosh^2(r^2))^{3/2}.$$

Essendo ciclica la variabile θ e essendo indipendente dal tempo la lagrangiana, il momento generalizzato $p_\theta = (\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta})$ e l'hamiltoniana

$\mathcal{H} = T + U$ sono costanti del moto. Ci sono, ovviamente, due gradi di libertà. La rimanente equazione di Eulero-Lagrange è:

$$
\begin{aligned}
& mr\dot{\theta}^2 + 4mr\dot{r}^2 \sinh^2(r^3) + 8mr^3\dot{r}^2 \sinh(r^2)\cosh(r^2) \\
& -\frac{1}{2}k(r^2 + \cosh(r^2))^{1/2}\{2r + 4r\cosh(r^2)\sinh(r^2)\} \\
& = m\ddot{r} + 8mr\dot{r}^2 \sinh^2(r^2) + 4mr^2\ddot{r}\sinh^2(r^2) + 16mr^3\dot{r}^2\sinh(r^2)\cosh(r^2).
\end{aligned}
$$

Oppure:

$$
\begin{aligned}
& r\dot{\theta}^2 + 4r\dot{r}^2 \sinh^2(r^3) + 8r^3\dot{r}^2 \sinh(r^2)\cosh(r^2) \\
& -\frac{k}{2m}(r^2 + \cosh(r^2))^{1/2}\{2r + 4r\cosh(r^2)\sinh(r^2)\} \\
& = \ddot{r} + 8r\dot{r}^2 \sinh^2(r^2) + 4r^2\ddot{r}\sinh^2(r^2) + 16r^3\dot{r}^2\sinh(r^2)\cosh(r^2).
\end{aligned}
$$