

Tabella 1: Best 5 out of 6

| es.1 | es.2 | es.3 | es.4 | es.5 | es.6 | somma |
|------|------|------|------|------|------|-------|
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 30 |
| | | | | | | |

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 19.01.2012

Cognome e nome:Matricola:

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P :

$$x = 3e^{-t} \sin(t), \quad y = 4e^{-t} \sin(t) \quad z = 5e^{-t} \cos(t),$$

essendo $t \geq 0$.

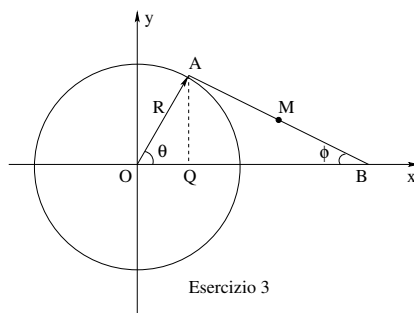
- a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P .
 - b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t .
 - c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P .
 - d. Qual'è la torsione della curva in ogni punto?
2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, \vec{i} + 2\vec{j}), \quad (P_2, -\vec{i} + 2\vec{k}), \quad (P_3, 2\vec{i} + \vec{j}), \quad (P_4, 2\vec{i} - 2\vec{k}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$, $P_4 = (0, 0, 0)$. Si chiede di:

- a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
- b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.
- c. Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.

3. In un piano riferito al sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$ si consideri una circonferenza di raggio R e centro O . Un'asta rigida AB , di lunghezza $\ell (> 2R)$, ha un estremo sulla circonferenza e l'altro sull'asse x . Il punto A ruota uniformemente sulla circonferenza. Inizialmente l'asta è sovrapposta all'asse x positivo. Determinare la velocità del punto B , la velocità angolare $\vec{\omega}$ dell'asta e la velocità e l'accelerazione del punto medio, M , dell'asta.



4. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h, \sqrt{x^2 + y^2} \leq |z|\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

- a. Trovare il baricentro del solido.
 - b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z .
 - c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse $z = h$.
5. Un corpo di massa m si muove nel piano xz sotto l'effetto della forza gravitazionale e di una forza di attrito proporzionale alla velocità scalare con direzione opposta alla sua velocità vettoriale.
- a. Determinare le equazioni di moto.
 - b. Data una velocità iniziale orizzontale ($\dot{x}_0 > 0, \dot{z}_0 = 0, x_0 = z_0 = 0$), trovare la posizione del corpo all'istante $t > 0$.
 - c. Dire se la forza totale agente è conservativa, motivando la risposta.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie conica di equazione $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ sotto l'effetto della sola forza elastica

$$\vec{F} = -k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{e}_r = -k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

essendo $k > 0$ la costante di elasticità.

- a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si suggerisce di scegliere le coordinate cilindriche).
- b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
- c. Indicare almeno due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.