Tabella 3: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
5	5	5	5	5	5	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 16.09.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = 5(t+2), \qquad y = 12\sin(t), \qquad z = 12\cos(t),$$

essendo $t \geq 0$.

a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.

b. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.

c. Qual'è la torsione della curva?

2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 2\vec{j}+\vec{k}), \quad (P_2, -\vec{i}+\vec{j}), \quad (P_3, -\vec{j}-\vec{k}),$$

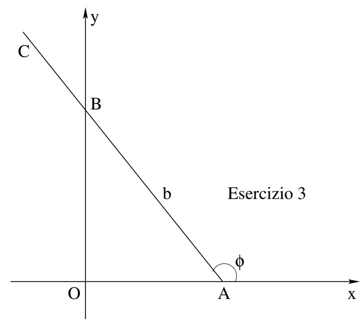
essendo $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$. Si chiede di:

a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.

a. Trovare gli invarianti scalare e vettoriale del sistema.

c. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.

3. Si consideri un'asta AC di lunghezza ℓ. Essa sia vincolata con il punto A sul semiasse positivo delle x di un sistema cartesiano Oxy. Inoltre il punto B dell'asta, che dista b $(0 < b < \ell)$ da A, è vincolato a scorrere sull'asse y [Vedi figura]. Determinare l'equazione della traiettoria del punto C.



4. Consideriamo l'area racchiusa dal segmento di parabola di equazione:
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2px}\},$$
essendo a, p costanti positive.
    a. Determinare il baricentro (essendo costante la densità).
    b. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse x.
    c. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse di equazione $y = \sqrt{2pa}$.

5. Consideriamo il pendolo costituito da un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie sferica di centro $O(0,0,0)$ e raggio l, essendo l la lunghezza del pendolo. Quindi la particella non è vincolata a muoversi in un piano verticale. Supponiamo che agisca la sola forza gravitazionale di intensità mg.
    a. Esprimere l'energia cinetica delle particella in coordinate sferiche.
    b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
    c. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla parabola descritta dalle equazioni $z = 1 - (x^2 + y^2)$ e $x = y$ sotto l'effetto della sola forza elastica $\vec{F} = -k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\hat{e}_r$, essendo $k > 0$ la costante di elasticità e $\hat{e}_r$ il versore radiale esterno.
    a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.
    b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
    c. Indicare una costante del moto e spiegare perchè lo è.

SOLUZIONI:

1. a) $\dot{x} = 5$, $\dot{y} = 12\cos(t)$ e $\dot{z} = -12\sin(t)$. Quindi $\|\dot{\vec{x}}\| = 13$ e $s(t) = 13t$.
   b) Quindi

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{1}{13}\dot{\vec{x}} = (\tfrac{5}{13}, \tfrac{12}{13}\cos(\tfrac{s}{13}), -\tfrac{12}{13}\sin(\tfrac{s}{13})),$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = (0, -\tfrac{12}{169}\sin(\tfrac{s}{13}), -\tfrac{12}{169}\cos(\tfrac{s}{13})),$$

   $k(s) = (12/169)$ e

$$\vec{n} = (0, -\sin(\tfrac{s}{13}), -\cos(\tfrac{s}{13})).$$

   c) Di conseguenza,

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = (-\tfrac{12}{13}, \tfrac{5}{13}\cos(\tfrac{s}{13}), -\tfrac{5}{13}\sin(\tfrac{s}{13})),$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = (0, -\tfrac{5}{169}\sin(\tfrac{s}{13}), -\tfrac{5}{169}\cos(\tfrac{s}{13})),$$

   e $\chi(s) = (5/169)$.

2. a) $\vec{R} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ e $R^2 = 5$. Inoltre,

$$\vec{M}(O) = \vec{\imath} \wedge (2\vec{\jmath} + \vec{k}) + \vec{\jmath} \wedge (-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \vec{k} \wedge (-\vec{\jmath} - \vec{k}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

   b) $\vec{M}(O) \cdot \vec{R} = -3$ e $\vec{M}_p = -\frac{3}{5}(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$. c) L'asse centrale segue nel seguente modo:

$$A - O = \tfrac{1}{5}(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) \wedge (\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}) = \tfrac{1}{5}(6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}),$$

   e quindi $A = (\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$. Infine, $P - A = \lambda\vec{R}$ oppure

$$x - \tfrac{6}{5} = -\lambda, \qquad y - \tfrac{3}{5} = 2\lambda, \qquad z + \tfrac{1}{5} = 0.$$

   Quindi l'asse centrale è dato dalle seguenti equazioni:

$$2x + y = 3, \qquad z = -\frac{1}{5}.$$

3. Si ha

$$x_C = x_A - l\cos(\pi-\phi) = b\cos(\pi-\phi) - l\cos(\pi-\phi) = (l-b)\cos\phi,$$
$$y_C = l\sin(\pi-\phi) = l\sin\phi.$$

Quindi

$$\left(\frac{x_C}{l-b}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{l}\right)^2 = 1,$$

un'ellisse con i suoi fuochi nei punti di coordinate $(0, \pm\sqrt{b(2l-b)})$ e semiasse maggiore l. La traiettoria del punto C consiste in tutti i punti dell'ellisse che si trovano nel semipiano sinistro.

4. L'area della figura è

$$M = \int_0^a \mu\sqrt{2px}\,dx = \tfrac{2}{3}\mu a\sqrt{2pa}.$$

La figura si può anche rappresentare nel seguente modo:

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{2pa},\ 0 \le x \le \frac{y^2}{2p}\right\}.$$

Quindi le coordinate del baricentro sono

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^a \mu x\sqrt{2px}\,dx = \frac{\frac{2}{5}\mu a^2\sqrt{2pa}}{M} = \frac{3}{5}a,$$
$$y_G = \frac{1}{M}\int_0^{\sqrt{2pa}} \mu y\frac{y^2}{2p}\,dy = \frac{\frac{1}{2}\mu p a^2}{M} = \frac{3}{8}\sqrt{2pa}.$$

I momento d'inerzia rispetto agli assi x e y sono

$$I_{y=0} = \int_0^{\sqrt{2pa}} \mu y^2\frac{y^2}{2p}\,dy = \frac{2}{5}\mu p a^2\sqrt{2pa},$$
$$I_{x=0} = \int_0^a \mu x^2\sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{7}\mu a^3\sqrt{2pa},$$
$$I_{y=\sqrt{2pa}} = \int_0^{\sqrt{2pa}} \mu(\sqrt{2pa}-y)^2\frac{y^2}{2p} = \frac{1}{15}pa^2\sqrt{2pa}.$$

5. La forza gravitazionale è $\vec{F} = -mg\vec{k}$ e quindi $U = mgz$. a) Si ha $x = l\sin\phi\cos\theta$, $y = l\sin\phi\sin\theta$ e $z = -l\cos\phi$. Quindi

$$\dot{x} = l\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta,$$
$$\dot{y} = l\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta + l\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta, \qquad \dot{z} = l\dot{\phi}\sin\phi.$$

Di conseguenza, $U = -mgl\cos\phi$ e

$$T = \tfrac{1}{2}ml^2\left(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\phi\right).$$

b) La lagrangiana è data dall'espressione

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}ml^2\left(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\phi\right) + mgl\cos\phi.$$

Quindi θ è una variabile ciclica e il corrispondente momento generalizzato

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}\sin^2\phi$$

è una costante del moto. L'unica equazione di Eulero-Lagrange non banale è

$$ml^2\ddot{\phi} = ml^2\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi - mgl\sin\phi,$$

oppure

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi + \frac{p_\theta}{ml^2}\operatorname{cotg}\phi.$$

Per $p_\theta = 0$ l'equazione di Eulero-Lagrange si riduce a quella per il pendolo semplice. c) Le due costanti del moto sono p_θ [essendo ciclica la variabile θ] e l'hamiltoniana.

6. a) Essendoci una particella e due vincoli, c'è un singolo grado di libertà. Poichè $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = 1-\rho^2$ e $U = \frac{1}{2}k(\rho^2+z^2) = \frac{1}{2}k\{\rho^2 + [1-\rho^2]^2\}$ in coordinate cilindriche, abbiamo $\theta = \pm(\pi/4)$. Quindi l'unica variabile indipendente è ρ. b) Dunque

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2(1+4\rho^2) - \tfrac{1}{2}k(\rho^4 - \rho^2 + 1).$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$4m\dot{\rho}^2\rho - \tfrac{1}{2}k(4\rho^3 - 2\rho) = \frac{d}{dt}\left\{m\dot{\rho}(1+4\rho^2)\right\},$$

oppure

$$\dot{\rho}^2\rho = -\frac{k}{2m}(\rho^3 - \tfrac{1}{2}\rho) - \tfrac{1}{4}\ddot{\rho}(1+4\rho^2).$$

c) L'hamiltoniana è una costante del moto.