es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 16.04.2013

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = t, \qquad y = \tfrac{3}{5}[1 + \cosh(t)], \qquad z = \tfrac{4}{5}[1 - \cosh(t)],$$

essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P.
   b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t.
   c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.
   d. Calcolare la torsione della curva descritta dal punto P.

2. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq |z|\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

   a. Trovare il baricentro del solido.
   b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.
   c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di equazione $x = y = h$.

3. Una molla di massa m si muove lungo la verticale nella presenza di una seconda forza d'attrito proporzionale alla sua velocità, cioè,

$$\vec{F} = -[kz + c\dot{z}]\vec{k}$$

per opportune costanti $k, c > 0$, essendo $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

a. Sotto l'ipotesi che $0 < c < 2\sqrt{k}$ e $\dot{z} = 0$, si determinino la posizione e la velocità della massa all'istante t.

b. Sotto l'ipotesi che $c = 2\sqrt{k}$ e $\dot{z} = 0$, si determinino la posizione e la velocità della massa all'istante t.

4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ sotto l'effetto della sola forza

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2}\,\hat{e}_r = -\frac{GMm(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

essendo $G > 0$ la costante gravitazionale e M una massa concentrata all'origine.

a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.

b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

c. Indicare, motivando la risposta, almeno due costanti del moto.

5. Un pendolo semplice di lunghezza ℓ è vincolato ad un piano che subisce una rotazione costante di velocità angolare ω. Siaθ l'angolo tra il pendolo e la verticale, g l'accelerazione gravitazionale e m la massa del pendolo.

a. Partendo dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell[1 - \cos(\theta)] - \tfrac{1}{2}m\ell^2\omega^2\cos^2(\theta),$$

si determini l'equazione di Eulero-Lagrange.

b. Si calcolo il corrispondente hamiltoniano e si derivino le equazioni di Hamilton.

c. Indicare (con motivazione) una costante del moto.