

Tabella 2: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
6	6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 02.02.2012

Cognome e nome:Matricola:

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P :

$$x = 2t - \sin(2t), \quad y = 1 - \cos(2t), \quad z = 4 \sin(t),$$

essendo $t \geq 0$.

- Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P .
- Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t .
- Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P .
- Qual'è la torsione della curva in ogni punto?

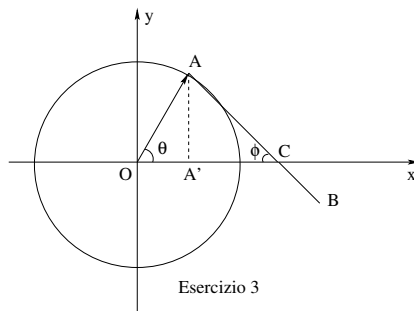
2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 2\vec{j} + \vec{k}), \quad (P_2, -2\vec{i} + \vec{k}), \quad (P_3, -\vec{j} - \vec{k}), \quad (P_4, 2\vec{i}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$, $P_4 = (0, 0, 0)$. Si chiede di:

- Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
- Scrivere l'equazione dell'asse centrale.
- Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.

3. Nel piano xy di un sistema cartesiano levogiro $Oxyz$, si consideri l'asta AB vincolata con l'estremo A a ruotare uniformemente sulla circonferenza di centro O e raggio R , e a passare per il punto C sull'asse x . Sia $h = \|OC\|$. Determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$ dell'asta e la velocità del punto dell'asta che transita per C .



4. Consideriamo l'unione $S = S_1 \cup S_2$ delle due semisfere omogenee

$$\begin{cases} S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2, z \geq R\}, \\ S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z + R)^2 \leq R^2, z \leq -R\}, \end{cases}$$

essendo $R > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella semisfera superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

- a. Determinare il baricentro di S .
 - b. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse z .
 - b. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse $z = R$.
5. Consideriamo il sistema binario di due stelle puntiformi di masse M_1 e M_2 . Le due stelle si muovono nel piano xy .
- a. Determinare la velocità iniziale \vec{v}_0 affinché la traiettoria della seconda stella attorno al baricentro sia una circonferenza.
 - b. Dimostrare la terza legge di Newton (cioè, a^3/τ^2 costante) se la traiettoria della seconda stella è una circonferenza attorno al baricentro.
 - c. Trovare almeno un punto in cui qualunque massa sarebbe sottoposta, da parte delle due stelle, a forze gravitazionali in equilibrio.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla paraboloida di equazione $z = 2(x^2 + y^2)$ sotto l'effetto della sola forza

$$\vec{F} = -k(x^2 + y^2)(x\vec{i} + y\vec{j}),$$

essendo $k > 0$ un'opportuna costante.

- a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.
- b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
- c. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.