es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es. 6	somma
6	6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 07.09.2012

Cognome e nome: ....Matricola: ....

Gli studenti che hanno seguito il corso nell'AA 2011-2012 devono svolgere gli esercizi 1-5. Gli studenti che hanno seguito nell'AA precedenti devono svolgere gli esercizi 1-4 e 6.

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = e^{-2t}\cos(3t)\cos(4t), \quad y = e^{-2t}\cos(3t)\sin(4t), \quad z = e^{-2t}\sin(3t).$$

essendo $t \geq 0$.

a. Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P.

b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t.

c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.

2. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq 2h,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq |z|\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

a. Trovare il baricentro del solido.

b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.

c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse x.

d. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di equazione $y = z = 2h$.

3. Consideriamo il sistema dei due corpi, il Sole di massa M_S e un pianeta di massa m. I due corpi si muovono nel piano xy.

   a. Determinare la velocità iniziale $\vec{v}_0$ affinchè la traiettoria del pianeta attorno al baricentro sia una circonferenza.

   b. Dimostrare la terza legge di Keplero (cioè, a^3/τ^2 costante) se la traiettoria del pianeta è una circonferenza attorno al baricentro.

   c. Determinare i vincoli sull'energia totale $\mathcal{H}$ affinchè il pianeta possa essere estromesso dal sistema Solare. Quale tipo di traiettoria seguirebbe il pianeta?

4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sotto l'effetto della sola forza

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2}\,\hat{e}_r = -\frac{GMm(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

   essendo $G > 0$ la costante gravitazionale e M una massa concentrata all'origine.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.

   b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   c. Indicare, motivando la risposta, almeno due costanti del moto.

5. Per opportune costanti fisiche positive k e α si consideri l'hamiltoniano

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{k}{2}\left[q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_1q_2 - q_2q_3 - q_3q_1 \right.$$
$$\left. - \alpha q_1(q_2^2 - q_3^2) - \alpha q_2(q_3^2 - q_1^2) - \alpha q_3(q_1^2 - q_2^2)\right],$$

   dove $m(t) = m_0 e^{-\gamma t}$ è la massa variabile delle tre particelle e $\gamma > 0$.

   a. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange

   b. Trovare la hamiltoniana e derivare le equazioni di Hamilton.

   c. Indicare, motivando la risposta, almeno una costante di moto.

6. P_1, P_2 e P_3 siano tre punti di un corpo rigido in movimento. Rispetto ad una terna solidale siano: $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,3,0)$, $P_3(0,0,0)$, sono date le velocità di P_1 e P_2 ad un dato istante, cioè $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (-1,2,-2)$, mentre la velocità di P_3 in quell'istante è parallela al piano xy.

   a. Determinare la velocità $\vec{v}_3$ di P_3 e la velocità angolare $\vec{\omega}$.

   b. Stabilire se l'atto di moto è rotatorio.

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es. 6	somma
6	6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 21.09.2012

Cognome e nome: ....Matricola: ....

Gli studenti che hanno seguito il corso nell'AA 2011-2012 devono svolgere gli esercizi 1-5. Gli studenti che hanno seguito nell'AA precedenti devono svolgere gli esercizi 1-4 e 6.

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = \tfrac{3}{5}t, \qquad y = -\tfrac{4}{5}t, \qquad z = \tfrac{1}{2}t^2.$$

essendo $t \geq 0$.

a. Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P.

b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t.

c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.

d. Qual'è la torsione della curva in ogni punto?

2. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h,\ 3(x^2 + y^2) \leq z\} \cup \{(0, 0, -h)\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità della parte superiore sia uguale a ρ e che nel punto $P(0, 0, -h)$ è concentrata una massa m.

a. Trovare il baricentro del solido.

b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.

c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse x.

d. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di equazione $y = 0$ e $z = -h$.

3. Una particella di massa m cade sotto l'effetto della forza gravitazionale e di una seconda forza d'attrito proporzionale al suo vettore velocità, cioè,

$$\vec{F} = -m\left\{g\vec{k} + c\dot{\vec{x}}\right\}$$

per un'opportuna costante $c > 0$, essendo $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

   a. Date la posizione iniziale $(0, 0, z_0)$ e la velocità iniziale $(\dot{x}_0, 0, 0)$, determinare la velocità $\dot{\vec{x}}(t)$.
   b. Discutere l'andamento della velocità se $t \to +\infty$.
   c. Determinare la posizione $\vec{x}(t)$.
   d. Discutere l'andamento della posizione se $t \to +\infty$.

4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie conica di equazione $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ sotto l'effetto della sola forza elastica

$$\vec{F} = -k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\hat{e}_r = -k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

essendo $k > 0$ la costante di elasticità.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.
   b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
   c. Indicare, motivando la risposta, tutti i moti lungo una circonferenza di tipo $\sqrt{x^2 + y^2} = R$.

5. Per opportune costanti fisiche positive k e α si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_2 - q_1) - V(q_3 - q_2) - V(q_1 - q_3),$$

dove m è la massa delle tre particelle e $V(r) = e^{-2r} + 2r - 1$.

   a. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange.
   b. Trovare la hamiltoniana e derivare le equazioni di Hamilton.
   c. Indicare, motivando la risposta, almeno due costanti di moto.

6. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}), \quad (P_2, 3\vec{i} - \vec{k}), \quad (P_3, -\vec{j} + \vec{k}), \quad (P_4, \vec{j}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$, $P_4 = (0, 0, 0)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.

   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.

   c. Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es. 6	somma
6	6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 14.12.2012

Cognome e nome: ....Matricola: ....

Gli studenti che hanno seguito il corso nell'AA 2011-2012 devono svolgere gli esercizi 1-5. Gli studenti che hanno seguito nell'AA precedenti devono svolgere gli esercizi 1-4 e 6.

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

   $$x = 15e^{-5t}\sin(2t)\cos(3t),\ y = 15e^{-5t}\sin(2t)\sin(3t),\ z = 8e^{-5t}\cos(2t).$$

   essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P.
   b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t.
   c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.

2. Consideriamo il solido di rotazione

   $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h,\ x^2 + y^2 \leq |z|\sqrt{2}\},$$

   essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

   a. Trovare il baricentro del solido.
   b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.
   c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse x.
   d. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di equazione $y = z = -h$.

3. Consideriamo il sistema dei due corpi, il Sole di massa M_S e un pianeta di massa $m \ll M_S$. I due corpi si muovono nel piano xy.

   a. Determinare la velocità iniziale $\vec{v}_0$ affinchè la traiettoria del pianeta attorno al baricentro sia una circonferenza.

   b. Dimostrare la terza legge di Keplero (cioè, a^3/τ^2 costante) se la traiettoria del pianeta è una circonferenza attorno al baricentro.

   c. Determinare i vincoli sull'energia totale $\mathcal{H}$ affinchè il pianeta possa essere estromesso dal sistema Solare. Quale tipo di traiettoria seguirebbe il pianeta?

   d. Supponendo che il raggio del Sole sia il duecentesimo della distanza tra il pianeta e il baricentro, quale deve essere il rapporto minimo delle masse M_S/m affinché il baricentro cada all'interno del Sole?

4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ sotto l'effetto della sola forza

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{x^2+y^2+z^2}\,\hat{e}_r = -\frac{GMm(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

   essendo $G > 0$ la costante gravitazionale e M una massa concentrata all'origine.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.

   b. Formulare le equazioni di Hamilton.

   c. Indicare, motivando la risposta, almeno due costanti del moto.

5. Per opportune costanti fisiche positive k e α si consideri l'hamiltoniano

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2) + \frac{k}{2}\big[q_1^2+q_2^2+q_3^2-q_1q_2-q_2q_3-q_3q_1\\ -\alpha q_1(q_2^2-q_3^2)-\alpha q_2(q_3^2-q_1^2)-\alpha q_3(q_1^2-q_2^2)\big]\,,\end{aligned}$$

   dove $m(t) = m_0 e^{-\gamma t}$ è la massa variabile delle tre particelle e $\gamma > 0$.

   a. Derivare le equazioni di Hamilton.

   b. Trovare la lagrangiana e derivare le equazioni di Eulero-Lagrange.

c. Indicare, motivando la risposta, almeno una costante di moto.

6. P_1, P_2 e P_3 siano tre punti di un corpo rigido in movimento. Rispetto ad una terna solidale le loro coordinate siano $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,3,0)$, $P_3(0,0,0)$. Sono date le velocità di P_1 e P_2 ad un dato istante, cioè $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (-1,2,-2)$, mentre la velocità di P_3 in quell'istante è parallela al piano xy.

   a. Determinare la velocità $\vec{v}_3$ di P_3 e la velocità angolare $\vec{\omega}$.

   b. Stabilire se l'atto di moto è rotatorio.