Tabella 1: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
5	5	5	5	5	5	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale
02.02.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = 4(t+1), \qquad y = -3\sin(t), \qquad z = 3\cos(t),$$

essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.
   b. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.
   c. Qual'è la torsione della curva in ogni punto?

2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}), \quad (P_2, -\vec{i}+\vec{k}), \quad (P_3, -\vec{j}-\vec{k}),$$

essendo $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.

3. Consideriamo un corpo rigido in movimento con tre punti solidali P_1, P_2 e P_3, le cui coordinate rispetto ad una terna levogira sono:

$$P_1 = (0,0,0), \qquad P_2 = (0,0,1), \qquad P_3 = (0,2,0).$$

Sono date le velocità di P_1 e P_2 ad un dato istante, mentre del punto P_3 si sa solo che la sua velocità in quell'istante è parallela al piano di equazione $x = 0$. Si ha cioè:

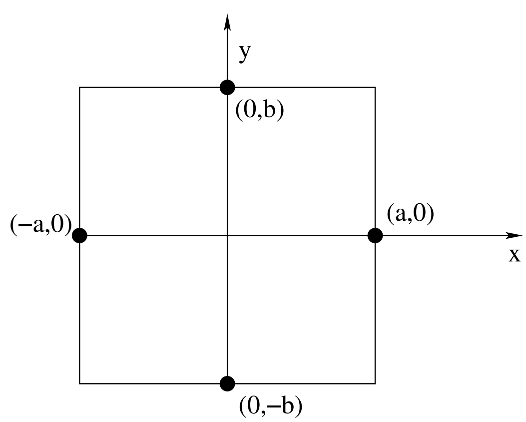
$$\vec{v}_1 = (-1, 2, -2), \qquad \vec{v}_2 = (3, 1, -2), \qquad \vec{v}_3 = (0, \dot{y}, \dot{z}).$$

a. Determinare $\vec{v}_3$.

b. Determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$.

c. Vedere se l'atto di moto è rotatorio.

4. Sia data una lamina rettangolare disposta come in figura. Supponiamo



che la parte (rettangolare) del semipiano superiore abbia densità costante μ_1 e quella sul semipiano inferiore densità μ_2 (con $\mu_1 \neq \mu_2$). Si determinino

a. il baricentro del rettangolo,

b. il momento d'inerzia rispetto all'asse y.

5. Consideriamo il pendolo semplice con attrito costituito da un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una circonferenza liscia situata in un piano verticale. Sia l la lunghezza del pendolo. Supponiamo che agiscano solo due forze: la forza gravitazionale mg, e la forza di attrito pensata proporzionale alla velocità angolare $-c\dot{\theta}$, con $c > 0$.

a. Trovare le equazioni del moto dalla seconda legge di Newton.

b. Spiegare perchè, nel caso in cui **non** c'è l'attrito, la forza totale è conservativa.

c. Spiegare perchè, nel caso in cui c'è l'attrito, la forza totale **non** è conservativa.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie conica di equazione $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ sotto l'effetto della forza elastica $\vec{F} = -k\vec{r}$, essendo $k > 0$ la costante di elasticità.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si consiglia di scegliere le solite coordinate cilindriche).

   b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   c. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

Soluzioni:

1. Abbiamo $\dot{x} = 4$, $\dot{y} = -3\cos(t)$, $\dot{z} = -3\sin(t)$ e $\|\vec{v}(t)\| = 5$. Quindi $s(t) = 5t$ e $\vec{t}(s) = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\cos(\frac{s}{5})\vec{j} - \frac{3}{5}\sin(\frac{s}{5})\vec{k}$. Dunque $(d\vec{t}/ds) = \frac{3}{25}\sin(\frac{s}{5})\vec{j} - \frac{3}{25}\cos(\frac{s}{5})\vec{k}$ e $\kappa(s) = \frac{3}{25}$, quindi $\vec{n}(s) = \sin(\frac{s}{5})\vec{j} - \cos(\frac{s}{5})\vec{k}$. Allora
$$\vec{b}(s) = \vec{t} \wedge \vec{n} = \tfrac{3}{5}\vec{i} + \tfrac{4}{5}\cos(\tfrac{s}{5})\vec{j} + \tfrac{4}{5}\sin(\tfrac{s}{5})\vec{k},$$
e quindi $(d\vec{b}/ds) = -\frac{4}{25}\sin(\frac{s}{5})\vec{j} + \frac{4}{25}\cos(\frac{s}{5})\vec{k}$. Di conseguenza, applicando la terza legge di Fresnel, $\chi(s) = -\frac{4}{25}$.

2. Siano $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{v}_3 = -\vec{j} - \vec{k}$. Allora
$$\begin{aligned} M(O) &= (P_1 - O) \wedge \vec{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \vec{v}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}. \end{aligned}$$
Essendo il risultante dato da $\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{k}$, $R^2 = 2$, un punto dell'asse centrale è dato da
$$A = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(\vec{i} - \vec{k}) = (\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}).$$
L'equazione dell'asse è $x = \frac{1}{2} + t$, $y = 0$ e $z = -\frac{1}{2} + t$, oppure $x = 1 + z$ e $y = 0$.

3. Sia $\vec{\omega} = (p, q, r)$. Allora $\vec{\omega} \wedge OP_1 = 0$,
$$\vec{\omega} \wedge OP_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = q\vec{i} - p\vec{j}, \qquad \vec{\omega} \wedge OP_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2r\vec{i} + 2p\vec{k}.$$
Allora
$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{\omega} \wedge OP_2 = (-1 + q)\vec{i} + (2 - p)\vec{j} - 2\vec{k}, \\ \vec{v}_3 &= \vec{v}_1 + \vec{\omega} \wedge OP_3 = (-1 - 2r)\vec{i} + 2\vec{j} + (-2 + 2p)\vec{k}. \end{aligned}$$
Questi vettori sono uguali ai suddetti vettori $\vec{v}_2 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_3 = (0, \dot{y}, \dot{z})$ se e solo se $p = 1$, $q = 4$ e $r = -\frac{1}{2}$. Inoltre $\dot{y} = 2$ e $\dot{z} = -2 + 2p = 0$, cioè $\vec{v}_3 = (0, 2, 0)$.

4. a) Baricentro: $x_G = 0$, mentre

$$y_G = \frac{\mu_1 \int_{-a}^{a} dx \int_0^b y\,dy + \mu_2 \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{0} y\,dy}{2ab(\mu_1+\mu_2)} = \frac{b}{2}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}.$$

In alternativa, si calcolino i baricentri $(0, \frac{b}{2})$ della parte superiore del rettangolo e $(0, -\frac{b}{2})$ della parte inferiore. Le loro rispettive masse $2ab\mu_1$ e $2ab\mu_2$ si possono considerare concentrate nei rispettivi baricentri. In tal caso il baricentro del rettangolo totale viene calcolato come baricentro dei suddetti punti di massa. b) Momento d'inerzia:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_C \mu(x,y)(x^2+y^2)\,dC = \mu_1 \int_{-a}^{a} x^2\,dx \int_0^b dy + \mu_2 \int_{-a}^{a} x^2\,dx \int_{-b}^{0} dy \\ &= \tfrac{2}{3}a^3 b(\mu_1+\mu_2) = \tfrac{1}{3}a^2 M, \end{aligned}$$

dove $M = 2ab(\mu_1+\mu_2)$ è la massa totale.

5. La forza gravitazionale, $-mg\vec{k}$, ha un componente centripetale diretto verso l'origine (di lunghezza $mg\cos\theta$) e un componente tangenziale. Quest'ultimo (di lunghezza $mg\sin\theta$) e la forza di attrito $c\dot{\theta}$ tendono a frenare il moto. Quindi l'equazione del moto è la seguente:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - c\dot{\theta},$$

oppure

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Poichè, per $c > 0$, la forza dipende dalla posizione e dalla velocità della massa, essa non può essere conservativa. Per $c = 0$ abbiamo $\vec{F}_{\text{tot}} = -mg\vec{k} = -\nabla U$, dove $U = mgz$; quindi in tal caso la forza totale è conservativa.

6. C'è una singola particella e c'è un vincolo; quindi ci sono $N = 2$ gradi di libertà. Scegliando le coordinate cilindriche (r, θ, z), otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt}(r\sqrt{3}) = \dot{r}\sqrt{3}, \end{aligned}$$

e quindi

$$|\dot{\boldsymbol{x}}(t)| = [\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 3\dot{r}^2]^{1/2}.$$

Dunque

$$T = \tfrac{1}{2}m[4\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2], \qquad U = \tfrac{1}{2}k(r^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}k(r^2 + 3r^2) = 2kr^2,$$

e quindi

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m[4\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - 2kr^2.$$

Poichè la lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente da t, l'hamiltoniana $H = T + U$ è una costante del moto. Un'altra costante del moto è il momento generalizzato

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

poichè θ è una variabile ciclica (cioè, $\mathcal{L}$ non dipende da θ). Un'equazione di Lagrange è $p_\theta =$ costante oppure $\dot{p}_\theta = 0$. L'altra è

$$\underbrace{mr\dot{\theta}^2 - 4kr}_{=\partial\mathcal{L}/\partial r} = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{4m\dot{r}}_{=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}}\right],$$

oppure

$$\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{4m^2r^3} - \frac{k}{m}r.$$