Tabella 1: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
5	5	5	5	5	5	30

Meccanica Razionale 1: Primo Scritto Generale
19.01.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = \cos(t), \qquad y = z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t),$$

essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.
   b. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.
   c. Senza fare calcoli: Qual'è la torsione della curva in ogni punto? Perchè?

2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}), \quad (P_2, \vec{j} + 2\vec{k}), \quad (P_3, \vec{i} + \vec{j}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (1, 0, 1)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.

3. Un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{1 + t^2} \, \vec{u},$$

essendo $\vec{u}$ il versore dell'asse di rotazione.

a. Calcolare la velocità e il suo modulo di un punto P situato a distanza d dell'asse di rotazione.

b. Calcolare l'accelerazione e il suo modulo di un punto P situato a distanza d dell'asse di rotazione.

4. Sia dato un disco di raggio R con centro l'origine nel piano XY, composto da parti omogenee: la parte superiore ($y > 0$) di densità μ_1 e la parte inferiore ($y < 0$) di densità μ_2. Si determinino

   a. il baricentro del disco,

   b. il momento d'inerzia rispetto all'asse x.

5. Consideriamo il pendolo semplice, dove un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza liscia situata nel piano xz. Purtroppo c'è anche un vento orizzontale e parallelo al piano xz che esercita una forza costante e orizzontale sulla massa (cioè, $\vec{F}_{\text{vento}} = ma_v\vec{i}$, essendo $a_v > 0$).

   a. Trovare la forza applicata totale.

   b. Spiegare perchè la forza applicata totale è conservativa.

   c. Trovare le equazioni del moto.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sul paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ sotto l'effetto della forza elastica $\vec{F} = -k\vec{r}$, essendo $k > 0$ la costante di elasticità.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si consiglia di scegliere le solite coordinate cilindriche).

   b. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

   c. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

Soluzioni:

1. La velocità è
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \left(-\sin(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \right), \qquad |\dot{\boldsymbol{x}}(t)| = 1.$$
Quindi $s(t) = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{x}}(t')|\,dt' = t$. Allora
$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \left(-\cos(t), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \right), \ \kappa(s) = \left| \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} \right| = 1.$$
Poichè il moto è piano (infatti, avviene nel piano $y = z$), si deve annullare la torsione. P.S. Introducendo le coordinate ortogonali
$$\xi = x, \qquad \eta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(y+z), \qquad \zeta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(-y+z),$$
si possono riscrivere le equazioni del moto nella seguente forma:
$$\xi = \cos(t), \qquad \eta = \sin(t), \qquad \zeta = 0.$$

6. C'è una singola particella e c'è un vincolo; quindi ci sono $N = 2$ gradi di libertà. Scegliando le coordinate cilindriche (r, θ, z), otteniamo
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot{r}, \end{aligned}$$
e quindi
$$|\dot{\boldsymbol{x}}(t)| = [\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2]^{1/2}.$$
Dunque
$$T = \tfrac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2], \qquad U = \tfrac{1}{2}k(r^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}k(r^2 + r^4),$$
e quindi
$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2] - \tfrac{1}{2}k(r^2 + r^4).$$
Poichè la lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente da t, l'hamiltoniana $H = T + U$ è una costante del moto. Un'altra costante del moto è il momento generalizzato
$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

poichè θ è una variabile ciclica (cioè, $\mathcal{L}$ non dipende da θ). Un'equazione di Lagrange è $p_\theta =$ costante oppure $\dot{p}_\theta = 0$. L'altra è

$$\underbrace{mr\dot{\theta}^2 + 4mr\dot{r}^2 - kr - 2kr^2}_{=\partial\mathcal{L}/\partial r} = \underbrace{m\dot{r} + 4mr^2\dot{r}}_{=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}}.$$