Meccanica Razionale 1: Secondo parziale: 01.06.2012

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
10	10	10	30

1. Un pendolo semplice di lunghezza ℓ e massa m si muove nel piano $y = 0$ in un contenitore colmo di petrolio, sotto l'azione della forza gravitazionale e di una forza di attrito tangenziale proporzionale alla sua velocità angolare $\dot{\theta}$.

   a. Il sistema è olonomo? Determinarne i gradi di libertà.

   b. Determinare l'equazione del moto.

   c. Sotto l'ipotesi che l'angolo θ sia piccolo (in modo da usare l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$), risolvere l'equazione del moto.

2. Un sistema di tre oscillatori aventi tutti massa unitaria si muove sotto l'effetto dell'hamiltoniano
$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{p_3^2}{2} + V(q_2 - q_1) + V(q_3 - q_2) + V(q_1 - q_3),$$
essendo $V(r) = e^{-r} + r - 1$.

   a. Determinare i gradi di libertà.

   b. Determinare le equazioni di Hamilton.

   c. Calcolare la lagrangiana e determinare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   d. Indicare, motivando la risposta, almeno una costante del moto.

3. Una particella si muove sotto l'effetto della forza gravitazionale $\vec{F} = -mg\vec{k}$, ma è vincolata a muoversi sulla superfice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   a. Indicare le forze che agiscono sulla particella, in coordinate sferiche.

   b. Determinare i gradi di libertà e, motivando la risposta, le costanti del moto.

   c. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange in coordinate sferiche.

SOLUZIONI:

1. Poichè la forza risultante dipende dalla velocità della massa, il sistema è anolonomo. Vincolando la massa a muoversi nel piano $y = 0$ (in modo che ci sia un grado di libertà) e ponendo $x = l\sin\theta$ e $z = -l\cos\theta$, la forza gravitazionale $\vec{F} = -mg\vec{k}$ deriva dall'energia potenziale $V = mgz = -mgl\cos\theta$. La forza tangenziale tende a ridurre $\dot{\theta}$ e quindi vale $\vec{F_t} = -c\dot{\theta}$, essendo c una costante positiva. La componente tangenziale della forza gravitazionale è $-mg\sin\theta$. Dunque l'equazione del moto è data da:
$$ml\ddot{\theta} = -c\dot{\theta} - mg\sin\theta.$$
Sotto l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$ si ha:
$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$
dove $\gamma = \frac{c}{ml}$ e $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Ci sono tre casi:

   a. $0 < \gamma < 2\omega$: ponendo $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\gamma^2}$ si ha:
   $$\theta(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left[\theta(0)\cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\theta}(0) + \frac{1}{2}\gamma\theta(0)}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right],$$

   b. $\gamma = 2\omega$:
   $$\theta(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left\{\theta(0) + [\dot{\theta}(0) + \tfrac{1}{2}\gamma\theta(0)]t\right\},$$

   c. $\gamma > 2\omega$: ponendo $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega^2}$ si ha:
   $$\theta(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left[\theta(0)\cosh(\omega_2 t) + \frac{\dot{\theta}(0) + \frac{1}{2}\gamma\theta(0)}{\omega_2}\sinh(\omega_2 t)\right].$$

2. Essendoci tre gradi di libertà, le equazioni di Hamilton sono le seguenti:
$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_1 \Longrightarrow p_1 = \dot{q}_1,$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = \dot{q}_2 \Longrightarrow p_2 = \dot{q}_2,$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_3} = \dot{q}_3 \Longrightarrow p_3 = \dot{q}_3,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_1} &= -\dot{p}_1 \Longrightarrow \dot{p}_1 = V'(q_2-q_1) - V'(q_1-q_3) = -e^{q_1-q_2} + e^{q_3-q_1}, \\
\frac{\partial H}{\partial q_1} &= -\dot{p}_1 \Longrightarrow \dot{p}_2 = -V'(q_2-q_1) + V'(q_3-q_2) = e^{q_1-q_2} - e^{q_2-q_3}, \\
\frac{\partial H}{\partial q_1} &= -\dot{p}_1 \Longrightarrow \dot{p}_3 = -V'(q_3-q_2) + V'(q_1-q_3) = e^{q_2-q_3} - e^{q_3-q_1}.
\end{aligned}
$$

La lagrangiana è data dall'espressione

$$
\begin{aligned}
L &= p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 - H \\
&= (\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2 - \frac{1}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2\right. \\
&- \left. V(q_2-q_1) - V(q_3-q_2) - V(q_1-q_3)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2\right] - V(q_2-q_1) - V(q_3-q_2) - V(q_1-q_3).
\end{aligned}
$$

Quindi risultano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \Longrightarrow \ddot{q}_1 = V'(q_2-q_1) - V'(q_1-q_3) = -e^{q_1-q_2} + e^{q_3-q_1}, \\
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \Longrightarrow \ddot{q}_2 = -V'(q_2-q_1) + V'(q_3-q_2) = e^{q_1-q_2} - e^{q_2-q_3}, \\
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \Longrightarrow \ddot{q}_3 = -V'(q_3-q_2) + V'(q_1-q_3) = e^{q_2-q_3} - e^{q_3-q_1}.
\end{aligned}
$$

Poichè L non dipende da t, l'hamiltoniano H è una costante del moto. Un'altra costante del moto è la quantità di moto totale $p_1 + p_2 + p_3$, come segue sommando le tre equazioni del moto.

3. Sulla particella agiscono le seguenti due forze: a) la forza gravitazionale, b) la reazione vincolare (ortogonale al piano tangente alla superficie conica). Ci sono due gradi di libertà. Introducendo le coordinate sferiche

$$
x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\varphi,
$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{\rho} \sin\varphi \cos\theta - \rho\dot{\theta} \sin\varphi \sin\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left[\dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta\right], \\
\dot{y} &= \dot{\rho} \sin\varphi \sin\theta + \rho\dot{\theta} \sin\varphi \cos\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left[\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta\right], \\
\dot{z} &= \dot{\rho}\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\dot{\rho},
\end{aligned}
$$

essendo $\varphi = \frac{\pi}{4}$ il vincolo in coordinate sferiche. Quindi

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \tfrac{1}{2}\left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2\right] = \dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}^2.$$

La forza gravitazionale deriva dal potenziale

$$V(x, y, z) = mgz = mg\rho\cos\varphi = \tfrac{1}{2}mg\sqrt{2}\,\rho.$$

Quindi la lagrangiana ha la forma

$$L = \tfrac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}^2] - \tfrac{1}{2}mg\sqrt{2}\,\rho.$$

Poichè θ è una variabile ciclica, il corrispondente momento

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \tfrac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}$$

è una costante del moto, come lo è anche l'hamiltoniano

$$H = \tfrac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}^2] + \tfrac{1}{2}mg\sqrt{2}\,\rho,$$

essendo L indipendente dal tempo. L'equazione di Eulero-Lagrange è data da:

$$m\ddot{\rho} = \tfrac{1}{2}m\rho\dot{\theta}^2 - \tfrac{1}{2}mg\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}m\rho\left(\frac{2p_\theta}{m\rho^2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}mg\sqrt{2} = \frac{2p_\theta^2}{m\rho^3} - \tfrac{1}{2}mg\sqrt{2}.$$

Le espressioni per le costanti del moto H e p_θ conducono all'equazione differenziale

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2H}{m} - \frac{2p_\theta^2}{m^2\rho^2} - g\sqrt{2}\,\rho.$$