Meccanica Razionale 1: Primo parziale
15.04.2010

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
9	12	9	30

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = \frac{1 - \cos(2\alpha t)}{2}, \quad y = \alpha t - \tfrac{1}{2}\sin(2\alpha t), \quad z = -2\sin(\alpha t),$$

dove α è una costante positiva.

   a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.

   b. Calcolare le componenti e i moduli dell'accelerazione del punto P.

   c. Calcolare la curvatura e i versori tangente e normale della curva (spaziale) descritta dal punto P.

2. Nel piano cartesiano Oxy si consideri l'asta PQ vincolata con l'estremo P a ruotare uniformemente sulla circonferenza di centro O e raggio R nel senso antiorario, e vincolata con l'estremo Q sul semiasse positivo delle y, essendo ℓ ($\ell > 2R$) la lunghezza dell'asta. Inizialmente (cioè, per $t = 0$) il punto P si trova sul semiasse negativo delle y.

   a. Calcolare la velocità del punto P.

   b. Calcolare la velocità del punto Q.

   c. Calcolare la velocità angolare dell'asta, sapendo che il punto P si muove sulla circonferenza con velocità angolare ω. Suggerimento: Usare la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi.

   d. Determinare la traiettoria del punto medio S dell'asta. Basta trovarla nella forma implicita $F(x, y) = 0$ per un'opportuna funzione F.

3. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, -\vec{i}+\vec{j}), \quad (P_2, -7\vec{i}+\vec{k}), \quad (P_3, -8\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}),$$

essendo $P_1 = (0, 0, \frac{1}{7})$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (0, 1, 0)$. Si chiede di:

a. Trovare il risultante e l'invariante scalare del sistema.

b. Trovare, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati possibile) a cui il sistema è riducibile.

c. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.

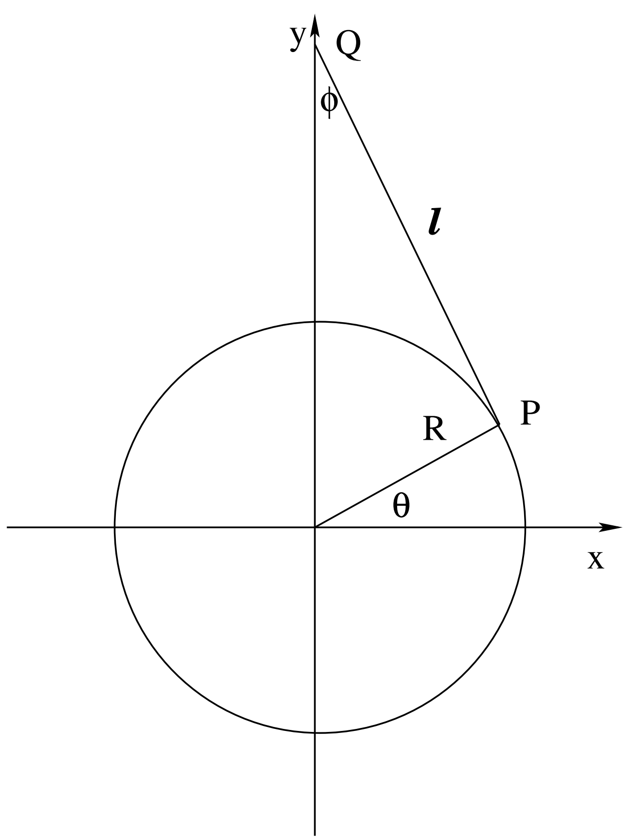

Figura 1: Figura illustrativa dell'esercizio N.2.

1. **SOLUZIONE**: a) Calcolando la derivata rispetto a t otteniamo

$$\dot{x} = \alpha \sin(2\alpha t), \quad \dot{y} = \alpha[1 - \cos(2\alpha t)], \quad \dot{z} = -2\alpha \cos(\alpha t),$$

e dunque

$$v = \alpha\sqrt{\sin^2(2\alpha t) + [1 - \cos(2\alpha t)]^2 + 4\cos^2(\alpha t)} = 2\alpha.$$

b) Calcolando le derivate dei componenti della velocità rispetto a t si trovano

$$\ddot{x} = 2\alpha^2 \cos(2\alpha t), \quad \ddot{y} = 2\alpha^2 \sin(2\alpha t), \quad \ddot{z} = 2\alpha^2 \sin(\alpha t),$$

e dunque

$$a = 2\alpha^2\sqrt{\cos^2(2\alpha t) + \sin^2(2\alpha t) + \sin^2(\alpha t)} = 2\alpha^2\sqrt{1 + \sin^2(\alpha t)}.$$

c) Infine, $s(t) = \int_0^t v(\hat{t})\, d\hat{t} = 2\alpha t$ e quindi $(du/ds) = \dot{u}/2\alpha$. Ora si calcoli il versore tangente $\vec{T} = [\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}]/v$:

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \tfrac{1}{2}\sin(2\alpha t)\vec{i} + \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha t)]\vec{j} - \cos(\alpha t)\vec{k} \\ &= \tfrac{1}{2}\sin(s)\vec{i} + \tfrac{1}{2}[1 - \cos(s)]\vec{j} - \cos(\tfrac{1}{2}s)\vec{k}.\end{aligned}$$

Dunque, calcolando la derivata rispetto ad s otteniamo[1]

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \tfrac{1}{2}[\cos(s)\vec{i} + \sin(s)\vec{j} + \sin(\tfrac{1}{2}s)\vec{k}],$$

e quindi la curvatura è data dall'espressione

$$k(s) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2(s) + \sin^2(s) + \sin^2(\tfrac{1}{2}s)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin^2(\tfrac{1}{2}s)}.$$

Dividendo $d\vec{T}/ds$ dalla curvatura si arriva al versore normale

$$\vec{N} = \frac{\cos(s)\vec{i} + \sin(s)\vec{j} + \sin(\tfrac{1}{2}s)\vec{k}}{\sqrt{1 + \sin^2(\tfrac{1}{2}s)}}.$$

[1] Si può anche calcolare $(d\vec{T}/ds) = \vec{a}/(2\alpha)^2$, dove $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ è l'accelerazione.

2. **SOLUZIONE**: a) Sia θ l'angolo polare tale che il punto P ha le coordinate cartesiane

$$x_P = R\cos\theta, \qquad y_P = R\sin\theta,$$

dove $\theta = -(\pi/2) + \omega t$. Quindi la velocità del punto P è data dall'espressione $\vec{v}_P = \dot{x}_P\vec{i} + \dot{y}_P\vec{j}$, dove

$$\dot{x}_P = \omega R\cos(\omega t), \qquad \dot{y}_P = \omega R\sin(\omega t).$$

b) Essendo ϕ l'angolo tra l'asta e l'asse y tale che $0 \leq \phi \leq \arctan(\frac{R}{\ell}) < \frac{\pi}{4}$, abbiamo l'equazione

$$\ell\sin\phi = R\cos\theta = R\cos(-\tfrac{1}{2}\pi + \omega t) = R\sin(\omega t).$$

Calcolando la derivata rispetto a t otteniamo

$$\ell\dot{\phi}\cos\phi = \omega R\cos(\omega t),$$

dove $\cos\phi > 0$ e quindi

$$\dot{\phi} = \frac{\omega R\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}.$$

Le coordinate del punto Q sono

$$x_Q = 0,\ y_Q = R\sin(-\tfrac{\pi}{2}+\omega t)+\ell\cos\phi = -R\cos(\omega t)+\sqrt{\ell^2-R^2\sin^2(\omega t)}.$$

Calcolando le derivate rispetto a t arriviamo alla velocità del punto Q, cioè $\vec{v}_Q = \dot{y}_Q\vec{j}$, dove

$$\dot{y}_Q = \omega R\sin(\omega t) - \frac{\omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}.$$

c) Abbiamo

$$\vec{v}_Q - \vec{v}_P = \vec{\omega}_0 \wedge (PQ),$$

dove $\vec{\omega}_0$ è la velocità angolare dell'asta. In altre parole,

$$\begin{aligned} &- \omega R\cos(\omega t)\vec{i} - \frac{\omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}\vec{j} = \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \left(-R\sin(\omega t)\vec{i} + \sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}\,\vec{j}\right). \end{aligned}$$

Siccome il moto dell'asta avviene nel piano Oxy, risulta $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$ per un'opportuna velocità angolare scalare ω_0. Utilizzando $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ e $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$, otteniamo

$$\omega_0 = \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

Un altro modo per calcolare la velocità angolare $\vec{\omega}_0$ si basa sulla seguente formula:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_0 &= \frac{(\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \wedge (P - Q)}{\ell^2} \\
&= \frac{1}{\ell^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega R \cos(\omega t) & -\dfrac{\omega R^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} & 0 \\ R \sin(\omega t) & \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \vec{k}.
\end{aligned}$$

d) Le coordinate del punto S a metà strada tra P e Q sono

$$x_S = \tfrac{1}{2} R \sin(\omega t), \qquad y_S = -R\cos(\omega t) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$

Ora bisogna eliminare la variabile t dalle espressioni per x_S e y_S e arrivare ad un'equazione del tipo $F(x_S, y_S) = 0$. Il trucco è di sfruttare l'uguaglianza $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t) &= \frac{2x_S}{R}, \\
\cos(\omega t) &= \frac{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} - 2y_S}{2R} = \frac{\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S}{2R}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$4[x_S]^2 + \left(\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S\right)^2 = 4R^2.$$

3. **SOLUZIONE**: a) $\vec{R} = -16\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. L'invariante scalare $\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$, poichè i tre punti P_1, P_2, P_3 appartengono al piano di equazione

$x + y + 7z = 1$ e i tre vettori dati sono paralleli a questo stesso piano. Volendo procedere per via diretta si trova

$$\vec{M}_0 = (P_1 - O) \wedge (-\vec{i} + \vec{j}) + (P_2 - O) \wedge (-7\vec{i} + \vec{k}) + (P_3 - O) \wedge (-8\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

Osservato che $P_1 - O = \frac{1}{7}\vec{k}$, $P_2 - O = \vec{i}$, $P_3 - O = \vec{j}$, ottengo, scegliendo O come polo,

$$\vec{M}_0 = \tfrac{1}{7}\vec{k} \wedge (-\vec{i} + \vec{j}) + \vec{i} \wedge (-7\vec{i} + \vec{k}) + \vec{j} \wedge (-8\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \tfrac{6}{7}\vec{i} - \tfrac{8}{7}\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Quindi

$$\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = -16 \cdot \tfrac{6}{7} + 2 \cdot (-\tfrac{8}{7}) + 2 \cdot 8 = -\tfrac{16}{7}(6 + 1) + 16 = -16 + 16 = 0.$$

b) Poichè $\vec{R} \neq 0$ e $\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$, il sistema dato è equivalente al risultante $\vec{R}$ applicato in un qualunque punto dell'asse centrale. Detto A un punto dell'asse centrale, il sistema dato è equivalente a $(A, \vec{R})$. Per determinare A posso utilizzare la seguente equazione

$$A - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{R^2},$$

essendo

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -16 & 2 & 2 \\ \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} & 8 \end{vmatrix} = \tfrac{128}{7}\vec{i} + \tfrac{896}{7}\vec{j} + \tfrac{116}{7}\vec{k}.$$

Siccome $R^2 = 16^2 + 4 + 4 = 264$, risulta

$$A = \tfrac{1}{264 \cdot 7}(128, 896, 116) = (\tfrac{16}{231}, \tfrac{16}{33}, \tfrac{29}{462}).$$

c) Dette x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto A trovato nel punto precedente l'equazione dell'asse centrale (in forma parametrica) è

$$x = x_0 - 16t, \quad y = y_0 + 2t, \quad z = z_0 + 2t,$$

ovvero in forma cartesiana

$$x = x_0 - 8(z - z_0), \qquad y = y_0 + z - z_0.$$