



# MECCANICA RAZIONALE 1

Corso di 8 Crediti  
Corso di Laurea Triennale  
in Matematica  
A.A. 2011-2012

Cornelis VAN DER MEE  
(a cura del dottor Francesco Demontis)  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Cagliari  
Viale Merello 92, 09123 Cagliari  
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 328-0089799 (cell.)

[cornelis@krein.unica.it](mailto:cornelis@krein.unica.it)  
<http://bugs.unica.it/~cornelis>  
**oppure:** <http://krein.unica.it/~cornelis>



# Indice

<b>I</b>	<b>Calcolo Vettoriale</b>	<b>1</b>
1	Vettori applicati . . . . .	1
2	Rappresentazione cartesiana di vettori . . . . .	3
3	Cambiamento di coordinate . . . . .	5
4	Lunghezza, curvatura e torsione di una curva . . . . .	7
<b>II</b>	<b>Cinematica del Punto</b>	<b>15</b>
1	Velocità . . . . .	16
2	Accelerazione . . . . .	17
3	Moti Piani e Moti Centrali . . . . .	20
4	Moti Armonici e Moti Armonici Smorzati . . . . .	25
<b>III</b>	<b>Baricentro e Momento d’Inerzia</b>	<b>29</b>
1	Baricentri . . . . .	29
2	Momenti d’inerzia . . . . .	32
<b>IV</b>	<b>Cinematica dei sistemi rigidi</b>	<b>37</b>
1	Equazioni generali del moto . . . . .	37
2	Prima proprietà caratteristica dei moti rigidi . . . . .	39
3	Moti rigidi particolari . . . . .	40
3.1	Moti rigidi traslatori . . . . .	40
3.2	Moti rigidi rotatori . . . . .	41
3.3	Moti rigidi rototraslatori . . . . .	45
3.4	Moti rigidi elicoidali . . . . .	46
4	Moti rigidi generali . . . . .	48
4.1	Formule di Poisson . . . . .	49
4.2	Derivata temporale di un vettore solidale al sistema rigido	52
4.3	Derivata temporale di un vettore non solidale al sistema rigido . . . . .	53
4.4	Componenti della velocità angolare rispetto al riferimento solidale . . . . .	54

5	Velocità e accelerazione in un moto rigido generale . . . . .	55
5.1	Velocità in un moto rigido . . . . .	55
5.2	Accelerazione in un moto rigido . . . . .	56
6	Atto di moto . . . . .	57
6.1	Definizione d atto di moto e asse di moto . . . . .	57
6.2	Composizione di atti di moto rigidi . . . . .	61
7	Angoli di Eulero . . . . .	62
7.1	Definizione degli angoli di Eulero . . . . .	62
7.2	Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero . . . . .	65
7.3	Espressione della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero . . . . .	66
8	Esercizi . . . . .	68
<b>V</b>	<b>Moti Relativi</b>	<b>73</b>
1	Generalità . . . . .	73
1.1	Legge di composizione delle velocità e teorema di Coriolis . . . . .	75
2	Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili . . . . .	78
3	Applicazioni ai moti rigidi . . . . .	79
3.1	Rotolamento di due superfici rigidi . . . . .	80
3.2	Moti di precessione . . . . .	81
3.3	Moti rigidi piani . . . . .	84
<b>VI</b>	<b>Vincoli</b>	<b>87</b>
1	Vincoli e loro classificazione . . . . .	87
2	Coordinate lagrangiane e sistemi olonomi . . . . .	90
3	Cenni sui sistemi anolonomi . . . . .	92
4	Spostamenti effettivi e spostamenti virtuali . . . . .	96
<b>VII</b>	<b>Dinamica Newtoniana</b>	<b>97</b>
1	Meccanica di una particella . . . . .	97
2	Meccanica di un sistema di particelle . . . . .	102
3	Lavoro, energia cinetica e energia potenziale . . . . .	105
3.1	Lavoro e energia cinetica . . . . .	105
3.2	Forze conservative e energia potenziale . . . . .	107
4	Vincoli e reazioni vincolari . . . . .	111
<b>VIII</b>	<b>Forze Centrali e Problema dei Due Corpi</b>	<b>117</b>
1	Cinematica . . . . .	117
2	Baricentro e Forze Centrali . . . . .	118
3	Forza Gravitazionale . . . . .	121
4	Vettore di Laplace-Runge-Lenz . . . . .	125

5	Problema dei Tre Corpi . . . . .	126
<b>IX</b>	<b>Calcolo delle Variazioni e Equazioni di Eulero-Lagrange</b>	<b>131</b>
1	Calcolo delle Variazioni . . . . .	131
2	Equazioni di Lagrange . . . . .	135
3	Principio di Hamilton: Sistemi Vincolati . . . . .	137
4	Momenti generalizzati . . . . .	143
5	<a href="#">Lagrangiana per la Forza Magnetica</a> . . . . .	145
6	Moltiplicatori di Lagrange . . . . .	148
<b>X</b>	<b>Equazioni del Moto di Hamilton</b>	<b>153</b>
1	Equazioni di moto di Hamilton . . . . .	153
2	Leggi di conservazione . . . . .	156
3	Principio variazionale per l'hamiltoniana . . . . .	157
4	Trasformazioni canoniche . . . . .	159
5	Integrali invarianti di Poincaré . . . . .	164
6	Parentesi di Lagrange e di Poisson . . . . .	166
7	Equazione di Hamilton-Jacobi . . . . .	172
8	<a href="#">Variabili azione-angolo</a> . . . . .	177
<b>A</b>	<b>Calcolo Differenziale in Più Variabili</b>	<b>181</b>
1	Derivate parziali e direzionali . . . . .	181
2	Nabla . . . . .	182
3	Potenziali e potenziali vettoriali . . . . .	185
4	Moltiplicatori di Lagrange . . . . .	186
<b>B</b>	<b><a href="#">Pendolo Semplice</a></b>	<b>191</b>
<b>C</b>	<b>Angoli di Eulero</b>	<b>195</b>
1	Definizione degli angoli di Eulero . . . . .	195
2	Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero	197
<b>D</b>	<b>Esercizi</b>	<b>201</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>214</b>



# Capitolo I

## Calcolo Vettoriale

In questo capitolo vengono presentati alcuni richiami di calcolo vettoriale nello spazio tridimensionale. Successivamente vengono introdotte le curve piane e spaziali e dimostrate le formule di Frenet. La maggior parte del materiale fa parte dei corsi di analisi e geometria del primo biennio.

### 1 Vettori applicati

Una coppia ordinata di punti distinti  $(A, B)$  individua nel senso della geometria ordinaria un *vettore geometrico*. Il primo punto  $A$  viene detto *origine* o *punto di applicazione* del vettore  $(A, B)$ , il punto  $B$  è detto invece *estremo libero*, la retta individuata dai punti  $A$  e  $B$  è detta *retta di applicazione* del vettore  $(A, B)$ . Il vettore viene indicato anche con il simbolo  $(B - A)$ . Tale ente nello spazio è dunque caratterizzato da tre proprietà: *direzione*, quella della sua retta d'applicazione; *verso*, quello dal primo estremo  $A$  al secondo estremo  $B$ ; *intensità*, data dalla misura del segmento  $AB$ , rispetto ad un'unità di misura prefissata. Quando  $A$  coincide con  $B$  avremo a che fare con il vettore nullo, che indicheremo con  $\vec{0}$ .

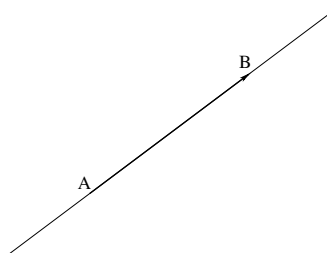


Figura I.1: Vettore.

La relazione di uguaglianza in direzione, verso ed intensità è una relazione di equivalenza tra tutti i vettori geometrici. L'insieme di tutti i vettori equivalenti tra loro, aventi cioè stessa direzione, stesso verso e stessa intensità, costituisce la classe di equivalenza dei *vettori liberi*. Questi vettori sono proprio gli elementi di uno *spazio vettoriale*. Indicheremo i vettori con una lettera soprasssegnata con una freccia,  $\vec{v}$ , od anche con un sottosegno,  $\underline{v}$ , oppure con una lettera in grassetto,  $\mathbf{v}$ .

Il nostro spazio ha dimensione tre. Infatti, esistono tre vettori *linearmente indipendenti*, detti *base dello spazio*, mediante una combinazione lineare dei quali è possibile determinarne ogni altro. Se indichiamo con  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  tre vettori ortogonali tra loro e di modulo unitario (*versori*), allora un vettore  $\vec{v}$  si scrive nella forma

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

dove  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono le componenti del vettore  $\vec{v}$  secondo gli assi cartesiani aventi versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ .

È necessario prefissare un segmento unitario  $u$  come unità di misura. Quindi indicata con  $l$  la misura del segmento  $\overline{AB}$  rispetto ad  $u$ , il vettore libero  $\vec{v}$  è caratterizzato da una direzione, da un verso e da un *numero reale positivo*  $l$ , che rappresenta la sua misura rispetto al segmento unitario dato e si ha  $v = |\vec{v}| = lu$ . I vettori permettono di rappresentare le grandezze vettoriali nello spazio ordinario, ad esempio una velocità, una accelerazione, una forza, ecc. Basta interpretare il segmento unitario  $u$  come unità di misura della grandezza fisica in oggetto.

Lo spazio vettoriale non rappresenta ancora completamente lo spazio dove si svolgono i nostri fenomeni. Lo spazio vettoriale contiene solo i vettori liberi, che visti come classe di equivalenza, possono essere rappresentati tutti con il primo estremo nell'origine e possono essere intesi come spostamenti. Il nostro spazio ordinario contiene anche i punti, che possono essere ottenuti facendo uso dei vettori come spostamenti.

Riportiamo qui la definizione di spazio affine e rimandiamo a dopo alcuni commenti.

Si dice *spazio affine*  $\mathbb{E}$ , a dimensione tre sul corpo  $\mathbb{R}$ , l'insieme ai cui elementi, detti *punti*, è associato l'insieme  $\mathbb{V}$  dei vettori liberi, chiamato *spazio vettoriale associato*, su cui è definita una applicazione da  $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$  in  $\mathbb{V}$ , che associa ad ogni coppia di punti un vettore di  $\mathbb{V}$ , ovvero due punti  $A$  e  $B$  individuano il vettore  $\vec{v}$  indicato con  $A - B$ , con le seguenti proprietà:

- i) per ogni  $A, B, C$  si ha  $(A - C) + (C - B) + (B - A) = \vec{0}$ ;
- ii) per ogni  $O \in \mathbb{E}$ , l'applicazione che associa ad un punto  $P$  il vettore  $(P - O)$  è una biezione di  $\mathbb{E}$  su  $\mathbb{V}$ .



I punti di  $\mathbb{R}^3$ , questa volta visto come spazio di punti, possono essere individuati tramite un vettore libero  $\vec{v}$ , partendo dall'origine  $O$  di coordinate  $(0, 0, 0)$ , ed arrivando al punto  $P$  tramite il vettore  $\vec{v}$ ,

$$P = O + \vec{v},$$

dove ovviamente  $\vec{v}$  è proprio il vettore libero  $(P - O)$  e le coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  di  $P$  sono le componenti del vettore  $\vec{v}$ , rispetto al sistema di riferimento con origine in  $O \equiv (0, 0, 0)$  ed assi con versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ .

Tramite un vettore  $\vec{w}$  si può individuare a partire da  $P$  un altro punto con la traslazione  $Q = P + \vec{w}$ . Quindi ad ogni coppia di punti  $Q$  e  $P$  è coordinato un vettore  $\vec{w}$  (lo spostamento da  $P$  a  $Q$ , indicato con  $(Q - P)$ ).

Allo spazio delle nostre percezioni si può dare la struttura di uno spazio affine tridimensionale. Lo spazio  $\mathbb{R}^3$ , dove noi operiamo, si può pensare come uno spazio affine, i cui punti sono i vettori e gli spostamenti sono ancora i vettori. Si osservi inoltre che lo spazio  $\mathbb{R}^3$  è ricco di molte altre strutture che ci consentiranno di utilizzarlo anche per altri scopi.

## 2 Rappresentazione cartesiana di vettori

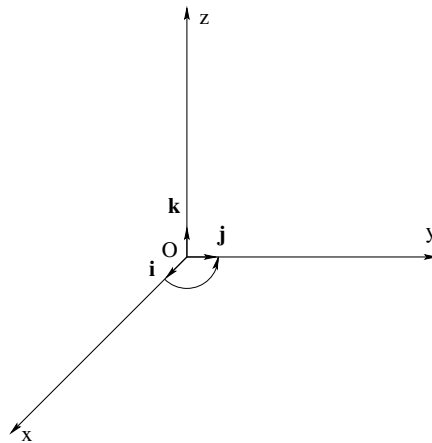


Figura I.2: Sistema di riferimento.

Fissare un'origine  $O \equiv (0, 0, 0)$  ed una terna di versori, due a due ortogonali  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , significa assegnare un *sistema di riferimento cartesiano ortogonale*  $\mathbb{S} \equiv (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tale sistema si dirà destro (o levogiro) se i versi che si fissano sugli assi sono tali che l'asse  $z$  vede ruotare il semiasse positivo delle  $x$  in senso antiorario (contrario a quello delle lancette dell'orologio) per andare a sovrapporsi con una rotazione di  $\pi/2$  sul semiasse positivo delle  $y$ . Una tale terna è ottenibile con le

prime tre dita della mano destra, coordinando in direzione e verso il pollice della mano destra al semiasse  $x$ , l'indice al semiasse  $y$ , ed il dito medio al semiasse  $z$ .<sup>1</sup>

Dato un punto  $P$  dello spazio, esso è individuato nel sistema di riferimento fissato  $\mathbb{S}$  da tre scalari  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Dato un vettore  $\vec{v}$ , esso è individuato nel sistema di riferimento dalle componenti  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  di  $\vec{v}$  secondo gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Dati due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , si definisce *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) la quantità scalare data da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori. In termini di coordinate, il *prodotto scalare* di due vettori  $\vec{v}$  di componenti  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  e  $\vec{w}$  di componenti  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$$

ed è indipendente dal sistema di riferimento prescelto.

Il *modulo* di un vettore  $\vec{v}$  (di componenti  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ) è quindi dato da

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

e viene detto anche intensità o *norma*.

Dati due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  si definisce *prodotto vettoriale* (o *prodotto esterno*) la quantità vettoriale data dal vettore  $\vec{z}$  di modulo  $vw \sin \varphi$ , dove  $\varphi$  è l'angolo formato dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , ed avente direzione  $\vec{n}$  normale al piano dei due vettori e verso tale che  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{n}$  formino una terna destra:

$$\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w} = (vw \sin \varphi) \vec{n}.$$

Il modulo del vettore ottenuto dal prodotto vettoriale di due vettori rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . In componenti se  $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$  e  $\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$ , si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k},$$

dove simbolicamente si è fatto uso dello sviluppo del determinante di una matrice, con le solite regole dell'algebra lineare, per ottenere le componenti del prodotto vettoriale.

---

<sup>1</sup>Nota: I termini destro e levogiro sono solo apparentemente in contrasto l'uno con l'altro. Infatti destro si riferisce alla possibilità di utilizzare la regola della mano destra per individuare i tre assi, mentre levogiro indica che un osservatore disposto come l'asse  $z$  vede la rotazione che porta il semiasse positivo delle  $x$  su quello positivo delle  $y$  avvenire verso la sua sinistra (cioè in senso antiorario come affermato sopra).

Dati tre vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , il *prodotto misto* è la quantità scalare

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = [\vec{u} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{w}$$

che si ottiene eseguendo prima il prodotto vettoriale e poi quello scalare. Esso è dato dallo sviluppo del determinante simbolico

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

È facile verificare che  $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$ , facendo un numero pari di scambi delle righe nel determinante (I.1). Il valore scalare ottenuto dal prodotto misto di tre vettori rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , applicati tutti nello stesso punto. È facile verificare che il prodotto misto tra tre vettori è nullo se e solo se almeno uno dei tre vettori è nullo oppure se i tre vettori sono complanari.

Dati tre vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , il *doppio prodotto vettoriale* tra i vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  è dato dal vettore

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w},$$

ottenuto eseguendo prima il prodotto vettoriale tra i primi due vettori e poi il restante. Esso è dato dalla seguente regola:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}. \quad (\text{I.2})$$

Inoltre,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = -(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}. \quad (\text{I.3})$$

Dalle formule (I.2) e (I.3) segue subito che non vale la proprietà associativa, ovvero nel caso in cui i tre vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  non siano complanari e il vettore  $\vec{v}$  non sia ortogonale al piano tra  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ , si ha

$$\underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}}_{\text{nel piano per } \vec{u} \text{ e } \vec{v}} \neq \underbrace{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})}_{\text{nel piano per } \vec{v} \text{ e } \vec{w}}.$$

### 3 Cambiamento di coordinate

La scelta del sistema di riferimento è in genere arbitraria. Da problema a problema può fare comodo scegliere un sistema di riferimento oppure un altro. È quindi necessario conoscere le formule per il cambiamento delle coordinate da un sistema di riferimento ortogonale ad un altro, anch'esso ortogonale.

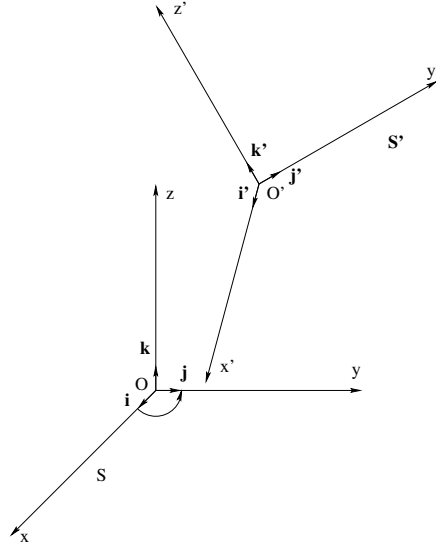


Figura I.3: Sistemi di riferimento  $\mathbb{S}$  e  $\mathbb{S}'$ .

Sia  $P = (x_1, x_2, x_3)$  un punto riferito al sistema  $\mathbb{S}$  con origine  $O$  ed assi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ . Sia  $\mathbb{S}'$  un nuovo sistema con origine  $O'$  ed assi  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  e  $\vec{k}'$ . Allora le coordinate  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  del punto  $P$  nel nuovo sistema  $\mathbb{S}'$  sono date da

$$x'_i = x'_{0i} + \sum_{j=1}^3 T_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{I.4})$$

dove  $(x'_{01}, x'_{02}, x'_{03})$  sono le coordinate dell'origine  $O$  rispetto alla terna  $\mathbb{S}'$  e  $T_{ij}$  sono le componenti di una opportuna matrice  $3 \times 3$  ortogonale, cioè  $T^T \cdot T = I$ , ovvero in componenti

$$\sum_{i=1}^3 T_{ij}T_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

dove  $\delta_{jk}$  è il simbolo di Kronecker, uguale ad 1 se  $j = k$ , uguale a 0 se  $j \neq k$ . La trasformazione inversa della (I.4) è data da

$$x_k = x_{0k} + \sum_{i=1}^3 T_{ik}x'_i, \quad k = 1, 2, 3, \quad (\text{I.5})$$

dove  $x_{0k} = -\sum_{i=1}^3 T_{ik}x'_{0i}$ .

## 4 Lunghezza, curvatura e torsione di una curva

Un punto  $P$  od un vettore  $\vec{v}$  possono dipendere da un parametro  $t$  variabile in un intervallo  $(t_0, t_1)$ . In questo caso si possono definire i concetti di limite e di funzione continua. Si può poi definire la derivata in un punto  $P$  o di un vettore  $\vec{v}$ , così come si fa per le funzioni scalari.

Ricordiamo ora due proprietà che verranno usate molte volte in questo corso.

1. La derivata di un vettore di modulo costante risulta ortogonale al vettore stesso. Infatti,

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{d(v_i^2)}{dt} = 2 \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

poichè abbiamo assunto costante  $v^2$ . Vale anche il viceversa: se  $\vec{v}$  ed il suo derivato sono ortogonali allora il vettore  $\vec{v}$  ha modulo costante.

2. Se, per ogni  $t$ , un vettore  $\vec{v}$  è parallelo al suo derivato allora  $\vec{v}$  ha direzione invariabile. Infatti, se

$$\vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

scrivendo  $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{e}$  dove con  $\vec{e}$  si è indicato un versore del vettore  $\vec{v}$ , si ha:

$$\vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = |\vec{v}|\vec{e} \wedge \left( \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{e} + |\vec{v}| \frac{d\vec{e}}{dt} \right) = |\vec{v}|^2 \vec{e} \wedge \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}.$$

L'ultima equazione comporta  $\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}$  e da qui l'invariabilità della direzione del vettore  $\vec{v}$ . Anche di questa proprietà vale il viceversa.

Le curve nel piano o nello spazio si possono introdurre come insiemi di livello di funzioni  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  (per i nostri scopi è sufficiente che siano di classe  $C^2$ ), dove  $U$  è un sottoinsieme aperto in  $\mathbb{R}^2$  o in  $\mathbb{R}^3$ . In altre parole,

$$\text{Curva} = \begin{cases} \{(x_1, x_2) \in U : F(x_1, x_2) = 0\}, & \text{curva piana,} \\ \{(x_1, x_2, x_3) \in U : F(x_1, x_2, x_3) = 0\}, & \text{curva spaziale.} \end{cases}$$

Un punto  $P$  della curva, di coordinate  $(x_1, x_2)$ , si dice *non singolare* se il gradiente della  $F$  calcolato nel punto  $(x_1, x_2)$  o  $(x_1, x_2, x_3)$  non è nullo. Una curva i cui punti sono tutti non singolari si dice una *curva regolare*.

Se la curva è data in forma parametrica  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , cioè, se

$$\text{Curva} = \{(t, \mathbf{x}(t)) : t \in (t_1, t_2)\}$$

per un'opportuna funzione continua  $\mathbf{x} : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  (curva piana) oppure  $\mathbf{x} : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  (curva spaziale), allora un punto  $\mathbf{x}(t_0)$  si dice non singolare se  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ . Secondo il Teorema delle Funzioni Implicite, ogni curva per cui la  $F$  è di classe  $C^1$  può essere scritta in forma parametrica in un opportuno intorno di ciascun punto di regolarità.

**Esempio I.1** Le circonferenze  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$  con centro l'origine e raggio  $R > 0$  sono curve regolari. Ponendo  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - R^2$ , risulta che, per ogni punto  $(x_1, x_2)$  della circonferenza, il gradiente della  $F$  è sempre un vettore di norma  $2R$ . La curva è facilmente parametrizzabile ponendo  $x_1(t) = R \cos(t)$  e  $x_2(t) = R \sin(t)$ , dove  $t \in [0, 2\pi]$ .

La *lunghezza*  $l$  di una curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , è data dall'integrale

$$l = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} dt.$$

Nel caso particolare di un grafico,  $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))$ , risulta nel caso di una curva piana

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

e nel caso di una curva spaziale

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2} dt,$$

dove  $f = (f_1, f_2)$ . È facile dimostrare che la lunghezza di una curva non dipende dalla scelta della sua parametrizzazione.

Qualsiasi curva differenziabile e non singolare ammette una *parametrizzazione naturale* con un parametro  $s$  (detto *lunghezza d'arco* oppure *ascissa curvilinea*):

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(t')| dt'.$$

Di conseguenza,

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{x}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}.$$

In altre parole,

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s) \right| = 1. \tag{I.6}$$

Il vettore unitario

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$$

è detto *versore tangente* alla curva.

Nei punti in cui  $(d^2\mathbf{x}/ds^2) \neq \vec{0}$  è definito il vettore unitario

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2},$$

detto *versore normale principale* e dove la sua norma

$$k(s) = \left| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right|$$

è detta *curvatura*. Il suo reciproco  $R(s) = [1/k(s)]$  è detto *raggio di curvatura*. Di conseguenza, risulta la prima identità di Frenet:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}. \quad (\text{I.7})$$

Il piano contenente i versori tangente e normale principale  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  si chiama *piano osculatore* nel punto  $\mathbf{x}(t)$ . Questo piano contiene la circonferenza passante per il punto  $\mathbf{x}(t)$  che è la migliore approssimazione della curva in un intorno del punto  $\mathbf{x}(t)$ .

**Esempio I.2** Consideriamo la circonferenza con centro l'origine e raggio  $R > 0$  parametrizzata da  $\mathbf{x}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t))$ , dove  $\omega > 0$ . Si ha

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-\omega R \sin(\omega t')]^2 + [\omega R \cos(\omega t')]^2} dt' = \omega R t.$$

Quindi

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t)) = (-\sin(s/R), \cos(s/R)).$$

Dunque

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{R}(\cos(s/R), \sin(s/R)).$$

Di conseguenza, la curvatura  $k(s) = (1/R)$  e il raggio di curvatura  $R(s) = R$ . Il versore normale principale  $\mathbf{n}(s) = -(\cos(s/R), \sin(s/R))$ .

Consideriamo ora il vettore unitario

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

detto *versore binormale*. Allora la terna costituita dai versori  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  è ortonormale e genera un sistema di coordinate destrorso.

Deriviamo ora le altre due identità di Frenet. Siccome  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , si ha

$$0 = \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}{ds} = 2\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

e quindi  $[d\mathbf{n}/ds]$  è una combinazione lineare di  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$ :

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = c_1(s)\mathbf{t} + c_2(s)\mathbf{b}$$

per opportune costanti  $c_1(s)$  e  $c_2(s)$ . D'altra parte,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$  implica che

$$0 = \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})}{ds} = \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} = k(s)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \{c_1(s)\mathbf{t} + c_2(s)\mathbf{b}\} \cdot \mathbf{t} = k(s) + c_1(s),$$

e quindi  $c_1(s) = -k(s)$ . Inoltre, derivando  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} \\ &= [k(s)\mathbf{n}] \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge [-k(s)\mathbf{t} + c_2(s)\mathbf{b}] \\ &= c_2(s)(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}) = c_2(s)[\mathbf{t} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n})] \\ &= c_2(s)[-(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}] = -c_2(s)\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Chiamando  $\chi(s) \stackrel{\text{def}}{=} -c_2(s)$  *torsione* oppure *seconda curvatura*, otteniamo le seguenti identità di Frenet:<sup>2</sup>

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s), \tag{I.8a}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\mathbf{t}(s) - \chi(s)\mathbf{b}(s), \tag{I.8b}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \chi(s)\mathbf{n}(s). \tag{I.8c}$$

Quindi le equazioni (I.8) si possono scrivere in forma matriciale:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\chi(s) \\ 0 & \chi(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che la torsione  $\chi(s) \equiv 0$  se e solo se la curva è piana. Infatti,  $\chi(s) \equiv 0$  implica che il versore binormale  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$  non dipende da  $s$  e quindi il piano contenente  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  non dipende da  $s$ . Quest'ultimo fatto implica che la curva è piana.

---

<sup>2</sup>Jean Frédéric Frenet (1816-1900). Risultato pubblicato nel 1847 (tesi di dottorato a Tolosa) e nel 1852 (in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*).



**Esempio I.3** [Elica circolare cilindrica] Consideriamo la curva spaziale

$$\mathbf{x}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), ct),$$

dove  $R$ ,  $\omega$  e  $c$  sono costanti positive. Allora

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-\omega R \sin(\omega t')]^2 + [\omega R \cos(\omega t')]^2 + c^2} dt' = t\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}.$$

Quindi il versore tangente vale

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \frac{\mathbf{x}'(t)}{s'(t)} \\ &= \left( \frac{-\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \sin(\omega t), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \cos(\omega t), \frac{c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \right) \\ &= \left( \frac{-\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza, la curvatura  $k(s) = [\omega^2 R / (\omega^2 R^2 + c^2)]$ , mentre

$$\mathbf{n}(s) = - \left( \cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), 0 \right).$$

Calcolando

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) \\ &= \left( \frac{c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{-c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \right), \end{aligned}$$

otteniamo  $[d\mathbf{b}/ds] = \chi(s)\mathbf{n}$ , dove la torsione

$$\chi(s) = -\frac{c\omega}{\omega^2 R^2 + c^2}.$$

**Esempio I.4** [Spirale logaritmica] Consideriamo la curva di equazione [cioè, la spirale logaritmica]

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \left\{ \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \right\}.$$

In tal caso

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-t} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{j} \right\}, \quad \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = e^{-t} \sqrt{2},$$

e quindi  $s(t) = \sqrt{2} [1 - e^{-t}]$  per  $t \geq 0$ . Si ottiene per il versore tangente

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{j} \right\},$$

essendo  $t = \ln[\sqrt{2}/(\sqrt{2} - s)]$  per  $0 \leq s < \sqrt{2}$ . Ciò implica

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{i} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{j} \right\} \frac{1}{\sqrt{2} - s},$$

essendo  $(dt/ds) = [1/(\sqrt{2} - s)]$ . La curvatura è data dall'espressione

$$k(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2} - s}, \quad 0 \leq s < \sqrt{2},$$

che conduce al versore normale

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k(s)} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{i} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{j} \right\},$$

essendo  $t = \ln[\sqrt{2}/(\sqrt{2} - s)]$  per  $0 \leq s < \sqrt{2}$ . Dunque  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \vec{k}$  è il versore binormale. Poichè  $\mathbf{b}$  non dipende da  $s$ , risulta la torsione  $\chi(s) = 0$ . Quest'ultimo risultato segue anche dal fatto che la curva è piana.

**Esempio I.5** [Cavatappi] Calcoliamo ora la curvatura, i versori tangenziale, normale e binormale, e la torsione della curva di equazione [cioè, del "cavatappi"]

$$\vec{x}(t) = e^{-t} \left\{ \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \vec{k} \right\}.$$

In tal caso

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-t} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{j} - \vec{k} \right\}, \quad \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = e^{-t} \sqrt{3},$$

e quindi  $s(t) = \sqrt{3} [1 - e^{-t}]$  per  $t \geq 0$ . Si ottiene per il versore tangente

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{j} - \vec{k} \right\},$$

essendo  $t = \ln[\sqrt{3}/(\sqrt{3} - s)]$  per  $0 \leq s < \sqrt{3}$ . Ciò implica

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{i} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{j} \right\} \frac{1}{\sqrt{3} - s},$$

essendo  $(dt/ds) = [1/(\sqrt{3} - s)]$ . La curvatura è data dall'espressione

$$k(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{3} - s}, \quad 0 \leq s < \sqrt{3},$$

che conduce al versore normale

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k(s)} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{i} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{j} \right\},$$

essendo  $t = \ln[\sqrt{3}/(\sqrt{3} - s)]$  per  $0 \leq s < \sqrt{3}$ . Dunque

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{j} + 2\vec{k} \right\}$$

è il versore binormale. Ciò implica

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{i} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{j} \right\} \frac{1}{\sqrt{3} - s} = \frac{1}{\sqrt{3}[\sqrt{3} - s]} \mathbf{n},$$

e quindi la torsione  $\chi(s) = [1/(\sqrt{3}[\sqrt{3} - s])]$ .



# Capitolo II

## Cinematica del Punto

Il moto di un punto  $P$  al variare del tempo  $t$  viene descritto da una funzione che supponiamo almeno continua

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

di  $t$  a valori in  $\mathbb{R}^3$ . Il tempo  $t$  appartiene ad un intervallo della retta reale che contiene il tempo iniziale  $t_0$  (quasi sempre  $t_0 = 0$ ). La *traiettoria* o *orbita* è la curva in  $\mathbb{R}^3$  descritta dal punto  $P$ . Analiticamente essa è data dalle equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (\text{II.1})$$

Tali equazioni si dicono *equazioni del moto* del punto  $P$ . Il moto si dice *piano* se la traiettoria è contenuta in un piano in  $\mathbb{R}^3$ . Il moto si dice invece *rettilineo* se la traiettoria è contenuta in una retta.

Spesso conviene considerare nota la traiettoria, analiticamente per il tramite delle equazioni parametriche. In tal caso si esprime la posizione di  $P$  nella lunghezza  $s$  dell'arco  $P_0P$ , misurata a partire da una posizione  $P_0$  prefissata ad arbitrario ( $P_0 = P(t_0)$ ). Il moto di  $P$  risulta definito da un'unica equazione

$$s = s(t),$$

che si chiama *equazione oraria* del moto. Il grafico della funzione  $s = s(t)$  con il tempo  $t$  come ascissa e il parametro  $s$  come ordinata si chiama *diagramma orario* del moto.

In questo capitolo studiamo il moto di un punto e in particolare la velocità e l'accelerazione del punto al variare del tempo  $t$ . I risultati ottenuti vengono poi applicati ai moti centrali, armonici ed armonici smorzati.

# 1 Velocità

**a. Moto uniforme.** Supponendo che la lunghezza  $s = s(t)$  dell'arco lungo la traiettoria, percorsa dal punto  $P$  a partire dalla sua posizione iniziale  $P_0$ , sia proporzionale a  $t$ , otteniamo il cosiddetto *moto uniforme*. In tal caso si ha

$$s(t) = v(t - t_0),$$

dove la costante di proporzionalità  $v$  si chiama *velocità*. Si osservi che un moto uniforme non è necessariamente rettilineo: Il moto apparente del Sole e il moto delle lancette dell'orologio sono ambedue uniformi e non rettilinei.

**b. Velocità scalare.** Generalizziamo ora la definizione di velocità. Fissiamo due istanti  $t$  e  $t + \Delta t$  e sia  $\Delta s$  la lunghezza d'arco percorso da  $P$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . La velocità media è data dal rapporto  $(\Delta s / \Delta t)$ . La *velocità scalare*  $\dot{s}(t)$  all'istante  $t$  viene definita dal limite

$$\dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

I moti uniformi sono quelli per cui la velocità scalare è costante:  $\dot{s}(t) \equiv v$ . Il valore assoluto  $|\dot{s}(t)|$  si chiama *velocità intensiva* all'istante  $t$ .

**c. Velocità vettoriale.** Invece di limitarci alla traiettoria e non renderci conto dello spazio ambiente, definiamo la velocità del punto  $P$  rispetto allo spazio ambiente. A tal fine consideriamo lo spostamento del punto  $P$  nello spazio ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Si dice che il moto ha *velocità vettoriale costante* se, fissati due istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ , il vettore

$$\mathbf{v} = \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \left( \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right)$$

è costante. In tal caso

$$s(t) = \|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)\| = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2 + (z(t) - z(t_0))^2},$$

e quindi la velocità scalare è il modulo della velocità vettoriale:  $v = \|\mathbf{v}\|$ .

In generale, definiamo la velocità vettoriale  $\mathbf{v}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}.$$

Calcolando il limite componente per componente, otteniamo

$$\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

dove

$$\begin{aligned}v_x(t) = \dot{x}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \\v_y(t) = \dot{y}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \\v_z(t) = \dot{z}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.\end{aligned}$$

**d. Legame tra velocità scalare e velocità vettoriale.** Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \dot{s}(t) = \dot{s}(t)\mathbf{t}, \quad (\text{II.2})$$

dove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla traiettoria. In altre parole, la velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare per il versore tangente. In generale, la velocità scalare ed il versore tangente dipendono ambedue dal tempo  $t$ . È facile vedere dalla (II.2) che il moto ha velocità vettoriale costante se e solo se esso è uniforme e rettilineo.

## 2 Accelerazione

**a. Moto uniformemente vario.** Il moto di un punto  $P$  si dice *uniformemente vario* se la sua velocità scalare è una funzione lineare del tempo  $t$ . In altre parole, se

$$\dot{s}(t) = at + b, \quad (\text{II.3})$$

dove  $a$  e  $b$  sono opportune costanti. La costante  $a$  si chiama *accelerazione scalare* e la costante  $b$  *velocità scalare iniziale* (solitamente si assume  $t_0 = 0$ ). Il moto si dice *accelerato* se  $a > 0$  e *ritardato* se  $a < 0$ . Integrando la (II.3), otteniamo l'equazione oraria del moto:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c, \quad (\text{II.4})$$

dove la costante  $c$  di integrazione è l'ascissa del punto mobile nell'istante  $t = 0$ . La (II.4) si può scrivere nella seguente forma:

$$s(t) = \frac{1}{2}a \left( t + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{2ac - b^2}{2a}.$$

Di conseguenza, il diagramma orario di un moto uniformemente vario è una parabola, avente l'asse di simmetria parallelo all'asse  $s$  (essendo la retta  $t = -(b/a)$ ) e volgente la concavità verso  $s$  positivo o negativo secondo che  $a > 0$  ovvero  $a < 0$ .

Il primo a studiare sistematicamente il moto uniformemente vario è stato Galileo Galilei (1564-1642). Facendo cadere oggetti diversi dalla torre di Pisa, osservò che tutti gli oggetti cadevano con la stessa accelerazione scalare costante,  $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$ . In altre parole Galileo capì che la legge matematica esprime la caduta degli oggetti è la (II.4) con le costanti  $a$ ,  $b$  e  $c$  non dipendenti dall'oggetto.

**b. Accelerazione scalare.** Si definisce l'*accelerazione scalare* come

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

Cioè, l'accelerazione scalare è la derivata della velocità scalare rispetto al tempo  $t$ . Il moto è uniformemente vario se e solo se è rettilineo ed ha accelerazione scalare costante.

**c. Accelerazione vettoriale.** Analogamente alla velocità vettoriale si definisce l'*accelerazione vettoriale* nel seguente modo:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

La derivata rispetto al tempo  $t$  può essere calcolata componente per componente:

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)),$$

dove i pedici  $x$ ,  $y$  e  $z$  denotano le componenti lungo i rispettivi assi e

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \dot{v}_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \\ a_y(t) &= \dot{v}_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}, \\ a_z(t) &= \dot{v}_z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Ovviamente, l'accelerazione scalare è data da

$$a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}.$$

Si vede facilmente che il moto ha accelerazione costante se e solo se il moto è rettilineo e uniformemente vario.

**d. Legame tra l'accelerazione scalare e l'accelerazione vettoriale.** Il legame tra l'accelerazione scalare e quella vettoriale è una generalizzazione delle (II.2) e viene trovata calcolando la (II.2) rispetto a  $t$ . Risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t} + \dot{s}(t)\dot{\mathbf{t}}(t) \\ &= \ddot{s}(t)\mathbf{t} + \dot{s}(t)^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} \\ &\stackrel{(I.7)}{=} \ddot{s}(t)\mathbf{t} + \dot{s}(t)^2 k(s)\mathbf{n}, \end{aligned}$$



dove  $k(s)$  è la curvatura della traiettoria,  $\mathbf{t}$  è il versore tangente e  $\mathbf{n}$  è il versore normale principale. Quest'ultima identità può essere scritta nella forma

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t} + k(s)v^2\mathbf{n}, \quad (\text{II.5})$$

dove  $\ddot{s}(t)$  e  $k(s)v^2$  si chiamano rispettivamente *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale* o *accelerazione centripeta*. L'accelerazione vettoriale  $\mathbf{a}(t)$  appartiene al piano osculatore della traiettoria nel punto  $\mathbf{x}(t)$ . Dalla (II.5) si vede che l'accelerazione è puramente tangenziale se il moto è rettilineo [ $k(s)v^2\mathbf{n} = \vec{0}$  implica  $k(s) = 0$ ], mentre risulta essere puramente normale se il moto è uniformemente vario [ $\dot{s} = 0$ ].

**Esempio II.1** Consideriamo il moto di un punto  $P$  descritto dalle equazioni

$$x(t) = \frac{1}{2}(kt - \sin(kt)\cos(kt)), \quad y(t) = \frac{1}{2}\sin^2(kt), \quad z(t) = \sin(kt),$$

dove  $k > 0$  è una costante. In tal caso la velocità vettoriale è data da

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{k}{2}(1 - \cos^2(kt) + \sin^2(kt)) = k \sin^2(kt), \\ \dot{y}(t) = k \sin(kt) \cos(kt), \\ \dot{z}(t) = k \cos(kt). \end{cases}$$

Quindi

$$v^2 = k^2 [\sin^4(kt) + \sin^2(kt)\cos^2(kt) + \cos^2(kt)] = k^2.$$

Quindi  $v(t) \equiv k$ . In altre parole, il moto è uniforme e  $\ddot{s} = 0$ .<sup>1</sup> L'accelerazione vettoriale è data da

$$\ddot{x}(t) = k^2 \sin(2kt), \quad \ddot{y}(t) = k^2 \cos(2kt), \quad \ddot{z}(t) = -k^2 \sin(kt).$$

Dunque l'accelerazione scalare vale

$$a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = k^2 \sqrt{1 + \sin^2(kt)}.$$

Poichè  $\ddot{s}(t) \equiv 0$ , dalla (II.5) ricaviamo  $a(t) = k(s)v^2$ ; quindi

$$k(s) = \sqrt{1 + \sin^2(kt)} = \sqrt{1 + \sin^2(s)}.$$

---

<sup>1</sup>Si può verificare facilmente quest'ultima equazione. Infatti  $s(t) = \int_0^t \sqrt{k^2} dt = kt$ ,  $\dot{s}(t) = k$  e  $\ddot{s}(t) = 0$ .

**Esempio II.2 (Traiettoria di un proiettile)** Un proiettile viene lanciato all'istante  $t = 0$  dalla posizione  $(x_0, y_0, z_0)$  con la velocità iniziale  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  sotto l'effetto della gravitazione. In tal caso le componenti dell'accelerazione sono date dalle espressioni

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Le componenti della velocità hanno la forma

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 - gt,$$

mentre la posizione del proiettile è data dalle espressioni

$$x = x_0 + t\dot{x}_0, \quad y = y_0 + t\dot{y}_0, \quad z = z_0 + t\dot{z}_0 - \frac{1}{2}gt^2 = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} - \frac{1}{2}g \left( t - \frac{\dot{z}_0}{g} \right)^2.$$

Quindi il moto è piano (nel piano di equazione  $\dot{y}_0(x - x_0) = \dot{x}_0(y - y_0)$ ) per  $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 > 0$  e rettilineo (nella direzione verticale) per  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ . Per  $\dot{z}_0 > 0$ , l'apice  $z = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$  della traiettoria viene raggiunto all'istante  $t = (\dot{z}_0/g)$ , mentre la quota di partenza  $z_0$  viene raggiunta all'istante  $t = (2\dot{z}_0/g)$ .

Siano  $\dot{x}_0 \neq 0$  e  $\dot{y}_0 = 0$ . In tal caso la traiettoria del proiettile è una parabola nel piano  $xz$  di equazione

$$z = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} - \frac{1}{2}g \left( \frac{x - x_0}{\dot{x}_0} - \frac{\dot{z}_0}{g} \right)^2.$$

Infatti, eliminando il tempo  $t$  (ponendo  $t = [(x - x_0)/\dot{x}_0]$ ) si ottiene l'equazione della parabola dall'espressione  $z = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} - \frac{1}{2}g \left( t - \frac{\dot{z}_0}{g} \right)^2$ . Per  $\dot{z}_0 > 0$ , il proiettile torna alla stessa quota all'istante  $t = (2\dot{z}_0/g)$ , trovandosi nel punto di coordinate  $([2\dot{x}_0\dot{z}_0/g], 0, z_0)$ .

### 3 Moti Piani e Moti Centrali

Consideriamo ora il moto di un punto  $P$  nel piano  $xy$ , cioè supponiamo che  $z(t) \equiv 0$ . Supponiamo inoltre di aver fissato un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  nel piano del moto. In tal caso possiamo esprimere tutte le quantità nelle coordinate polari definite da

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \theta = (y/x), \end{cases}$$

dove  $r \geq 0$  e  $\theta$  appartiene ad un intervallo semiaperto di lunghezza  $2\pi$  (diciamo:  $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Convertendo le (II.1) in coordinate polari, otteniamo le *equazioni del moto in coordinate polari*

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Introduciamo il *versore radiale*  $\mathbf{u}$  ed il *versore trasverso*  $\mathbf{w}$  (ortogonale al versore  $\mathbf{u}$ ) da

$$\mathbf{u} = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}, \quad \mathbf{w} = -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j}, \quad (\text{II.6})$$

dove  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  sono i versori degli assi  $x$  e  $y$  del riferimento fissato  $Oxy$ . Allora

$$r\mathbf{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad r\mathbf{w} = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Calcolando la derivata della (II.6) rispetto al tempo  $t$  si ottiene

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\theta} \left\{ -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j} \right\} = \dot{\theta}\mathbf{w}, \quad (\text{II.7a})$$

$$\dot{\mathbf{w}} = -\dot{\theta} \left\{ (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j} \right\} = -\dot{\theta}\mathbf{u}. \quad (\text{II.7b})$$

Di conseguenza,

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w}. \quad (\text{II.8})$$

Quindi la velocità vettoriale  $\mathbf{v}$  ha due componenti: la *velocità radiale*  $v_r \stackrel{\text{def}}{=} \dot{r}$  lungo il versore  $\mathbf{u}$  e la *velocità trasversa*  $r\dot{\theta}$  lungo il versore  $\mathbf{w}$ . La quantità

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}$$

si chiama *velocità angolare*. Inoltre, utilizzando l'ortogonalità dei versori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , troviamo la velocità scalare

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}.$$

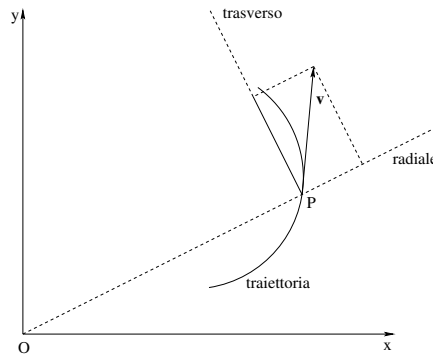


Figura II.1: Moto piano in coordinate polari.

Calcolando la derivata della (II.8) rispetto a  $t$  otteniamo la seguente espressione per l'accelerazione vettoriale:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r}\mathbf{u} + \dot{r}\dot{\mathbf{u}} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{w} + r\ddot{\theta}\mathbf{w} + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{w}} \\ &\stackrel{(II.7)}{=} \ddot{r}\mathbf{u} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{w} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{w} + r\ddot{\theta}\mathbf{w} - r\dot{\theta}^2\mathbf{u} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (II.9)$$

Le componenti di  $\mathbf{a}$  secondo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  si chiamano rispettivamente *accelerazione radiale* e *accelerazione trasversa* e si ha

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Mentre il punto  $P$  si muove, il raggio vettore  $OP$  descrive un'area. Muovendosi da  $P = P(t)$  a  $P' = P(t + dt)$ , il raggio vettore  $OP$  non cambia in modo significativo se  $dt$  è infinitesimo. Approssimativamente, l'area tracciata dal raggio vettore è l'area del settore circolare di raggio  $r = |OP|$  e angolo  $d\theta$ , cioè

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} dt.$$

Dunque definiamo la cosiddetta *velocità areale*  $\dot{A}$  rispetto al centro  $O$  come

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}. \quad (II.10)$$

Deriviamo ora altre due espressioni per la velocità angolare. La prima è la seguente:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y). \quad (II.11)$$

Infatti, ricordando che  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , risulta

$$\begin{aligned} x\dot{y} - \dot{x}y &= r(\cos \theta) \frac{d}{dt}(r \sin \theta) - r(\sin \theta) \frac{d}{dt}(r \cos \theta) \\ &= r(\cos \theta) \{ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \} + r(\sin \theta) \{ \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \} \\ &= r^2\dot{\theta} \{ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \} + r\dot{r} \{ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta \} \\ &= r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}, \end{aligned}$$

il che dimostra la (II.11). Ora dimostriamo la seconda espressione

$$\dot{A} = \left\| \frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v} \right\|. \quad (II.12)$$

Infatti, poichè  $(P - O) = r\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w}$ , si ha

$$\begin{aligned}(P - O) \wedge \mathbf{v} &= (r\mathbf{u}) \wedge (\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w}) \\ &= r^2\dot{\theta}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = 2\dot{A}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}),\end{aligned}$$

il che dimostra la (II.12). Il vettore  $\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v}$  è ortogonale al piano passante per l'origine e la velocità vettoriale  $\mathbf{v}$  e ha la velocità areale come la sua lunghezza.

Si noti inoltre che la derivata della velocità areale è legata all'accelerazione trasversa dalla seguente semplice relazione:

$$a_\theta = \frac{2}{r}\ddot{A}.$$

Infatti, derivando la (II.10) si trova

$$\ddot{A} = r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\theta} = \frac{r}{2}(2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = \frac{r}{2}a_\theta.$$

Una situazione interessante è quella del cosiddetto *moto centrale*, in cui cioè il moto del punto  $P$  è tale che ad ogni istante  $t$  l'accelerazione  $\mathbf{a}(t)$  è diretta verso l'origine  $O$ , cioè che ad ogni istante

$$(P - O) \wedge \mathbf{a} = \vec{0}.$$

In tal caso

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v} \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}(r\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} \right] \\ &= \frac{1}{2}(\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\mathbf{u}}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2}\underbrace{(r\mathbf{u}) \wedge \mathbf{a}}_{=\vec{0}} \\ &\stackrel{(II.7a)}{=} \frac{1}{2}\underbrace{(\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w})}_{=\mathbf{v}, \text{ per (II.8)}} \wedge \mathbf{v} = \vec{0}.\end{aligned}\tag{II.13}$$

Questa relazione ha due corollari:

- a. La lunghezza del vettore  $\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v}$ , la velocità areale  $\dot{A}$ , non dipende dal tempo  $t$ .
- b. Esiste un vettore ortogonale al piano del moto (cioè, ortogonale a  $\mathbf{v}$  ed a  $(P - O) = r\mathbf{u}$ ) che non dipende dal tempo  $t$ . Quindi il moto è piano e si svolge nel piano passante per  $O$  e ortogonale al vettore  $\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v}$ .

Concludiamo con la derivazione della formula di Binet. Questo risultato specializzato viene spesso applicato per derivare la prima legge di Keplero.<sup>2</sup>

**Teorema II.3 (Formula di Binet)** *Se il moto è centrale con velocità areale costante  $\dot{A}$ , allora l'accelerazione radiale  $a_r$  è data dall'espressione*

$$a_r = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} \right\}. \quad (\text{II.14})$$

*Dimostrazione.* Si ricordi che  $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$  e quindi  $\dot{\theta} = 2\dot{A}/r^2$ . Si ha

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2\dot{A}}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -2\dot{A} \frac{d(1/r)}{d\theta}.$$

Dunque

$$\ddot{r} = -2\dot{A} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}.$$

Di conseguenza,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} - \frac{4\dot{A}^2}{r^3} = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2} \left\{ \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right\},$$

il che dimostra la (II.14). □

Si noti come, nel caso di moti centrali, la formula (II.15) individua completamente il vettore accelerazione  $\mathbf{a}$ . Infatti, poichè  $\ddot{\mathbf{A}} = 0$ , si ha anche  $a_\theta = \frac{2}{r}\dot{A} = 0$ .

Supponiamo che  $a_r = -\gamma/r^2$ , essendo  $\gamma$  un'opportuna costante positiva. In tal caso la formula di Binet (II.14) implica che

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{4\dot{A}^2}.$$

Quest'equazione differenziale ha la soluzione generale

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{\gamma}{4\dot{A}^2} + c_1 \cos(\theta - \theta_0),$$

dove  $c_1$  e  $\theta_0$  sono opportune costanti. Allora

$$r(t) = \frac{4\dot{A}^2/\gamma}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)},$$

dove  $\varepsilon = [4c_1\dot{A}^2/\gamma]$  è una costante. Per  $\varepsilon = 0$  la traiettoria risulta una circonferenza, per  $\varepsilon \in (-1, 1)$  un'ellisse, per  $\varepsilon = \pm 1$  una parabola, e per  $\varepsilon > 1$  o per  $\varepsilon < -1$  un'iperbole (discuteremo in modo più dettagliato questo argomento nel Cap. VIII).

---

<sup>2</sup>Johannes Kepler (1571-1630) pubblicò le cosiddette leggi di Keplero in *Astronomia Nova* (1609).

## 4 Moti Armonici e Moti Armonici Smorzati

Le equazioni del moto per il *moto circolare uniforme* sono le seguenti:

$$x = R \cos(\omega t), \quad y = R \sin(\omega t), \quad z = 0,$$

oppure

$$\mathbf{x} = R\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j},$$

dove il raggio  $R$  e la velocità angolare  $\omega$  sono costanti positive. In tal caso la velocità e l'accelerazione sono date da

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\omega R \sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega R \cos(\omega t)\mathbf{j} = \omega R\mathbf{w}, \\ \mathbf{a} &= -\omega^2 R \cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega^2 R \sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{x} = -\omega^2 R\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Il moto armonico viene descritto dall'equazione del moto

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0),$$

dove  $R$  e  $\omega$  sono opportune costanti positive e  $\theta_0$  è un'opportuna costante reale. Un tale moto è periodico nel senso che

$$x(t + T) \equiv x(t),$$

dove il periodo  $T = (2\pi/\omega)$ ,  $1/T$  si dice *frequenza* e  $\omega$  si chiama *velocità angolare* o *frequenza angolare*. L'equazione del moto è soluzione unica dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

sotto le condizioni iniziali

$$x(0) = R \cos \theta_0, \quad \dot{x}(0) = -\omega R \sin \theta_0.$$

Esistono numerosi applicazioni concrete del moto armonico. Un'interessante applicazione è il moto della molla in assenza di attrito descritta dall'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = -kx(t),$$

dove  $k$  è un'opportuna costante positiva (la costante di elasticità della molla). La sua soluzione generale è data da

$$x(t) = x(0) \cos(t\sqrt{k}) + \dot{x}(0) \frac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}.$$

Un'altra applicazione si trova nello studio dei circuiti LC (essendo  $C$  un condensatore e  $L$  un induttore). La carica elettrica sul condensatore verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{Q}(t) + LCQ(t) = 0.$$

La soluzione generale di quest'ultima equazione differenziale ha la forma

$$Q(t) = Q(0) \cos(t\sqrt{LC}) + I(0) \frac{\sin(t\sqrt{LC})}{\sqrt{LC}},$$

dove  $Q(0)$  è la carica iniziale e  $I(0) = \dot{Q}(0)$  è la corrente iniziale che passa per il circuito.

In molte applicazioni il moto armonico viene smorzato. Per esempio, la molla è sottoposta ad una forza d'attrito proporzionale alla velocità che ha l'effetto di ridurre l'ampiezza delle oscillazioni. Un altro esempio è l'analisi di un circuito RLC contenente un condensatore, un induttore ed un resistore. In tal caso la carica  $Q(t)$  sul condensatore verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{Q}(t) + RC\dot{Q}(t) + LCQ(t) = 0,$$

dove  $L$ ,  $R$  e  $C$  sono opportune costanti positive (induttanza, resistenza e capacità).

In generale, l'equazione del moto armonico smorzato è un'equazione differenziale del seguente tipo:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0,$$

dove  $k$  e  $b$  sono opportune costanti positive. Sostituendo  $x = e^{\lambda t}$  arriviamo alla cosiddetta equazione caratteristica

$$\lambda^2 + b\lambda + k = 0. \tag{II.15}$$

Si possono presentare tre casi a seconda che l'equazione (II.15) ammetta radici

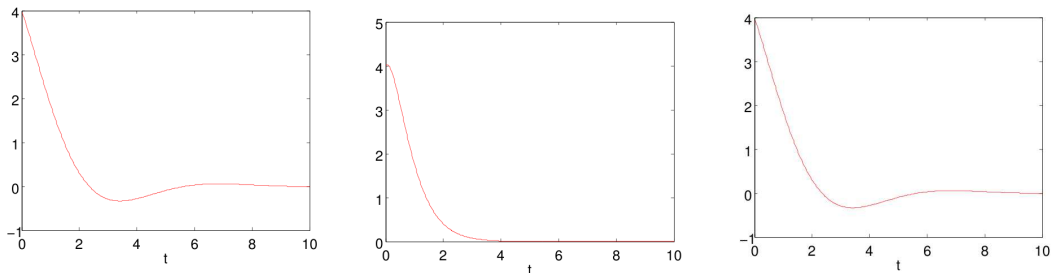


Figura II.2: Grafici delle funzioni  $x(t)$  per  $k = 1$ ,  $x(0) = 2$  e  $\dot{x}(0) = 1$  nei casi  $b = 1$ ,  $b = 2$  e  $b = 3$ .

complesse coniugate, una radice reale con molteplicità algebrica due o due radici reali distinte. Più precisamente, si ha:



- a.  $0 < b^2 < 4k$ . In tal caso la (II.15) ha due zeri complessi coniugati,  $\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4k - b^2}$ . La soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-bt/2} \left[ x(0) \left\{ \cos(\gamma t) + \frac{b}{2\gamma} \sin(\gamma t) \right\} + \frac{\dot{x}(0)}{\gamma} \sin(\gamma t) \right] \\ &= \underbrace{e^{-bt/2} \sqrt{x(0)^2 + \left[ \frac{bx(0) + 2\dot{x}(0)}{2\gamma} \right]^2}}_{\text{ampiezza}} \cos(\gamma t + \phi), \end{aligned}$$

dove  $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - b^2}$  e la fase  $\phi$  viene specificato da

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{2\gamma x(0)}{\sqrt{4\gamma^2 x(0)^2 + [bx(0) + 2\dot{x}(0)]^2}}, \\ \sin \phi &= \frac{-[b + 2\dot{x}(0)]}{\sqrt{4\gamma^2 x(0)^2 + [bx(0) + 2\dot{x}(0)]^2}}. \end{aligned}$$

La funzione  $x(t)$  ha infiniti zeri agli istanti  $t$  per cui

$$\tan(\gamma t) = \frac{-2\gamma x(0)}{bx(0) + 2\dot{x}(0)}.$$

Dunque la funzione  $x(t)$  è oscillatoria con un'ampiezza che tende a zero.

- b.  $b^2 = 4k > 0$ . In tal caso la (II.15) ha il singolo zero doppio  $\lambda = -(b/2)$ . La soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \left( 1 + \frac{bt}{2} \right) e^{-bt/2} + \dot{x}(0) t e^{-bt/2} \\ &= e^{-bt/2} \left\{ \dot{x}(0) - \frac{bt}{4} [bx(0) + 2\dot{x}(0)] \right\}. \end{aligned}$$

La funzione  $x(t)$  ha un singolo zero all'istante

$$t = \frac{-2x(0)}{bx(0) + 2\dot{x}(0)}.$$

- c.  $b^2 > 4k > 0$ . In tal caso ci sono due zeri reali,  $\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4k}$ , ambedue negativi. La soluzione ha la forma

$$x(t) = e^{-bt/2} \left[ x(0) \left\{ \cosh(\gamma t) + \frac{b}{2\gamma} \sinh(\gamma t) \right\} + \frac{\dot{x}(0)}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right],$$

dove  $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4k}$ . La funzione  $x(t)$  ha un singolo zero all'istante  $t$  per cui

$$\tanh(\gamma t) = \frac{-2\gamma x(0)}{bx(0) + 2\dot{x}(0)},$$

purché valga la disuguaglianza  $2\gamma|x(0)| < |bx(0) + 2\dot{x}(0)|$ . Nel caso contrario la funzione  $x(t)$  non ha zeri.

# Capitolo III

## Baricentro e Momento d'Inerzia

In questo capitolo si introducono il baricentro di una distribuzione di masse e il momento d'inerzia di una distribuzione di masse rispetto ad un asse fissato. La distribuzione delle masse potrebbe essere discreta (trattandosi di un numero di masse puntuali) o continue (trattandosi di una densità di masse).

### 1 Baricentri

Supponiamo che nei punti  $P_1, \dots, P_n$  si trovino le masse  $m_1, \dots, m_n$ , allora il *baricentro*  $G$  del sistema è definito come

$$OG = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j OP_j,$$

dove  $m = m_1 + \dots + m_n$  è la massa totale del sistema. Se  $(x_j, y_j, z_j)$  sono le coordinate cartesiane del punto  $P_j$ , allora le coordinate del baricentro  $G$  sono date dalle espressioni

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j x_j, \quad y_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j y_j, \quad z_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j z_j.$$

Nel caso in cui tutte le masse sono uguali ( $m_1 = \dots = m_n = (m/n)$ ), si ha

$$x_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad y_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j, \quad z_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j.$$

Nel caso di tre masse uguali non allineate il baricentro (anche detto baricentro del triangolo) coincide con la intersezione delle tre mediane e dista da ognuno dei vertici due terzi della lunghezza della mediana uscente da quel vertice. Nel caso

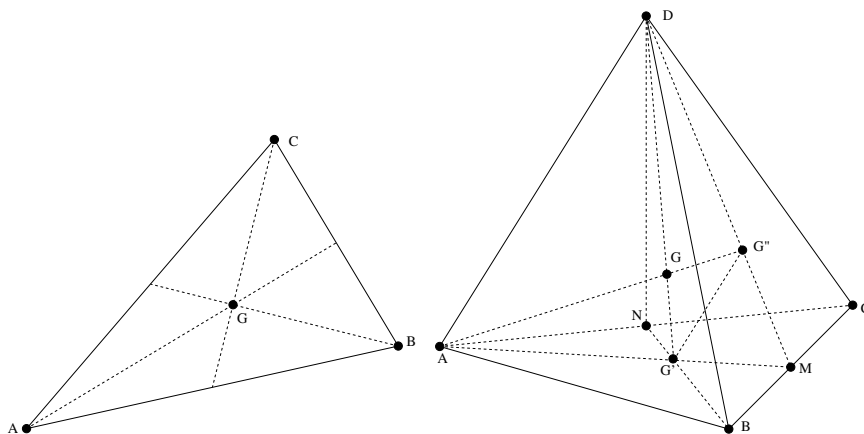


Figura III.1: Pannello sinistro: Baricentro  $G$  per tre masse uguali situate nei vertici di un triangolo. Pannello destro: Baricentro  $G$  per quattro masse uguali disposte nei vertici di un tetraedro.

di quattro masse uguali non appartenenti allo stesso piano, il baricentro (anche detto baricentro del tetraedro) si trova sulla congiungente di ognuno dei vertici con il baricentro della faccia opposta e dista dal vertice  $\frac{3}{4}$  dell'intero segmento congiungente.

Nel caso di un sistema continuo occupante la regione  $C$  il baricentro si definisce mediante la densità di massa  $\mu(x, y, z)$ . In tal caso

$$\begin{aligned}
 x_G &= \frac{1}{m} \iiint_C x \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 y_G &= \frac{1}{m} \iiint_C y \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 z_G &= \frac{1}{m} \iiint_C z \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.
 \end{aligned}$$

Nel caso in cui la massa sia concentrata nel piano  $xy$ , il baricentro si definisce mediante la densità di massa  $\mu(x, y)$  bidimensionale. In tal caso

$$\begin{aligned}
 x_G &= \frac{1}{m} \iint_C x \mu(x, y) \, dx \, dy, \\
 y_G &= \frac{1}{m} \iint_C y \mu(x, y) \, dx \, dy, \\
 z_G &= 0,
 \end{aligned}$$

dove  $C$  è la regione del piano  $xy$  occupata dalle masse.

Il prossimo risultato ci consente di calcolare facilmente il baricentro di un sistema per cui la densità è costante a pezzi.

**Teorema III.1** Se si divide il sistema  $C$  in  $N$  sistemi parziali  $c_1, \dots, c_N$ , il suo baricentro coincide con quello dei baricentri  $G_1, \dots, G_N$  di  $c_1, \dots, c_N$  quando si attribuiscono ad essi le masse  $m^{(1)}, \dots, m^{(N)}$  di  $c_1, \dots, c_N$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mu(x, y, z)$  la densità di massa del sistema  $C$ . Allora per ogni sistema parziale  $c_r$  si ha

$$m^{(r)} = \iiint_{c_r} \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$OG_r = \frac{1}{m^{(r)}} \iiint_{c_r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z) dx dy dz,$$

mentre

$$m = \iiint_C \mu(x, y, z) dx dy dz = m^{(1)} + \dots + m^{(N)},$$

$$OG = \frac{1}{m} \iiint_C (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^N \iiint_{c_r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^N m^{(r)} OG_r,$$

il quale conclude la dimostrazione.  $\square$

Va notato che il baricentro si trova nell'insieme convesso più piccolo che contiene tutte le masse.

**Esempio III.2** Calcoliamo il baricentro di un disco di raggio  $R$  con il centro situato nell'origine la cui parte superiore ha densità costante  $\mu_1$  e quella inferiore ha densità costante  $\mu_2$ . Siano  $c_1$  e  $c_2$  le parti superiore e inferiore. Allora le masse delle due parti sono  $m_1 = \frac{1}{2}\pi\mu_1 R^2$  e  $m_2 = \frac{1}{2}\pi\mu_2 R^2$ . Le coordinate  $x$  dei baricentri sono  $x_{G_1} = x_{G_2} = 0$ . Inoltre,

$$m_1 y_{G_1} = \mu_1 \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \mu_1 \int_{-R}^R dx \frac{1}{2}(R^2 - x^2) = \frac{2}{3}\mu_1 R^2,$$

$$m_2 y_{G_2} = \mu_2 \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 y dy = \mu_2 \int_{-R}^R dx \frac{-1}{2}(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3}\mu_2 R^2.$$

Alternativamente, in coordinate polari risulta

$$m_1 y_{G_1} = \mu_1 \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r^2 \sin \theta = \mu_1 [-\cos \theta]_{\theta=0}^\pi \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^R = \frac{2}{3}\mu_1 R^2,$$

$$m_2 y_{G_2} = \mu_2 \int_{-\pi}^0 d\theta \int_0^R dr r^2 \sin \theta = \mu_2 [-\cos \theta]_{\theta=-\pi}^0 \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^R = -\frac{2}{3}\mu_2 R^2,$$

essendo  $dx dy = r dr d\theta$ . Quindi

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2} = \frac{4}{3\pi} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

**Esempio III.3** Calcoliamo il baricentro dell'unione di due semisfere: una di centro l'origine, raggio  $R$  e densità  $\mu_1$  nel semispazio superiore, l'altra di centro l'origine, raggio  $R$  e densità  $\mu_2$  nel semispazio inferiore. Siano  $G_1$  e  $G_2$  i loro baricentri. Essendo uguale a  $\frac{2}{3}\pi R^3$  il volume di ciascuna semisfera e uguali a  $m_1$  e  $m_2$  le loro masse, per motivi di simmetria si ha  $x_{G_1} = y_{G_1} = x_{G_2} = y_{G_2} = 0$ . Inoltre, in coordinate cilindriche si ha

$$\begin{aligned} m_1 z_{G_1} &= \mu_1 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz z \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr = \mu_1 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \frac{1}{2} z (R^2 - z^2) \\ &= 2\pi \mu_1 \left[ \frac{1}{4} R^2 z^2 - \frac{1}{8} z^4 \right]_{z=0}^R = \frac{3}{8} R^3, \\ m_2 z_{G_2} &= \mu_2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^0 dz z \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr = \mu_2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^0 dz \frac{1}{2} z (R^2 - z^2) \\ &= 2\pi \mu_2 \left[ \frac{1}{4} R^2 z^2 - \frac{1}{8} z^4 \right]_{z=-R}^0 = -\frac{3}{8} R^3, \end{aligned}$$

essendo  $dx dy dz = r dr dz d\theta$ . Quindi

$$x_G = y_G = 0, \quad z_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2} = \frac{3}{8} R \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

## 2 Momenti d'inerzia

Si definisce *momento d'inerzia*  $I$  di un qualunque sistema particellare rispetto ad una retta  $r$  la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle distanze dei loro punti di applicazione dalla retta. Detta  $m_j$  la massa situata nel punto  $P_j$  del sistema e  $\delta_j$  la sua distanza dalla retta  $r$ , si ha

$$I = \sum_{j=1}^N m_j \delta_j^2.$$

Nel caso di un sistema continuo  $C$  di densità  $\mu$  il momento d'inerzia rispetto alla retta  $r$  è definito tramite il corrispondente integrale

$$I = \iiint_C \mu(x, y, z) \delta(x, y, z)^2 dx dy dz,$$

dove  $\delta$  denota la distanza del punto generico  $P$  di  $C$  da  $r$ .

Il prossimo teorema (dovuto a Huygens) mostra come varia il momento d'inerzia qualora lo si calcoli rispetto a rette fra loro parallele.

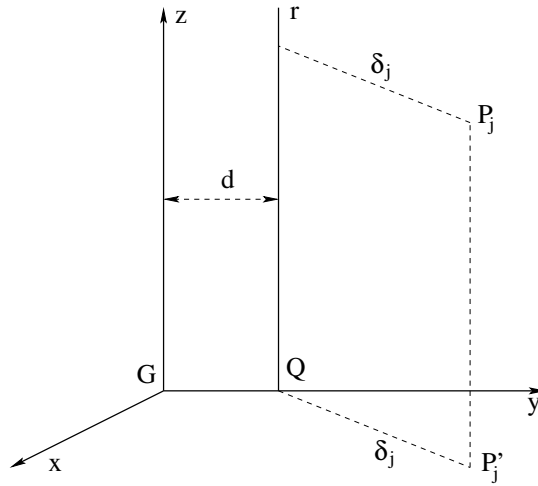


Figura III.2: Illustrazione del Teorema di Huygens sui momenti d'inerzia.

**Teorema III.4 (Huygens)** *Il momento d'inerzia di un qualunque sistema materiale  $C$  rispetto ad una retta  $r$  è uguale a quello rispetto alla parallela  $r_G$  ad  $r$  condotta per il baricentro di  $C$  aumentato dal prodotto della massa totale di  $C$  per il quadrato della distanza di  $r$  da  $r_G$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema nel caso di un sistema discreto. La dimostrazione si estende al caso continuo in modo semplice avendo cura di sostituire le somme con gli opportuni integrali. Adottiamo le notazioni della Figura III.2. Supponiamo che le  $N$  masse  $m_1, \dots, m_N$  si trovino nei punti  $P_1, \dots, P_N$  di coordinate  $(x_j, y_j, z_j)$ , dove  $j = 1, 2, \dots, N$ . Allora, poichè  $Q = (0, d, 0)$  e  $\delta_j^2 = |P'_j Q|^2 = x_j^2 + (y_j - d)^2$ , si ha

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{j=1}^N m_j [x_j^2 + (y_j - d)^2] \\
 &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) + d^2 \sum_{j=1}^N m_j - 2d \sum_{j=1}^N m_j y_j \\
 &= I_G + md^2 - 2 \frac{d}{m} y_G \\
 &= I_G + md^2,
 \end{aligned}$$

poichè il baricentro si trova nell'origine. □

Studiamo adesso come varia il momento d'inerzia quando  $r$  cambia direzione passando sempre per un punto  $O$ . Siano  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  i coseni direttori di  $r$  rispetto

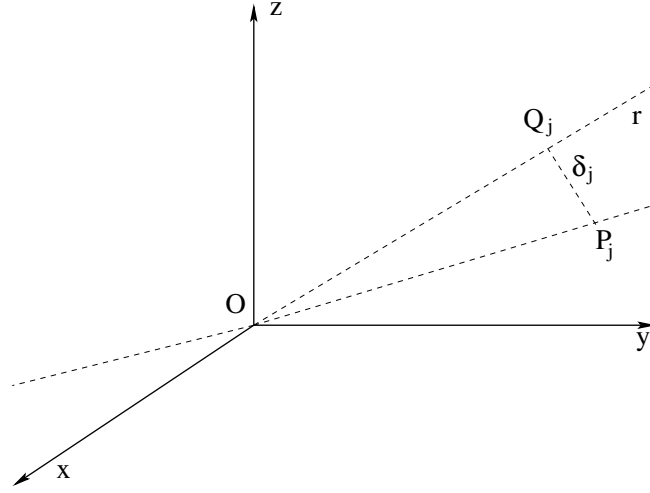


Figura III.3: Illustrazione dei momenti d'inerzia rispetto ad assi concorrenti.

alla terna di riferimento che supponiamo di origine  $O$ , quindi  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Sia  $Q_j$  la proiezione del generico punto  $P_j$  del sistema sulla retta  $r$  (vedi la Fig. III.3). Allora

$$\delta_j^2 = |OP_j|^2 - |OQ_j|^2,$$

dove

$$|OQ_j| = |\alpha x_j + \beta y_j + \gamma z_j|, \quad |OP_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}.$$

Quindi

$$\delta_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - (\alpha x_j + \beta y_j + \gamma z_j)^2.$$

Di conseguenza,

$$\delta_j^2 = (y_j^2 + z_j^2)\alpha^2 + (x_j^2 + z_j^2)\beta^2 + (x_j^2 + y_j^2)\gamma^2 - 2x_j y_j \alpha \beta - 2x_j z_j \alpha \gamma - 2y_j z_j \beta \gamma.$$

Ponendo

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2) & B &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + z_j^2) & C &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2), \\ A' &= \sum_{j=1}^N m_j y_j z_j, & B' &= \sum_{j=1}^N m_j x_j z_j, & C' &= \sum_{j=1}^N m_j x_j y_j, \end{aligned}$$



si ottiene

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=1}^N m_j \delta_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \{ (y_j^2 + z_j^2) \alpha^2 + (x_j^2 + z_j^2) \beta^2 + (x_j^2 + y_j^2) \gamma^2 \\
&\quad - 2x_j y_j \alpha \beta - 2x_j z_j \alpha \gamma - 2y_j z_j \beta \gamma \} \\
&= A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2A' \beta \gamma - 2B' \alpha \gamma - 2C' \alpha \beta \\
&= (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dove la matrice  $3 \times 3$  è hermitiana e positiva semidefinita.

Nel caso di una distribuzione di masse continua bisogna definire le costanti  $A, B, C, A', B'$  e  $C'$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
A &= \iiint_C \mu(y^2 + z^2) dx dy dz, & B &= \iiint_C \mu(x^2 + z^2) dx dy dz, \\
C &= \iiint_C \mu(x^2 + y^2) dx dy dz, & A' &= \iiint_C \mu y z dx dy dz, \\
B' &= \iiint_C \mu x z dx dy dz, & C' &= \iiint_C \mu x y dx dy dz.
\end{aligned}$$



# Capitolo IV

## Cinematica dei sistemi rigidi

In questo capitolo studiamo la cinematica dei **sistemi rigidi** formati da un numero finito o infinito di punti contenuti in una regione uni, bi o tridimensionale dello spazio ambiente. Ci occupiamo cioè di un qualunque sistema che, durante il moto, conserva inalterate le mutue distanze fra i suoi punti. In altre parole, un sistema di punti è detto rigido se, prendendo i punti a due a due in tutti i modi possibili, la distanza di ogni coppia non varia nel tempo.

### 1 Equazioni generali del moto

Supponiamo di aver fissato nello spazio ambiente una terna levogira  $\Omega\xi\eta\zeta$  (i cui versori indichiamo con  $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ ) e di voler riferire ad esso il moto del nostro sistema rigido  $S$ . Consideriamo poi un'altra terna levogira  $Oxyz$  (i cui versori denotiamo con  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) invariabilmente collegata ad  $S$ . Chiamiamo *solidale* la terna  $Oxyz$ , mentre la terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  è detta *fissa*. Ogni punto  $P$  di  $S$  avrà posizione invariata rispetto a  $Oxyz$  (cioè le coordinate di  $P$  sono costanti rispetto a  $Oxyz$ ) pur muovendosi rispetto a  $\Omega\xi\eta\zeta$  (cioè le coordinate di  $P$  sono funzioni del tempo rispetto a  $\Omega\xi\eta\zeta$ ). Perciò il moto del generico punto  $P$  di  $S$  rispetto al sistema fisso è completamente determinato quando si conosca sia la posizione di  $P$  rispetto al riferimento solidale (tramite le coordinate costanti  $x, y, z$  di  $P$  rispetto a  $Oxyz$ ) sia la posizione, istante per istante, del riferimento solidale rispetto a quello fisso (assegnando in funzione del tempo in riferimento a  $\Omega\xi\eta\zeta$  l'origine  $O$  e i versori  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  della terna solidale).

L'equazione del moto del generico punto  $P$  di  $S$  è la seguente

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (\text{IV.1})$$

dove  $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sono definiti in funzione del tempo relativamente alla terna fissa, mentre  $x, y, z$  sono costanti rispetto alla terna solidale. Indicate con  $\xi, \eta, \zeta$  e con

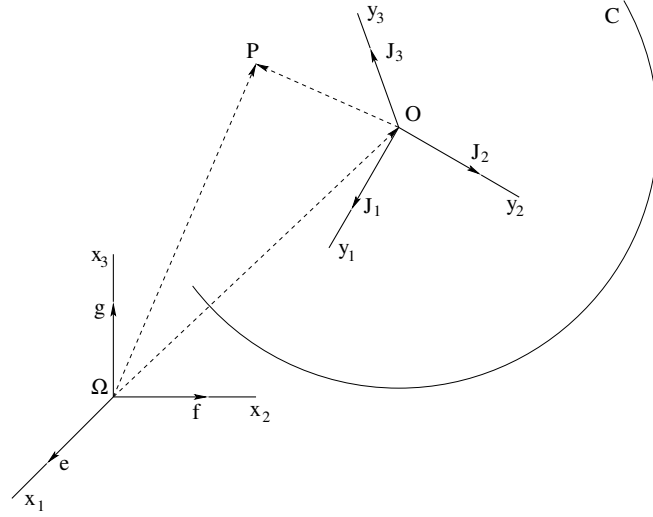


Figura IV.1: Coordinate fisse e solidali al sistema rigido.

$\alpha, \beta, \gamma$  le coordinate rispettivamente di  $P$  e  $O$  rispetto alla terna fissa, introdotti i coseni direttori di  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  come

$$\alpha_1 = \vec{i} \cdot \vec{e}, \quad \beta_1 = \vec{i} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_1 = \vec{i} \cdot \vec{g}, \quad (\text{IV.2a})$$

$$\alpha_2 = \vec{j} \cdot \vec{e}, \quad \beta_2 = \vec{j} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_2 = \vec{j} \cdot \vec{g}, \quad (\text{IV.2b})$$

$$\alpha_3 = \vec{k} \cdot \vec{e}, \quad \beta_3 = \vec{k} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_3 = \vec{k} \cdot \vec{g}, \quad (\text{IV.2c})$$

si può proiettare l'equazione (IV.1) lungo gli assi della terna fissa, ottenendo

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad (\text{IV.3a})$$

$$\eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \quad (\text{IV.3b})$$

$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \quad (\text{IV.3c})$$

essendo  $\vec{e}, \vec{f}$  e  $\vec{g}$  i versori della terna fissa. Le (IV.3) sono dette *equazioni generali del moto di un sistema rigido* poichè definiscono in funzione del tempo le coordinate del generico punto  $P$  di  $S$  rispetto alla terna fissa. Nelle (IV.3) appaiono dodici funzioni del tempo: le coordinate di  $O$  ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) e i nove coseni direttori  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . È utile però osservare che queste funzioni non sono indipendenti perchè i coseni direttori soddisfano le seguenti relazioni:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \quad (\text{IV.4a})$$

$$\alpha_i \alpha_h + \beta_i \beta_h + \gamma_i \gamma_h = 0, \quad \text{per } i \neq h = 1, 2, 3. \quad (\text{IV.4b})$$

Quindi le (IV.3) sono completamente individuate a meno di **sei** funzioni indipendenti e questo si esprimerà<sup>1</sup> dicendo che un sistema rigido è un sistema con sei gradi di libertà.

È importante osservare che le (IV.3) valgono, non solo per ogni punto del sistema rigido  $S$ , ma, anche, per ogni altro punto le cui coordinate sono costanti (durante il moto) rispetto alla terna solidale  $Oxyz$ . Quindi, dal moto di  $S$  resta definito un moto dell'intero spazio dei punti rigidamente connessi a  $S$ . In altre parole, si può pensare ad uno spazio solidale con il sistema  $S$  in moto rispetto allo spazio fisso<sup>2</sup> e sovrapposto a quest'ultimo. Quando si parla di moto rigido si intende proprio il moto di un intero spazio rigido. A tal proposito va anche rimarcato che un sistema rigido si muove senza dubbio di moto rigido, ma un moto può essere rigido sebbene l'ente fisico a cui esso si riferisce (cioè il sistema di punti  $S$ ) sia deformabile.

Non è superfluo ribadire che supporremo le funzioni  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  continue e derivabili almeno fino al secondo ordine per tutto l'intervallo di tempo in cui è definito il moto.

## 2 Prima proprietà caratteristica dei moti rigidi

In un sistema rigido  $S$  comunque si prendano due punti  $P$  e  $Q$ , la loro distanza rimane inalterata durante tutto il moto. Questo fatto viene espresso in formule come

$$(P - Q)^2 = r^2, \quad (\text{IV.5})$$

essendo  $r$  costante. Derivando questa equazione rispetto al tempo si trova

$$2(P - Q) \cdot \left( \frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} \right) = 0, \quad (\text{IV.6})$$

o, equivalentemente

$$(P - Q) \cdot \frac{dP}{dt} = (P - Q) \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (\text{IV.7})$$

La (IV.7) esprime l'uguaglianza delle componenti delle velocità dei punti  $P$  e  $Q$  secondo la retta congiungente i punti  $P$  e  $Q$ . La proprietà espressa dalla (IV.7) caratterizza i moti rigidi nel senso seguente. Se il moto è rigido allora necessariamente vale la (IV.7). Viceversa se vale la (IV.7) per ogni coppia di punti allora il moto è rigido. Infatti la (IV.7) è equivalente alla (IV.6) e da quest'ultima si risale alla (IV.5) per integrazione essendo  $r$  costante. Riassumendo i moti rigidi sono caratterizzati dalla seguente

<sup>1</sup>Si veda il Capitolo VI sui Vincoli.

<sup>2</sup>per spazio fisso si intende lo spazio solidale alla terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$

**Prima Proprietà Caratteristica:** *I moti rigidi di un sistema di punti sono caratterizzati dal fatto che, in ogni istante, le velocità di due punti qualunque del sistema hanno la stessa componente secondo la retta congiungente i due punti.*

### 3 Moti rigidi particolari

In questa sezione vengono presentati alcuni tipi di moto rigido di grande importanza nelle applicazioni.

#### 3.1 Moti rigidi traslatori

Un moto rigido si dice *traslatorio* se ogni vettore  $P_2 - P_1$ , determinato da due qualunque punti in moto, rimane costante in modulo, direzione e verso.

Evidentemente se un moto è traslatorio i tre versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  del riferimento solidale devono restare costanti (per definizione di moto traslatorio). Non è difficile provare che vale anche il viceversa: se in un moto rigido i tre versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  rimangono costanti allora il moto è traslatorio. Infatti, poichè  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  sono costanti per ipotesi, per ogni punto  $P$  il vettore  $P - O$  rimane costante, e potendosi scrivere  $P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$  anche  $P_2 - P_1$  si mantiene costante durante il moto e quindi il moto è traslatorio.

Non è difficile ottenere le equazioni cartesiane di un moto traslatorio. A tal fine, supponiamo di aver scelto gli assi della terna solidale in modo che inizialmente siano paralleli e abbiano lo stesso verso degli assi della terna fissa. Trattandosi di un moto traslatorio i versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  rimangono costanti durante il moto conservando le loro componenti (rispetto agli assi fissi)  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , e le (IV.3) diventano

$$\xi = \alpha + \alpha(t), \tag{IV.8a}$$

$$\eta = \beta + \beta(t), \tag{IV.8b}$$

$$\zeta = \gamma + \gamma(t), \tag{IV.8c}$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  denotano le coordinate di un qualunque punto  $O$  solidale al sistema mobile.

L'identità che caratterizza i moti traslatori

$$P_2 - P_1 = \vec{c}, \tag{IV.9}$$

dove  $\vec{c}$  è un vettore costante, esprime il fatto che il moto di  $P_2$  si può definire come quello dell'estremo di un vettore applicato costante, il cui punto di applicazione coincide istante per istante con  $P_1$ . Dalla (IV.9) discende che *in un moto*

traslatorio le traiettorie dei singoli punti sono uguali e percorse con la stessa legge. In particolare, derivando la (IV.9) si trova

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{dP_1}{dt}. \quad (\text{IV.10})$$

La (IV.10) afferma che in un moto traslatorio tutti i punti del sistema hanno, istante per istante, la stessa velocità.

Viceversa, se in un moto rigido in ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità allora il moto è traslatorio. Infatti, per ipotesi la (IV.10) si mantiene per ogni coppia di punti  $P_1$  e  $P_2$  e, per integrazione, da questa si ottiene la (IV.9) che caratterizza i moti traslatori. Quindi ogni moto traslatorio è caratterizzato da un vettore (che dipende esclusivamente dal tempo) che istante per istante fornisce la velocità comune a ogni punto del sistema. Questo vettore è detto velocità del moto traslatorio e si può eleggere come suo rappresentante la velocità di uno qualunque dei punti del sistema, per esempio quella del punto  $O$ .

Derivando la (IV.10) rispetto al tempo si vede subito che in un moto traslatorio tutti i punti hanno istante per istante la stessa accelerazione. Quindi, in un moto traslatorio, è sensato parlare di accelerazione del moto traslatorio e tale vettore è individuato, in un dato istante, dall'accelerazione di un qualunque punto del sistema rigido.

### 3.2 Moti rigidi rotatori

Un altro notevole esempio di moto rigido è il *moto rotatorio*, cioè il moto in cui rimangono fissi tutti i punti di una retta che si chiama asse di *rotazione*. Per la condizione di rigidità, si ottiene un simile moto fissando due punti di tale asse, che d'ora in avanti chiameremo asse  $z$ .

Consideriamo un sistema mobile  $S$  animato di moto rotatorio rispetto all'asse  $z$  e sia  $P$  un punto del sistema non appartenente all'asse di rotazione. Se indichiamo con  $Q$  il punto d'intersezione fra la retta passante per  $P$  e perpendicolare all'asse  $z$  e l'asse  $z$ , per l'ipotesi di rigidità la lunghezza del segmento di estremi  $P$  e  $Q$  non varia e tale segmento rimane sempre perpendicolare all'asse  $z$ . In altre parole, un generico punto  $P$  del sistema mobile non appartenente all'asse di rotazione si muove sulla circonferenza del piano ortogonale all'asse  $z$  il cui centro  $Q$  appartiene all'asse  $z$ . Quindi, la posizione del sistema mobile sarà individuata quando si conosce, istante per istante, la posizione di un suo punto  $P$  non appartenente all'asse. Equivalentemente, la posizione del sistema mobile è individuata qualora sia nota la posizione di un semipiano  $p$  uscente dall'asse e solidale con  $S$ . Tale posizione di  $p$  è assegnata, in ogni istante, tramite l'angolo (o anomalia)  $\theta = \widehat{\pi p}$  formato fra un determinato semipiano  $\pi$  uscente dall'asse  $z$  e solidale alla terna fissa di riferimento e il semipiano  $p$  (anch'esso uscente

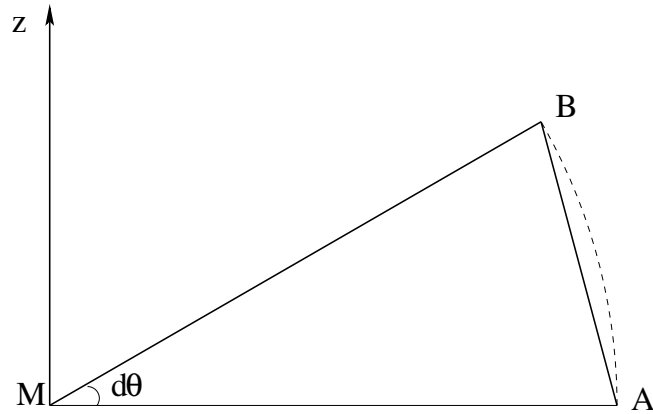


Figura IV.2: Angolo di rotazione.

da  $z$  ma solidale alla terna mobile). È conveniente dare un segno all'angolo  $\theta$  appena introdotto. A tale scopo, orientato ad arbitrio l'asse  $z$ , si assume come verso positivo di  $\theta$  quello destro rispetto all'asse  $z$  orientato. L'anomalia è una funzione del tempo  $\theta(t)$  che supporremo essere continua e derivabile (almeno fino al secondo ordine). È interessante notare che, sebbene l'intervallo da 0 a  $2\pi$  sia sufficiente a individuare tutte le possibili posizioni del semipiano  $p$  attorno all'asse  $z$ , per garantire la sopra accennata continuità della funzione  $\theta(t)$  si è soliti ammettere che  $\theta$  vari anche al di là di questo intervallo.

Osserviamo che, se in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$ , l'anomalia del semipiano  $p$  varia di  $\Delta\theta$ , allora tutti i punti del sistema mobile  $S$  (in quello stesso intervallo di tempo) descrivono sulle rispettive traiettorie circolari archi di circonferenza il cui angolo al centro è  $\Delta\theta$ ; perciò considerando il seguente limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

possiamo concludere che: *ad ogni istante tutti i punti di un sistema  $S$  animato di moto rotatorio hanno la stessa velocità angolare  $\dot{\theta}$* . La velocità angolare è una funzione del tempo e il suo segno positivo o negativo indica, ad ogni istante, se il moto rotatorio è destro o sinistro rispetto all'asse orientato.

Quindi per definire un moto rotatorio occorre specificare la velocità angolare  $\dot{\theta}$  e l'asse di rotazione  $z$ . Per questo motivo, si è soliti introdurre il **vettore velocità angolare**  $\vec{\omega}$ . Tale vettore è definito come segue: ha per lunghezza il modulo della velocità angolare  $\dot{\theta}$  (cioè,  $|\dot{\theta}|$ ), per direzione quella dell'asse di rotazione e per verso quello rispetto al quale il moto appare destro. In base a questa definizione, se  $\vec{k}$  rappresenta il versore dell'asse  $z$ , possiamo scrivere

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}. \tag{IV.11}$$



Osserviamo che il vettore velocità angolare ha modulo generalmente variabile, ma direzione costante.

L'introduzione del vettore velocità angolare consente di ottenere facilmente la velocità di ogni punto  $P$  del sistema rotante  $S$ . Infatti, da quanto scritto sopra sappiamo che:

- a. ogni punto  $P$  non appartenente all'asse  $z$  si muove di moto circolare nel piano ortogonale a tale asse lungo la circonferenza avente centro nel punto  $Q$  proiezione ortogonale di  $P$  su  $z$ ;
- b. Il punto  $P$  percorre la circonferenza descritta sopra con velocità angolare  $\dot{\theta}$ .

Quindi, tenendo conto delle proprietà dei moti circolari, possiamo affermare che la velocità (vettoriale) del punto  $P$  ha modulo  $\dot{\theta} \overline{QP}$ , è, istante per istante, diretta tangenzialmente alla circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $QP$  (nel piano ortogonale all'asse di rotazione) e, per le convenzioni adottate, appare destra rispetto al vettore  $\vec{\omega}$ . Quindi la velocità del punto  $P$  risulta essere simultaneamente ortogonale a  $\vec{\omega}$  e al vettore  $P - Q$  risultando inoltre destra rispetto a  $\vec{\omega}$ . Allora, ricordando la definizione di momento rispetto a un punto di un vettore applicato, si osserva facilmente che la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  è proprio espressa dal momento rispetto a  $P$  del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto a un qualunque punto dell'asse  $z$ . Indicato con  $\Omega$  il generico punto dell'asse  $z$  di rotazione, si ha

$$\vec{v}_P = (\Omega - P) \wedge \vec{\omega},$$

e, per le proprietà del prodotto vettoriale,

$$\vec{v}_P(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P(t) - \Omega), \quad (\text{IV.12})$$

dove  $\vec{\omega}$  è un vettore di direzione fissa (quella dell'asse di rotazione) e  $\Omega$  è un qualunque punto (fisso) dell'asse. La (IV.12) esprime quindi la velocità angolare di un generico punto  $P$  di un sistema rotante.

Ricavare l'accelerazione del generico punto  $P$  di un sistema rotante è ora molto semplice; basta infatti derivare la (IV.12) rispetto al tempo, ottenendo

$$\vec{a}_P(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \wedge (P(t) - \Omega) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P(t). \quad (\text{IV.13})$$

Si prova facilmente che la (IV.13) può scriversi, in modo equivalente, nel seguente modo

$$\vec{a}_P(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \wedge (P(t) - \Omega) - |\vec{\omega}|^2 (P - Q), \quad (\text{IV.14})$$

essendo  $Q$  la proiezione del punto  $P$  sull'asse di rotazione. Per verificare l'uguaglianza delle formule (IV.13) e (IV.14) basta sostituire la (IV.12) nella (IV.13)

e tener conto della regola del doppio prodotto vettoriale. I dettagli di questi calcoli sono omessi in quanto sono molto simili a quelli che svilupperemo per ricavare la (IV.43).

Osserviamo ora che la (IV.12) caratterizza completamente i moti rotatori. Infatti, se un sistema è animato di moto rotatorio, allora (per quanto mostrato sopra) tutti i punti del sistema hanno velocità espresse tramite la (IV.12). Viceversa, possiamo provare che se tutti i punti del sistema hanno velocità espresse dalle (IV.12) allora il moto è un moto rigido rotatorio. Dimostrare quest'ultima proprietà è abbastanza semplice. Siano infatti  $P_1$  e  $P_2$  due generici punti del sistema tali che le loro velocità siano espresse (conformemente alla (IV.12)) da:

$$\vec{v}_{P_1}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - \Omega) , \quad \vec{v}_{P_2}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_2(t) - \Omega) .$$

Sottraendo membro a membro dalla prima delle ultime due equazioni la seconda si trova

$$\vec{v}_{P_1}(t) - \vec{v}_{P_2}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - P_2(t)) , \quad (\text{IV.15})$$

e, tenuto conto che per definizione di prodotto vettoriale  $\vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - P_2(t))$  è perpendicolare a  $P_1(t) - P_2(t)$ , moltiplicando scalarmente ambo i membri di (IV.15) per  $P_1(t) - P_2(t)$ , troviamo

$$(\vec{v}_{P_1}(t) - \vec{v}_{P_2}(t)) \cdot (P_1(t) - P_2(t)) = 0$$

che (confronta con (IV.7)) esprime il fatto che il moto è rigido. Per dimostrare che tale moto è anche rotatorio, è sufficiente osservare che dalla (IV.12) segue che tutti i punti  $P$  per cui il vettore  $P - \Omega$  è parallelo al vettore di direzione fissa  $\vec{\omega}$  (cioè i punti della retta parallela ad  $\vec{\omega}$  passante per  $\Omega$ ) hanno velocità nulla, cioè sono fissi.

Chiudiamo questa sezione ricavando dalle (IV.3) le equazioni di un moto rotatorio nella forma più semplice possibile. A tal fine supponiamo che l'asse di rotazione coincida con l'asse  $z$  della terna mobile e supponiamo che a sua volta quest'asse coincida con l'asse  $\zeta$  della terna fissa. Fissiamo l'origine comune  $O = \Omega$  in un punto qualsiasi dell'asse  $z$  e assumiamo come semiassi positivi  $x$  e  $\xi$  (rispettivamente della terna mobile e di quella fissa) i due semiassi perpendicolari all'asse  $z$  e appartenenti rispettivamente al semipiano  $p$  e  $\pi$  introdotti in questo paragrafo per definire l'anomalia  $\theta$ . Allora, per definizione della funzione  $\theta$  si avrà,  $\widehat{\xi}x = \theta(t)$  e  $\widehat{\xi}y = \theta(t) + \frac{\pi}{2}$  dove con  $y$  si è denotato l'asse  $y$  della terna mobile. Ora, usando le (IV.2) si trova subito

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \vec{i} \cdot \vec{e} = \cos \theta, & \beta_1 &= \vec{i} \cdot \vec{f} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, & \gamma_1 &= \vec{i} \cdot \vec{g} = 0, \\ \alpha_2 &= \vec{j} \cdot \vec{e} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta, & \beta_2 &= \vec{j} \cdot \vec{f} = \cos \theta, & \gamma_2 &= \vec{j} \cdot \vec{g} = 0, \\ \alpha_3 &= \vec{k} \cdot \vec{e} = 0, & \beta_3 &= \vec{k} \cdot \vec{f} = 0, & \gamma_3 &= \vec{k} \cdot \vec{g} = 1, \end{aligned}$$

e, poichè  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  dalle (IV.3) si trovano le equazioni cercate per il moto rotatorio, cioè

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta - y \sin \theta , \\ \eta = x \sin \theta + y \cos \theta , \\ \zeta = z , \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

essendo  $\theta$  funzione del tempo. Se si eseguisse la derivata delle (IV.16) si ricaverebbero le proiezioni dell'equazione (IV.12) lungo gli assi della terna fissa.

### 3.3 Moti rigidi rototraslatori

Nelle due precedenti sezioni abbiamo incontrato due particolari moti rigidi:

1. I moti traslatori che si caratterizzano per il fatto che ad ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità che sarà perciò rappresentata da un vettore  $\vec{\tau}$ , dipendente esclusivamente dal tempo;
2. I moti rotatori in cui la velocità di ogni punto è espressa da

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) ,$$

essendo  $\Omega$  un punto fisso (arbitrariamente fissato sull'asse di rotazione) e  $\vec{\omega}$  un vettore puramente temporale avente direzione fissa (parallela all'asse di rotazione).

Possiamo allora considerare un moto in cui la velocità del generico punto  $P$  sia espressa nel seguente modo:

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) , \quad (\text{IV.17})$$

con  $\vec{\tau}$ ,  $\Omega$  e  $\vec{\omega}$  che soddisfano le stesse proprietà che avevano, rispettivamente, nei moti traslatori e rotatori. Un moto in cui la velocità del generico punto  $P$  è data da (IV.17) è necessariamente un moto rigido. Infatti, se  $P_1$  e  $P_2$  sono due punti arbitrari del sistema mobile, allora le loro velocità, conformemente a (IV.17), saranno

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P_1 - \Omega) , \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P_2 - \Omega) .$$

Sottraendo dalla seconda di queste ultime equazioni la prima, si trova

$$\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_2 - P_1) ,$$

e, moltiplicando scalarmente questa equazione per  $P_2 - P_1$ , otteniamo

$$(\vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_2}) \cdot (P_1 - P_2) = 0 ,$$

che, in base a quanto mostrato nella Sezione 2, assicura la rigidità del moto.

Il moto rigido così definito si dice *rototraslatorio*. Tale nome evidenzia come, in un moto rototraslatorio, la velocità di un generico punto  $P$  è, istante per istante, somma delle due velocità  $\vec{\tau}$  e  $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$  che al punto  $P$  competerebbero in due dati moti rigidi, uno traslatorio e uno rotatorio.

Consideriamo ora un punto  $O$  solidale al sistema rigido animato di moto rototraslatorio. Allora per la (IV.17), la velocità di tale punto sarà data da

$$\vec{v}_O = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - O) , \quad (\text{IV.18})$$

e sottraendo questa identità membro a membro dalla (IV.17) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) . \quad (\text{IV.19})$$

La (IV.19) presenta una notevole somiglianza con la (IV.17) da cui differisce per il fatto che il punto  $O$  non è un punto fisso ma solidale al sistema. Quindi la decomposizione espressa da (IV.19) è differente dalla (IV.17) usata per definire un moto rototraslatorio. Tuttavia osserviamo che la (IV.18) mette in evidenza che il vettore  $\vec{v}_O$  è puramente temporale (come  $\vec{\tau}$ ) e inoltre, il prodotto vettoriale  $\vec{\omega} \wedge (P - O)$  è analogo al prodotto vettoriale  $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$  solo rispetto a un sistema di riferimento in cui il punto  $O$  è fisso e  $\vec{\omega}$  ha direzione fissa. Una simile terna è (tenendo conto che la direzione degli assi della terna fissa è invariabile) quella che ha l'origine in  $O$  e assi paralleli a quelli della terna fissa e che, quindi, si muove con  $O$  di moto traslatorio con velocità  $\vec{v}_O$ .

La decomposizione fornita dalla (IV.17) si dice *propria*, mentre la decomposizione espressa dalla (IV.19) si dice *impropria*. Si noti che, al variare della scelta del punto  $O$  solidale al sistema, si ottengono per le velocità di uno stesso moto rototraslatorio infinite decomposizioni improprie diverse.

### 3.4 Moti rigidi elicoidali

Fra i moti rototraslatori rivestono un particolare interesse quelli in cui i vettori  $\vec{\tau}$  e  $\vec{\omega}$  sono entrambi costanti rispetto alla terna fissa. Tali moti vengono detti *rototraslatori uniformi* o anche *moti elicoidali*. I moti elicoidali sono caratterizzati dal seguente

**Teorema IV.1** *In ogni moto elicoidale esiste, per la velocità del generico punto  $P$  del sistema mobile, una decomposizione propria in cui il componente traslatorio è parallelo alla velocità angolare del componente rotatorio.*

*Dimostrazione.* La velocità del generico punto  $P$  in un dato moto elicoidale è data da

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) , \quad (\text{IV.20})$$

con  $\vec{\tau}$  e  $\vec{\omega}$  costanti. Escludiamo i casi in cui il moto sia rotatorio ( $\vec{\tau} = \vec{0}$ ), traslatorio ( $\vec{\omega} = \vec{0}$ ) o il caso in cui  $\vec{\tau}/\vec{\omega}$  (in quest'ultimo caso non c'è nulla da dimostrare!). Possiamo allora decomporre  $\vec{\tau}$  nel componente  $\vec{\tau}_p$  secondo la direzione fissa di  $\vec{\omega}$  e nel componente  $\vec{\tau}_n$  normale alla direzione di  $\vec{\omega}$  in modo che si abbia

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_n, \quad (\text{IV.21})$$

dove  $\vec{\tau}_p$  e  $\vec{\tau}_n$  sono costanti e  $\vec{\tau}_n$  è non nullo. Poichè  $\vec{\tau}_n$  e  $\vec{\omega}$  sono ortogonali, esiste un vettore  $\vec{a}$ , ortogonale a  $\vec{\tau}_n$  e  $\vec{\omega}$ , tale che

$$\vec{\tau}_n = -\vec{\omega} \wedge \vec{a}. \quad (\text{IV.22})$$

Per determinare il vettore  $\vec{a}$  basta moltiplicare vettorialmente a sinistra ambo i membri della precedente equazione per  $\vec{\omega}$  e, tenendo conto della regola del doppio prodotto vettoriale, si trova

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_n = -(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{a})) = -(\vec{\omega} \cdot \vec{a})\vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2 \vec{a} = |\vec{\omega}|^2 \vec{a},$$

da cui  $\vec{a} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_n}{|\vec{\omega}|^2}$ . Utilizzando le (IV.20), (IV.21) e (IV.22) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) - \vec{\omega} \wedge \vec{a} = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - (\Omega + \vec{a})),$$

e, poichè  $\vec{a}$  è un vettore costante, il punto  $\Omega_1 = \Omega + \vec{a}$  risulta fisso. Perciò l'ultima equazione fornisce

$$\vec{v}_P = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1), \quad (\text{IV.23})$$

e questa equazione fornisce la decomposizione propria di cui il teorema afferma l'esistenza.  $\square$

La decomposizione (IV.23) mostra che, ad eccezione del caso in cui  $\vec{\tau}_p = \vec{0}$  (corrispondente a un moto rotatorio), la velocità di un punto  $P$  è data dalla somma di due vettori  $\vec{\tau}_p$  e  $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)$ . Il primo di questi due vettori è parallelo a  $\vec{\omega}$  mentre il secondo è ortogonale a  $\vec{\omega}$ . Questo suggerisce di considerare la retta  $\zeta$  passante per il punto fisso  $\Omega_1$  e parallela a  $\vec{\omega}$  e il piano  $\pi$  passante per  $\Omega_1$  e perpendicolare a  $\vec{\omega}$ . Infatti, i due addendi  $\vec{\tau}_p$  e  $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)$  rappresentano le velocità delle proiezioni ortogonali  $P_\zeta$  e  $P_1$  di  $P$  su  $\zeta$  e  $\pi$  rispettivamente. Poichè  $\vec{\tau}_p$  è costante, il moto di  $P_\zeta$  è rettilineo uniforme. Per quanto riguarda il moto di  $P_1$ , potendosi scrivere

$$P - \Omega_1 = (P - P_1) + (P_1 - \Omega_1),$$

con  $P - P_1$  parallelo a  $\vec{\omega}$ , si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_1 - \Omega_1),$$

e tale moto è, quindi, rotatorio uniforme intorno a  $\Omega_1$ . Quindi il moto risultante del generico punto  $P$  del sistema è elicoidale uniforme (essendo ottenuto componendo un moto rettilineo uniforme e un moto rotatorio uniforme) e l'asse di tale moto è la retta  $\zeta$  passante per  $\Omega_1$  e avente la direzione di  $\vec{\omega}$  e  $\vec{\tau}_p$ .

Chiudiamo questa sottosezione ricavando le equazioni del moto elicoidale. A tale scopo scegliamo come terna mobile  $Oxyz$  una qualunque terna solidale con il sistema rigido in modo che l'asse  $z$  coincida con la retta  $\zeta$  e sia orientato come  $\vec{\omega}$ ; si scelga invece come terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$  la posizione assunta da  $Oxyz$  all'istante  $t = 0$ .

Si verifica immediatamente che la componente di  $\vec{\tau}_p$  lungo  $\Omega\zeta$  sarà  $\pm|\vec{\tau}_p|$  a seconda che  $\vec{\tau}_p$  e  $\vec{\omega}$  abbiano verso concorde oppure no.

Se ora consideriamo le proiezioni  $P_\zeta$  e  $P_1$  del generico punto  $P$  rispettivamente lungo l'asse  $\zeta$  e sul piano  $\xi\eta$ , avremo:

- a. Il punto  $P_\zeta$  descrive la retta  $\zeta$  con moto uniforme avente velocità  $\pm|\vec{\tau}_p|$ . Poichè per  $t = 0$  si ha  $\zeta = z$ , l'equazione del moto è

$$\zeta = \pm|\vec{\tau}_p|t + z. \quad (\text{IV.24})$$

- b. Il punto  $P_1$  ruota invece nel piano  $\xi\eta$  di moto circolare uniforme intorno a  $\Omega$  con velocità angolare  $\dot{\theta} = \omega$  essendo  $\theta$  l'anomalia dell'asse mobile  $Ox$  rispetto a quello fisso  $O\xi$ . Chiaramente si ha  $\theta = \omega t$ . Quindi le equazioni del moto di  $P_1$  si ottengono ponendo  $\theta = \omega t$  nelle prime due equazioni di (IV.16), ottenendo:

$$\begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t. \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Le equazioni cercate si ottengono mettendo insieme le (IV.24) e (IV.25); si perviene così alle equazioni del moto elicoidale:

$$\begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t, \\ \zeta = \pm|\vec{\tau}_p|t + z. \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

## 4 Moti rigidi generali

In questa sezione vengono studiati i moti rigidi nel caso più generale.

## 4.1 Formule di Poisson

Per determinare la velocità di un generico punto  $P$  di un sistema rigido  $S$  occorre derivare la (IV.1) ottenendo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Quindi, per poter esprimere in modo opportuno la velocità del punto  $P$  occorre considerare le derivate dei versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  rispetto al tempo. Per comodità introduciamo la seguente notazione: indichiamo i versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  rispettivamente con  $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ . Sussiste il seguente

**Teorema IV.2** (*Formule di Poisson*<sup>3</sup>) *Esiste un unico vettore  $\vec{\omega}$  (lo stesso per tutti e tre gli assi  $x, y$  e  $z$ ) tale che*

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{j}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_2, \quad \frac{d\vec{j}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_3. \quad (\text{IV.27})$$

*Dimostrazione.* Dividiamo la dimostrazione in tre parti

1. Costruzione del vettore  $\vec{\omega}$  (**il vettore velocità angolare**);
2. Verifica che il vettore velocità angolare soddisfa le (IV.27);
3. Verifica che il vettore  $\vec{\omega}$  non dipende dalla particolare terna solidale scelta.

Per costruire il vettore  $\vec{\omega}$  procediamo nel seguente modo: Dopo aver moltiplicato vettorialmente a destra la (IV.27) per  $\vec{j}_1$ , troviamo (utilizzando la regola del doppio prodotto vettoriale):

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} \wedge \vec{j}_1 = (\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1) \wedge \vec{j}_1 = (\vec{\omega} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1 - (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1) \vec{\omega} = \omega_x \vec{j}_1 - \vec{\omega}, \quad (\text{IV.28})$$

essendo  $\omega_x$  la componente del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto all'asse  $x$ . Facendo calcoli molto simili, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{d\vec{j}_2}{dt} \wedge \vec{j}_2 = \omega_y \vec{j}_2 - \vec{\omega}, \quad (\text{IV.29a})$$

$$\frac{d\vec{j}_3}{dt} \wedge \vec{j}_3 = \omega_z \vec{j}_3 - \vec{\omega}, \quad (\text{IV.29b})$$

---

<sup>3</sup>Siméon Denis Poisson nato a Pithiviers nel 1781 morto nel 1840 a Parigi dove insegnò Meccanica Razionale alla École Polytechnique. Le formule riportate in questo teorema si trovano nel suo testo *Traité de Mécanique*.

dove  $\omega_y, \omega_z$  rappresentano le componenti del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto agli assi  $y$  e  $z$ , rispettivamente. Quindi, sommando (IV.28), (IV.29a) e (IV.29b), abbiamo:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\vec{j}_i}{dt} \wedge \vec{j}_i = \omega_x \vec{j}_1 - \vec{\omega} + \omega_y \vec{j}_2 - \vec{\omega} + \omega_z \vec{j}_3 - \vec{\omega} = \left( \omega_x \vec{j}_1 + \omega_y \vec{j}_2 + \omega_z \vec{j}_3 \right) - 3\vec{\omega} = -2\vec{\omega}.$$

In altre parole, abbiamo ottenuto

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\vec{j}_i}{dt} \wedge \vec{j}_i = -2\vec{\omega}$$

e, tenendo conto delle proprietà del prodotto vettoriale, quest'ultima equazione può risciversi come

$$\sum_{i=1}^3 \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} = 2\vec{\omega}.$$

Quindi il vettore  $\vec{\omega}$  è dato da

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right). \quad (\text{IV.30})$$

Abbiamo così costruito il vettore  $\vec{\omega}$  di cui il teorema afferma l'esistenza. È utile verificare che il vettore dato dalla (IV.30) soddisfa le (IV.27). Eseguiamo tale verifica solo per la prima delle (IV.27) in quanto la verifica per le altre due equazioni è simile. Ci serviremo delle due proprietà contenute nel seguente

**Lemma IV.3** *Abbiamo le seguenti identità:*

$$\frac{d\vec{j}_r}{dt} \cdot \vec{j}_s = -\frac{d\vec{j}_s}{dt} \cdot \vec{j}_r, \quad (\text{IV.31a})$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left( \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2 \right) \vec{j}_2 + \left( \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_3 \right) \vec{j}_3. \quad (\text{IV.31b})$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione di (IV.31a) segue dal fatto che, indicato con  $\delta_{rs}$  il Delta di Kronecker, si ha  $0 = \frac{d(\vec{j}_r \cdot \vec{j}_s)}{dt} = \frac{d\vec{j}_r}{dt} \cdot \vec{j}_s + \frac{d\vec{j}_s}{dt} \cdot \vec{j}_r$ . La dimostrazione di (IV.31) è immediata se nella seguente (ben nota!) identità

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{j}_2) \vec{j}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{j}_3) \vec{j}_3,$$

si pone  $\vec{v} = \frac{d\vec{j}_1}{dt}$  e si tiene conto che  $\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = 0$  avendo  $\vec{j}_1$  modulo costante.  $\square$



Possiamo ora facilmente verificare la prima delle (IV.27). Infatti, si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right) \wedge \vec{j}_1 \\
&= \frac{1}{2} \left[ (\vec{j}_1 \wedge \frac{d\vec{j}_1}{dt}) \wedge \vec{j}_1 + (\vec{j}_2 \wedge \frac{d\vec{j}_2}{dt}) \wedge \vec{j}_1 + (\vec{j}_3 \wedge \frac{d\vec{j}_3}{dt}) \wedge \vec{j}_1 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1) \frac{d\vec{j}_1}{dt} - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt}) \vec{j}_1 + (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2) \frac{d\vec{j}_2}{dt} - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_2}{dt}) \vec{j}_2 + (\vec{j}_3 \cdot \vec{j}_1) \frac{d\vec{j}_3}{dt} \right. \\
&\quad \left. - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_3}{dt}) \vec{j}_3 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\vec{j}_1}{dt} - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_2}{dt}) \vec{j}_2 - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_3}{dt}) \vec{j}_3 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{d\vec{j}_1}{dt} + (\vec{j}_2 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt}) \vec{j}_2 + (\vec{j}_3 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt}) \vec{j}_3 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right] = \frac{d\vec{j}_1}{dt},
\end{aligned}$$

dove nelle ultime due uguaglianze ci si è serviti di (IV.31a) e (IV.31b).

Resta solo da provare che il vettore  $\vec{\omega}$  non dipende dalla scelta della terna solidale. A tal fine sia  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  un altro riferimento (ortonormale) solidale e, per assurdo, sia  $\vec{\omega}_1 (\neq \vec{\omega})$  il vettore costruito tramite le (IV.30), si avrebbe quindi:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right). \quad (\text{IV.32})$$

Se indichiamo con  $\alpha_{rs}$ , ( $r, s = 1, 2, 3$ ) i coseni direttori che i versori  $\vec{e}_r$  formano con gli assi  $\vec{j}_s$ , cioè esplicitamente

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_1, & \alpha_{12} &= \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_1, & \alpha_{13} &= \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_1, \\
\alpha_{21} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_2, & \alpha_{22} &= \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_2, & \alpha_{23} &= \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_2, \\
\alpha_{31} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_3, & \alpha_{32} &= \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_3, & \alpha_{33} &= \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_3,
\end{aligned}$$

possiamo esprimere i versori  $\vec{e}_r$  in funzione di  $\vec{j}_s$  facilmente nel seguente modo:

$$\vec{e}_1 = \alpha_{11} \vec{j}_1 + \alpha_{12} \vec{j}_2 + \alpha_{13} \vec{j}_3 = \sum_{s=1}^3 \alpha_{1s} \vec{j}_s, \quad (\text{IV.33a})$$

$$\vec{e}_2 = \alpha_{21} \vec{j}_1 + \alpha_{22} \vec{j}_2 + \alpha_{23} \vec{j}_3 = \sum_{s=1}^3 \alpha_{2s} \vec{j}_s, \quad (\text{IV.33b})$$

$$\vec{e}_3 = \alpha_{31} \vec{j}_1 + \alpha_{32} \vec{j}_2 + \alpha_{33} \vec{j}_3 = \sum_{s=1}^3 \alpha_{3s} \vec{j}_s. \quad (\text{IV.33c})$$

Usando le (IV.33), si trova

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_1 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( \vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \alpha_{1s} \vec{j}_s \wedge \left( \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_{1k} \vec{j}_k \right) \right) + \sum_{s=1}^3 \alpha_{2s} \vec{j}_s \wedge \left( \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k} \vec{j}_k \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^3 \alpha_{3s} \vec{j}_s \wedge \left( \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_{3k} \vec{j}_k \right) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\alpha_{1s} \alpha_{1k}) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} + \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\alpha_{2s} \alpha_{2k}) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\alpha_{3s} \alpha_{3k}) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} \alpha_{lk} \right) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right\}. \tag{IV.34}
\end{aligned}$$

Si è cioè ottenuto

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} \alpha_{lk} \right) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right\}.$$

A questo punto si può facilmente verificare che il coefficiente del vettore  $\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}$  vale 1 se  $s = k$ , 0 se  $s \neq k$ , quindi

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right),$$

e la dimostrazione è ora completa.  $\square$

## 4.2 Derivata temporale di un vettore solidale al sistema rigido

È possibile compattare le formule di Poisson in un'unica formula. A tal fine ricordiamo che  $\vec{a}$  rappresenta un vettore solidale al corpo rigido in moto se le componenti  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  di tale vettore rispetto alla terna solidale  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{j}_2$ ,  $\vec{j}_3$  non dipendono dal tempo. Quindi, derivando rispetto al tempo l'identità

$$\vec{a} = a_x \vec{j}_1 + a_y \vec{j}_2 + a_z \vec{j}_3$$

e tenendo conto delle formule di Poisson (IV.27), si trova

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{a}}{dt} &= a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt} \\ &= a_x(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + a_y(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + a_z(\vec{\omega} \wedge \vec{k}) = \vec{\omega} \wedge a_x \vec{i} + \vec{\omega} \wedge a_y \vec{j} + \vec{\omega} \wedge a_z \vec{k} \\ &= \vec{\omega} \wedge (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \vec{\omega} \wedge \vec{a},\end{aligned}$$

in altre parole, abbiamo ricavato

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{a}. \quad (\text{IV.35})$$

La (IV.35) contiene come caso particolare le formule di Poisson.

### 4.3 Derivata temporale di un vettore non solidale al sistema rigido

Come calcolare, più in generale, la derivata di un vettore le cui componenti non rimangono costanti rispetto alla terna solidale? Per rispondere a tale domanda indichiamo con  $\vec{b}$  il vettore di cui si vuole calcolare la derivata e siano  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$ ,  $b_3(t)$  le componenti di tale vettore rispetto alla terna solidale. Tenendo conto delle (IV.27) e dei calcoli sviluppati per arrivare alla (IV.35), si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}}{dt} &= \dot{b}_1(t)\vec{j}_1 + b_1(t)\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{b}_2(t)\vec{j}_2 + b_2(t)\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{b}_3(t)\vec{j}_3 + b_3(t)\frac{d\vec{k}}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge (b_1(t)\vec{i} + b_2(t)\vec{j} + b_3(t)\vec{k}) = \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{b},\end{aligned}$$

cioè

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{b} = \dot{\vec{b}}(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{b}. \quad (\text{IV.36})$$

Un caso particolare e molto significativo della (IV.36) lo si ottiene considerando  $\vec{b} = \vec{\omega}$ . Si avrebbe

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i(t)\vec{j}_i = \dot{\vec{\omega}}(t), \quad (\text{IV.37})$$

essendo  $\dot{\omega}_i(t)$  le componenti della velocità angolare rispetto agli assi solidali. Questa formula è molto interessante perchè esprime il fatto che il vettore  $\vec{\omega}$  ha il medesimo derivato temporale sia rispetto agli assi fissi che rispetto agli assi

mobili. In particolare, se  $\vec{\omega}$  ha direzione costante rispetto agli assi solidali avrà direzione costante anche rispetto agli assi fissi. Per dimostrarlo, si indichi con  $\vec{l}$  il versore di  $\vec{\omega}$ . Conviene osservare preliminarmente che  $\vec{l}$  ha modulo costante e quindi risulta ortogonale al suo derivato  $\frac{d\vec{l}}{dt}$ . Dalla (IV.37), scrivendo  $\vec{\omega} = \omega\vec{l}$  si ricava inoltre che

$$\frac{d\omega}{dt}\vec{l} + \omega\frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\omega}\vec{l} + \omega\dot{\vec{l}},$$

e poichè  $\vec{l}$  è ortogonale a  $\frac{d\vec{l}}{dt}$  e  $\dot{\vec{l}}$ , l'equazione di sopra è soddisfatta se e solo se

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}, \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{l}}.$$

L'ultima delle due equazioni scritte sopra afferma proprio che se la direzione di  $\vec{l}$  è fissa nel riferimento solidale è tale anche in quello fisso e viceversa.

#### 4.4 Componenti della velocità angolare rispetto al riferimento solidale

Per sfruttare bene la (IV.37) sarebbe utile conoscere le componenti del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna mobile. Solitamente tali componenti si denotano con  $p, q, r$ , si ha cioè  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{j}_1 + \omega_2\vec{j}_2 + \omega_3\vec{j}_3$ . Al fine di ottenere tali formule ripartiamo dall'identità

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_2 + \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_3\right)\vec{j}_3.$$

Tenuto conto che  $\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = 0$  e della (IV.31a), quest'ultima equazione si può scrivere come

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_2 - \left(\frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_3.$$

Poichè  $\vec{j}_3 = -\vec{j}_2 \wedge \vec{j}_1$ ,  $\vec{j}_2 = \vec{j}_3 \wedge \vec{j}_1$  e  $\vec{0} = \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_1$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{j}_1}{dt} &= \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_3 \wedge \vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_2 \wedge \vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{j}_3\right)\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_1 \\ &= \left[ \left(\frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{j}_3\right)\vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_2 + \left(\frac{\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_3 \right] \wedge \vec{j}_1. \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

Quindi confrontando la prima delle (IV.27) con la (IV.38), si trovano le componenti del vettore della velocità angolare nel riferimento solidale:

$$\omega_1 = \frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{j}_3, \quad (\text{IV.39a})$$

$$\omega_2 = \frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1, \quad (\text{IV.39b})$$

$$\omega_3 = \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2. \quad (\text{IV.39c})$$

## 5 Velocità e accelerazione in un moto rigido generale

### 5.1 Velocità in un moto rigido

Se  $P$  e  $O$  sono due punti di un sistema rigido, il vettore  $P - O$  è necessariamente un vettore solidale al corpo rigido e quindi possiamo applicare a tale vettore la formula (IV.35) ottenendo

$$\frac{d(P - O)}{dt} = \vec{\omega} \wedge (P - O).$$

Se si indicano con  $\vec{v}_P$  e  $\vec{v}_O$  le velocità  $\frac{dP}{dt}$  e  $\frac{dO}{dt}$  dei punti  $P$  e  $O$ , si perviene alla seguente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O). \quad (\text{IV.40})$$

Quindi abbiamo trovato l'espressione della velocità di un generico punto di un sistema rigido in moto. I vettori  $\vec{v}_O$  (rimarchiamo che  $O$  rappresenta un qualunque punto solidale del sistema rigido e quindi non necessariamente coincide con l'origine) e  $\vec{\omega}$  sono entrambi funzioni del tempo e indipendenti dal punto  $P$ .

Viceversa, supponiamo che siano assegnati due vettori  $\vec{v}_O$  e  $\vec{\omega}$  dipendenti dal tempo e che un sistema si muova in modo tale che la velocità del suo generico punto  $P$  sia espressa dalla (IV.40). Allora il sistema è necessariamente rigido. Per provare questa affermazione ragioniamo come segue. Siano  $P_1$  e  $P_2$  due punti del sistema e indichiamo con  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  le loro velocità. Per le ipotesi fatte possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_1 - O), \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_2 - O). \end{aligned}$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda, si trova

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \wedge (P_1 - P_2)$$

che esprime il fatto che il vettore  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$  risulta perpendicolare al vettore  $P_1 - P_2$ , perciò

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (P_1 - P_2) = 0.$$

Ma questa equazione caratterizza i moti rigidi (confronta con (IV.6)) come si voleva provare.

Possiamo perciò concludere che *l'equazione (IV.40) è caratteristica per le velocità dei punti di un moto rigido*. Quindi, rispetto alla terna fissa, un moto rigido risulta determinato quando si prefissino i vettori puramente temporali  $\vec{v}_O$  (essendo  $O$  un punto qualsiasi del sistema mobile) e  $\vec{\omega}$  che, per questo motivo, sono detti *vettori caratteristici del moto rigido rispetto al polo  $O$* .

Tenendo conto che abbiamo indicato con  $p, q, r$  le componenti di  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna solidale (vedi formule (IV.39)), se denotiamo con  $u, v, w$  le componenti di  $\vec{v}_O$ , possiamo proiettare la (IV.40) lungo gli assi della terna solidale ottenendo

$$v_x = u + qz - ry, \quad (\text{IV.41a})$$

$$v_y = v + rx - pz, \quad (\text{IV.41b})$$

$$v_z = w + py - qx. \quad (\text{IV.41c})$$

## 5.2 Accelerazione in un moto rigido

Possiamo ora facilmente determinare **l'accelerazione del generico punto  $P$**  di un sistema rigido. A tal fine basta derivare la (IV.40), ottenendo

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge \frac{d(P - O)}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O), \quad (\text{IV.42})$$

dove  $\vec{a}_P$  e  $\vec{a}_O$  rappresentano le accelerazioni di  $P$  e  $O$  rispettivamente. Per via della (IV.40) possiamo scrivere

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d(P - O)}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_P - \vec{v}_O) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O)).$$

Consideriamo ora la retta  $r$  passante per  $O$  e parallela a  $\vec{\omega}$  (supponiamo  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ) e sia  $Q$  la proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$ . Ovviamente si ha:  $P - O = (P - Q) + (Q - O)$  essendo  $Q - O$  parallelo a  $\vec{\omega}$  e  $P - Q$  ortogonale a  $\vec{\omega}$  (si veda la figura). Quindi, usando anche la regola del doppio prodotto vettoriale

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O)) &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - Q)) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (Q - O)) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - Q)) = (\vec{\omega} \cdot (P - Q))\vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2(P - Q) = -|\vec{\omega}|^2(P - Q), \end{aligned}$$

si ha

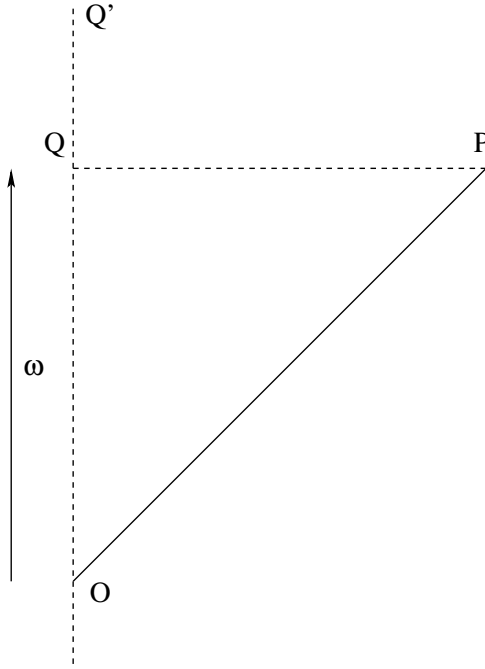


Figura IV.3: Asse di istantanea rotazione.

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d(P - O)}{dt} = -|\vec{\omega}|^2(P - Q).$$

In definitiva, la (IV.42) può essere riscritta come

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O - |\vec{\omega}|^2(P - Q) + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O), \quad (\text{IV.43})$$

che esprime l'accelerazione del generico punto  $P$  (in funzione di quella di un prefissato punto  $O$  del sistema e del vettore dipendente dal tempo  $\vec{\omega}$ ). La retta  $r$  sopra introdotta è nota come *asse di istantanea rotazione*. Un caso particolare è quello di un moto rigido rotatorio uniforme. In tal caso si annullano  $\vec{a}_O$  e  $\dot{\vec{\omega}}$  ( $\vec{\omega}$  è infatti costante) e la (IV.43) diventa

$$\vec{a}_P = -|\vec{\omega}|^2(P - Q). \quad (\text{IV.44})$$

In tal caso, l'accelerazione si dice *centripeta* essendo diretta verso il centro della circonferenza descritta da  $P$ .

## 6 Atto di moto

### 6.1 Definizione di atto di moto e asse di moto

Sebbene il concetto di atto di moto possa essere introdotto per sistemi anche non rigidi, per motivi di semplicità si tratterà solo il caso di sistemi rigidi.

Il moto di un sistema di punti può essere studiato seguendo due approcci diversi:

- a. Approccio *lagrangiano*;
- b. Approccio *euleriano*.

Il punto di vista lagrangiano consiste nell'esprimere i caratteri del moto in funzione della generica particella del sistema e del tempo. Finora abbiamo sempre seguito un approccio di questo tipo. Per esempio, la notazione  $\vec{v}_P(t)$  denota la velocità (in funzione del tempo) di una generica particella del sistema. Quindi  $\vec{v}_P$  rappresenta la velocità lagrangiana.

Il punto di vista euleriano consiste invece nell'esprimere i caratteri del moto in funzione del tempo e di una fissata posizione  $A$  dello spazio ambiente. In questo caso il campo delle velocità del sistema sarà espresso in funzione del tempo e del generico posto  $A$ . Più precisamente, la notazione  $\vec{e}_A(t)$  rappresenta la velocità in  $A$  all'istante  $t$  (velocità euleriana). Si può pensare alla velocità euleriana come alla velocità che compete alla particella  $P$  del sistema che all'istante  $t$  transita per la posizione  $A$ . È opportuno rimarcare che al variare dell'istante considerato cambia la particella che transita per  $A$ .

Fissato un certo istante temporale  $t$ , l'insieme dei vettori applicati  $(A, \vec{e}_A(t))$  è detto **atto di moto del sistema all'istante considerato**. Tale terminologia fu introdotta da Maggi<sup>4</sup>. Si tratta di un campo di vettori che precisa la distribuzione istantanea delle velocità nello spazio di riferimento, senza considerare la loro dipendenza dal tempo (infatti l'istante  $t$  è fissato). Volendo usare un'immagine pittoresca per descrivere la definizione di atto di moto, possiamo dire che esso corrisponde a una fotografia in cui, per ogni punto  $A$  dello spazio ambiente, è rappresentato il vettore velocità della particella solidale al sistema rigido che all'istante del clic passa per  $A$  (sempre che tale particella esista!).

Poichè nelle sezioni precedenti abbiamo sempre considerato il punto di vista lagrangiano, è naturale cercare di tradurre le relazioni trovate in termini della formulazione euleriana. In particolare, interessa avere una rappresentazione in forma euleriana della formula fondamentale della cinematica (IV.40). Per ottenere tale rappresentazione, si indichino con  $A$  e  $B$  le posizioni dello spazio ambiente per cui transitano i punti  $P$  e  $O$  del sistema rigido nell'istante  $t$  fissato. Denotiamo quindi con  $\vec{e}_A$  e  $\vec{e}_B$  le velocità dei punti  $P$  e  $O$  nell'istante  $t$ . Evidentemente nell'istante  $t$  si ha  $\vec{e}_A = \vec{v}_P$  e  $\vec{e}_B = \vec{v}_O$  e quindi la (IV.40) può

---

<sup>4</sup>Gian Antonio Maggi nato a Milano nel 1856 e morto nel 1937 a Milano. Insegnò Calcolo nelle Università di Modena e Messina e Meccanica Razionale a Pisa e Milano. Si interessò di Dinamica Analitica, teoria del potenziale, elasticità e elettromagnetismo. Svolse inoltre accurate ricerche sui fondamenti della Meccanica classica e Relativistica.



riscriversi come

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B). \quad (\text{IV.45})$$

L'equazione (IV.45) caratterizza ad ogni istante fissato la distribuzione delle velocità in un qualunque moto rigido.

Analogamente, la proprietà caratteristica dei moti rigidi espressa in termini lagrangiani dall'equazione (IV.7), seguendo un approccio di tipo euleriano diventa

$$\vec{e}_A \cdot (A - B) = \vec{e}_B \cdot (A - B), \quad (\text{IV.46})$$

qualunque siano le posizioni  $A$  e  $B$ .

Studiamo il comportamento dei due vettori caratteristici  $\vec{\omega}$  e  $\vec{e}_B$  al variare della posizione  $B$ .

Prima proprietà: Il vettore  $\vec{\omega}$  non dipende da come si sceglie la posizione  $B$ .

Per dimostrare tale proprietà iniziamo a verificare che il vettore  $\vec{\omega}$  non cambia se, mantenendo fisso  $B$ , si riferisce il sistema rigido ad una terna solidale  $Bx_1y_1z_1$  avente orientazione diversa dalla "solita" terna solidale  $Bxyz$  (confronta anche con la terza parte della dimostrazione delle formole di Poisson). Infatti, se denotassimo con  $\vec{\omega}^\dagger$  la velocità angolare calcolata nel sistema di riferimento  $Bx_1y_1z_1$ , avremo che la velocità in  $A$  sarà data da

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega}^\dagger \wedge (A - B).$$

Ma, relativamente alla prima terna solidale  $Bxyz$ , tale velocità vale

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B).$$

Per cui, eguagliando le due espressioni trovate per la velocità nel punto  $A$  si trova

$$\vec{\omega}^\dagger \wedge (A - B) = \vec{\omega} \wedge (A - B),$$

che possiamo riscrivere come  $(\vec{\omega}^\dagger - \vec{\omega}) \wedge (A - B) = \vec{0}$ . Poichè quest'ultima equazione deve essere soddisfatta qualunque sia la posizione di  $A$  che si scelga (ovvero per qualunque scelta del vettore  $A - B$ ), deve necessariamente verificarsi che  $\vec{\omega}^\dagger - \vec{\omega} = \vec{0}$ , ossia  $\vec{\omega}^\dagger = \vec{\omega}$ . Ora cambiamo la posizione portandola da  $B$  a  $B'$ . Poichè abbiamo appena dimostrato che la velocità angolare non dipende dall'orientazione della particolare terna solidale con assi concorrenti in  $B'$  a cui si riferisce il moto, non è restrittivo considerare la terna avente gli assi paralleli e equiversi alla prima terna solidale  $Bxyz$  e origine in  $B'$ . Poichè in questo modo non variano i versori fondamentali, non varia in base alla (IV.30) neanche la velocità angolare  $\vec{\omega}$ .

Seconda proprietà: Il vettore  $\vec{e}_B$  varia al variare della posizione  $B$  in accordo alla seguente legge:

$$\vec{e}_{B'} = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (B' - B) = \vec{e}_B + (B - B') \wedge \vec{\omega}. \quad (\text{IV.47})$$

La dimostrazione è immediata e discende direttamente dalla legge (IV.45).

Le due proprietà ora ricavate permettono di concludere che: *i vettori caratteristici di un moto rigido  $\vec{\omega}$  e  $\vec{e}_B$  si comportano, al variare del polo, rispettivamente come il risultante e il momento risultante di un sistema di vettori applicati, al variare del polo.* Perciò tutte le proposizioni ottenute nel Capitolo I e relative alla riduzione dei sistemi di vettori applicati forniscono proposizioni valide relativamente agli atti di moto. Tali proposizioni si ottengono semplicemente sostituendo la parola momento con il termine velocità e la parola risultante  $\vec{R}$  con la velocità angolare  $\vec{\omega}$ .

In particolare, nella Teoria dei Momenti si è definito l'asse centrale di un dato sistema di vettori applicati come il luogo geometrico dei punti rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al risultante (supposto diverso dal vettore nullo). In analogia a tale concetto introduciamo l'**asse del moto rigido all'istante  $t$**  (o *asse di Mozzi*<sup>5</sup>) come il luogo dei punti di velocità parallela alla velocità angolare  $\vec{\omega}$  (supponendo  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ). Inoltre, il componente della velocità nella direzione di  $\vec{\omega}$  non dipende dal polo  $B$ . Quindi se  $B$  è un punto dell'asse di moto si ha  $\vec{e}_B = \vec{\tau} // \vec{\omega}$  e, tenendo conto di ciò, la (IV.47) assume la forma

$$\vec{e}_A = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (A - B), \text{ essendo } \vec{\tau} // \vec{\omega} \text{ e } B \text{ indipendente da } A. \quad (\text{IV.48})$$

Questa equazione rende esplicito che il vettore  $\vec{\tau}$  rappresenta il componente di  $\vec{e}_B$  parallelo ad  $\omega$ , tale vettore è anche detto *velocità di traslazione del sistema rigido all'istante  $t$* .

Avendo in mente l'espressione lagrangiana stabilita per le velocità nella sezione "Moti rigidi particolari", possiamo interpretare la (IV.48) nel seguente modo: **In un moto rigido, in ogni istante, l'atto di moto è elicoidale**, nel senso che si compone di una traslazione lungo l'asse di moto e di una rotazione attorno allo stesso asse. Quest'ultima affermazione è solitamente nota con il nome di Teorema di Mozzi. Osserviamo che come casi particolari della (IV.48), troviamo i seguenti:

- *Atto di moto traslatorio.* Equivale a prendere  $\vec{\omega} = \vec{0}$  nella (IV.48) che quindi fornisce la seguente equazione:

$$\vec{e}_A = \vec{\tau}.$$

---

<sup>5</sup>Giulio Mozzi nato a Firenze nel 1730 e morto a Firenze nel 1813. Pubblicò un solo lavoro scientifico: quello in cui viene evidenziata l'esistenza dell'asse di moto.

Quindi in un atto di moto traslatorio la velocità non dipende dal posto. Se un moto rigido è traslatorio l'atto di moto è traslatorio in ogni istante.

- *Atto di moto rotatorio.* Equivale alla possibilità di scegliere  $B$  in modo che la (IV.48) diventi

$$\vec{e}_A = \vec{\omega} \wedge (A - B),$$

essendo  $\vec{\tau} = \vec{0}$  e con  $B$  e  $\vec{\omega}$  indipendenti da  $A$ . Ogni moto rotatorio ha l'atto di moto sempre rotatorio con  $\vec{\omega}$  di direzione invariabile.

Dalle definizioni sopra presentate di atto di moto rotatorio e traslatorio segue che: in ogni istante  $t$  in cui si annulla  $\vec{\omega}$  l'atto di moto è traslatorio, mentre ogni istante in cui si annulla  $\vec{\tau}$  corrisponde a un atto di moto rotatorio. Dalla (IV.48), moltiplicando scalarmente per  $\vec{\omega}$ , otteniamo

$$\vec{\omega} \cdot \vec{e}_A = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau} = \pm |\vec{\omega}| |\vec{\tau}| = up + vq + wr,$$

essendo  $(u, v, w)$  le componenti di  $\vec{e}_A$  e  $(p, q, r)$  le componenti della velocità angolare. La quantità  $\vec{\omega} \cdot \vec{e}_A$  è detta trinomio invariante. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un atto di moto rigido sia traslatorio o rotatorio è che si annulli, in quel dato istante, il trinomio invariante.*

Non è difficile verificare che l'asse di moto è altresì caratterizzato dal fatto di essere *la retta dei punti di minima velocità*. Infatti ogni punto dell'asse di Mozzi ha, per definizione, velocità in modulo uguale a  $|\tau|$ . Sia ora  $A$  una qualunque posizione del sistema che, nell'istante  $t$ , non appartiene all'asse di moto e si indichi con  $d_A$  la distanza di tale punto dall'asse. In base alla (IV.48) il modulo della velocità  $\vec{e}_A$  è  $|\vec{e}_A| = \sqrt{|\tau|^2 + |\omega|^2 d_A^2} \geq |\tau|$  e vale l'uguale se e solo se  $d_A = 0$ .

## 6.2 Composizione di atti di moto rigidi

Se i vettori  $\vec{e}_A$  e  $\vec{f}_A$  rappresentano in un dato istante  $t$ , le velocità euleriane nella posizione  $A$  di due distinti atti di moti rigidi, il vettore

$$\vec{g}_A = \vec{e}_A + \vec{f}_A$$

caratterizza, nello stesso istante  $t$ , il cosiddetto atto di moto composto. È abbastanza semplice provare che l'atto di moto composto di due atti di moto rigido è anche esso un atto di moto rigido. Infatti, poichè per ipotesi  $\vec{e}_A$  e  $\vec{f}_A$  sono atti di moto rigido, per ciascuno di essi la (IV.46) assicura che

$$\vec{e}_A \cdot (A - B) = \vec{e}_B \cdot (A - B), \quad \vec{f}_A \cdot (A - B) = \vec{f}_B \cdot (A - B),$$

qualunque siano le posizioni  $A$  e  $B$  dello spazio ambiente. Sommando membro a membro queste relazioni si trova

$$\left( \vec{e}_A + \vec{f}_A \right) \cdot (A - B) = \left( \vec{e}_B + \vec{f}_B \right) \cdot (A - B)$$

che comporta

$$\vec{g}_A \cdot (A - B) = \vec{g}_B \cdot (A - B)$$

ossia che l'atto di moto composto è rigido. Per lo studio diretto della composizione degli atti di moto rigidi è necessaria la seguente osservazione. Se  $\vec{e}_O$  e  $\vec{\omega}_1$  sono i vettori caratteristici del primo atto di moto rigido, mentre  $\vec{f}_O$  e  $\vec{\omega}_2$  sono i vettori caratteristici del secondo atto di moto rigido in modo che

$$\begin{aligned}\vec{e}_A &= \vec{e}_O + \vec{\omega}_1 \wedge (A - B), \\ \vec{f}_A &= \vec{f}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (A - B)\end{aligned}$$

allora l'atto di moto rigido risultante è dato da

$$\vec{g}_A = \left( \vec{e}_O + \vec{f}_O \right) + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge (A - B),$$

*cioè i vettori caratteristici, rispetto a una qualunque posizione, di un atto di moto rigido composto si ottengono sommando vettorialmente gli omonimi vettori caratteristici degli atti di moto componenti rispetto alla medesima posizione.*

Essenzialmente usando quest'ultima proprietà si perviene ai seguenti teoremi di cui omettiamo la dimostrazione:

**Teorema IV.4** *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi concorrenti in un punto è anch'esso rotatorio intorno ad un asse passante per quel punto, ed ha per velocità angolare la somma algebrica delle velocità angolari degli atti di moto componenti.*

**Teorema IV.5** *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli  $r$  e  $r'$  e di velocità angolari  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  non opposte, è anch'esso rotatorio intorno ad un asse parallelo a  $r$  e  $r'$  e giace nel piano della striscia  $r$  e  $r'$  dividendola in parti inversamente proporzionali a  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  (internamente o esternamente a seconda che  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  siano di verso concorde o meno).*

**Teorema IV.6** *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli  $r$  e  $r'$  e di velocità angolari  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  opposte, è puramente traslatorio in direzione ortogonale al piano degli assi  $r$  e  $r'$  e ha per velocità il momento della coppia delle velocità angolari  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  ciascuna di esse localizzata lungo il rispettivo asse.*

## 7 Angoli di Eulero

### 7.1 Definizione degli angoli di Eulero

Nella sezione 1 si è già sottolineato che per determinare la posizione di un sistema rigido rispetto a un'assegnata terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$  basta conoscere la posizione

di una terna  $Oxyz$  solidale con il sistema rigido rispetto alla terna prefissata  $\Omega\xi\eta\zeta$ . In particolare, le equazioni (IV.3) mostrano che la posizione della terna  $Oxyz$  rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  è nota quando si conoscono le coordinate  $\alpha, \beta, \gamma$  dell'origine  $O$  e i nove coseni direttori  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  dei versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Questi ultimi non sono tutti indipendenti fra loro, ma devono soddisfare le sei relazioni espresse dalle (IV.4). Quindi i parametri indipendenti che consentono di specificare la posizione del sistema rispetto alla prefissata terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  sono sei: le coordinate  $\alpha, \beta, \gamma$  dell'origine e tre dei nove coseni direttori  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ .

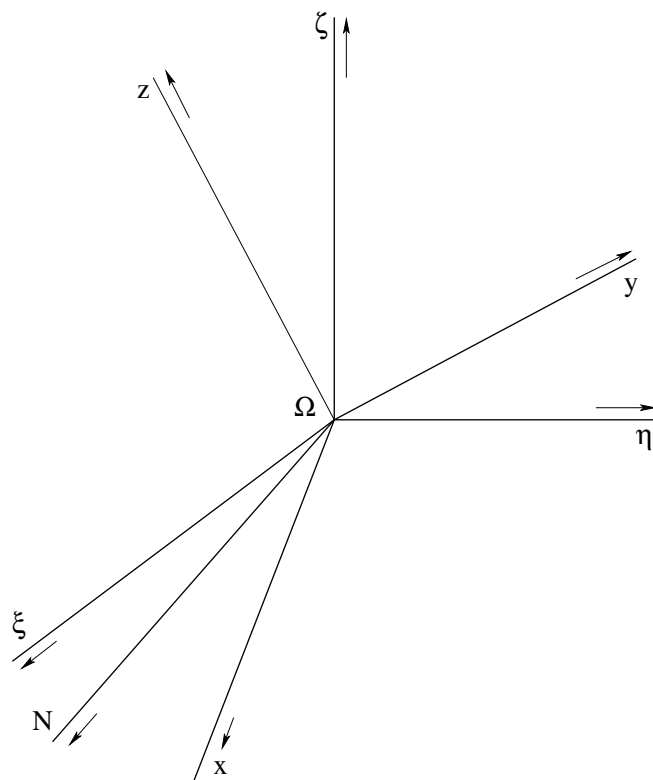


Figura IV.4: Angoli di Eulero.

È opportuno introdurre dei parametri che consentono una più agevole (e visuale) identificazione della posizione di  $Oxyz$  rispetto a  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Poiché il modo più semplice di localizzare l'origine  $O$  è tramite le sue coordinate, cerchiamo tre parametri indipendenti atti a individuare in modo univoco l'orientazione della terna  $\Omega xyz$  (parallela alla terna  $Oxyz$  ma con l'origine in  $\Omega$ ) rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Tre parametri che consentono di identificare facilmente l'orientazione di  $\Omega xyz$  rispetto a  $\Omega\xi\eta\zeta$  sono i cosiddetti **angoli di Eulero**. L'introduzione di tali angoli può essere fatta come segue: Supponiamo che i piani  $xy$  e  $\xi\eta$  non coincidano. In tal caso questi piani si intersecheranno lungo una retta

che è perpendicolare sia all'asse  $z$  che all'asse  $\zeta$  (essendo comune a due piani rispettivamente ortogonali all'asse  $z$  e all'asse  $\zeta$ ) e quindi al piano da questi individuato. La retta ottenuta come intersezione dei piani  $xy$  e  $\xi\eta$  e orientata in modo che rispetto ad essa appaia destro l'angolo  $\hat{\zeta}z$  delle due rette orientate  $\zeta$  e  $z$ , viene detta linea dei nodi e si denota con  $N$ , mentre l'angolo  $\hat{\zeta}z$  si chiama *angolo di nutazione* e si denota con  $\theta$  (per definizione si ha  $0 < \theta < \pi$ ). Si chiama *angolo di precessione* e si denota con  $\psi$  l'angolo  $\hat{\xi}N$  misurato nel verso destro rispetto a  $\zeta$ ; infine, l'angolo  $\hat{N}x$  misurato nel verso destro rispetto a  $z$  si dice *angolo di rotazione propria* e si indica con  $\phi$ . I tre angoli  $\theta$ ,  $\psi$  e  $\phi$  definiti in questo modo si chiamano *angoli di Eulero* della terna  $\Omega xyz$  rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  e sono soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leq \psi < 2\pi, \\ 0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

È altresì facile osservare che, assegnati tre valori arbitrari a  $\theta$ ,  $\psi$  e  $\phi$  in modo che le limitazioni espresse dalla (IV.49) siano verificate, resta individuata la posizione della terna  $\Omega xyz$  rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Infatti, nel piano  $\xi\eta$  l'angolo  $\psi$  consente di tracciare la linea dei nodi  $N$ . Quindi nel piano per  $\Omega$  perpendicolare alla linea dei nodi, l'asse  $z$  è individuato come quello che, nel verso destro rispetto a  $N$ , forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $\zeta$ . Inoltre nel piano passante per  $\Omega$  e perpendicolare all'asse  $z$ , l'asse  $x$  è localizzato dalla sua anomalia  $\phi$  rispetto alla linea dei nodi (nel verso destro rispetto all'asse  $z$ ). Infine l'asse  $y$  risulta univocamente individuato come quello che con gli assi  $x$  e  $z$  forma una terna trirettangolo destra.

Rimane da considerare il caso in cui i piani  $\xi\eta$  e  $xy$  coincidono. In tal caso l'angolo di nutazione  $\theta$  è uguale a  $0$  o a  $\pi$ . In tal caso la linea dei nodi è indeterminata e lo stesso si può dire per gli angoli  $\psi$  e  $\phi$ . Rimane invece determinata la somma degli angoli  $\psi$  e  $\phi$  che in questo caso sono complanari. Infatti, ovunque si pensi tracciata la linea dei nodi, si ha  $\psi + \phi = \hat{\xi}x$ , e quest'angolo basta a individuare univocamente la terna  $Oxyz$  rispetto alla terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$ .

Chiudiamo questo paragrafo sottolineando che gli angoli di Eulero di un sistema rigido in moto rispetto ad una terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$  sono funzioni determinate del tempo e fino a che il moto è continuo queste funzioni sono funzioni continue.

Possono sorgere difficoltà legate alla continuità del moto come conseguenza delle limitazioni (IV.49). Infatti, può capitare che per rispettare tali limitazioni occorra far saltare bruscamente qualcuno degli angoli di Eulero da un valore estremo all'altro senza che ciò corrisponda a una discontinuità nel moto. Per evitare tali discontinuità artificiali si può rilassare qualcuna delle limitazioni espresse dalle (IV.49): in questo modo si perde però la biunivocità nella

corrispondenza fra i punti dello spazio e terne di valori  $\theta, \psi, \phi$  degli angoli di Eulero.

## 7.2 Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero

Ci occupiamo di trovare le formule che esprimono i coseni direttori  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  dei versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  in funzione degli angoli di Eulero  $\theta, \psi, \phi$ . A tal fine osserviamo che la terna mobile  $\Omega xyz$  a cui competono tre assegnati angoli di Eulero  $\theta, \psi$  e  $\phi$  si ottiene a partire dalla terna fissa  $\Omega \xi \eta \zeta$  eseguendo tre successive rotazioni destre rispetto al rispettivo asse orientato di rotazione. Le rotazioni da eseguire sono le seguenti:

1. La prima rotazione è una rotazione di angolo  $\psi$  intorno all'asse  $\zeta$ . In questo modo si ottiene la terna  $\Omega \xi_1 \eta_1 \zeta$  essendo l'asse  $\xi_1$  proprio la linea dei nodi. In base a (IV.16) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 \cos \psi - \eta_1 \sin \psi, \\ \eta = \xi_1 \sin \psi + \eta_1 \cos \psi, \\ \zeta = \zeta. \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

2. La seconda rotazione è una rotazione di angolo  $\theta$  intorno alla linea dei nodi. In questo modo si ottiene la terna  $\Omega \xi_1 y_1 z$  essendo l'asse  $y_1$  la retta del piano  $\zeta z$  tale che  $y_1 \hat{z} = \frac{\pi}{2}$  e  $\eta_1 \hat{y}_1 = \theta$ . Usando le (IV.16) possiamo scrivere le equazioni di tale rotazione:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1, \\ \eta_1 = y_1 \cos \theta - z \sin \theta, \\ \zeta = y_1 \sin \theta + z \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix}.$$

3. L'ultima rotazione è una rotazione di angolo  $\phi$  intorno all'asse  $z$  che porta la linea dei nodi a sovrapporsi all'asse  $x$  (e l'asse  $y_1$  su  $y$ ). In questo modo si ottiene la terna  $\Omega xyz$ . Sfruttando le (IV.16) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} \xi_1 = x \cos \phi - y \sin \phi, \\ y_1 = x \sin \phi + y \cos \phi, \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{IV.52})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le (IV.51) e (IV.52) nelle (IV.50) e svolgendo semplici prodotti matriciali si trova:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.53})$$

dove  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  sono i coseni direttori le cui espressioni sono legate agli angoli di Eulero dalla seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi, \\ \alpha_2 = -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi, \\ \alpha_3 = \sin \theta \sin \psi, \\ \beta_1 = \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi, \\ \beta_2 = -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi, \\ \beta_3 = -\sin \theta \cos \psi, \\ \gamma_1 = \sin \phi \sin \theta, \\ \gamma_2 = \cos \phi \sin \theta, \\ \gamma_3 = \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

### 7.3 Espressione della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero

Ci proponiamo di trovare l'espressione della velocità angolare  $\vec{\omega}$  nel moto rigido istantaneo corrispondente al passaggio dalla posizione individuata dagli angoli di Eulero  $\theta, \psi, \phi$  a quella individuata dagli angoli  $\theta + d\theta, \psi + d\psi, \phi + d\phi$ . Dalla definizione degli angoli di Eulero sappiamo che l'incremento  $d\theta$  dell'angolo di nutazione  $\theta$  corrisponde ad una rotazione elementare di angolo  $d\theta$  intorno alla



linea dei nodi. Analogamente gli incrementi  $d\phi$  e  $d\psi$  di  $\phi$  e  $\psi$  equivalgono a due rotazioni attorno agli assi  $z$  e  $\zeta$  rispettivamente. Quindi la velocità angolare  $\vec{\omega}$  si otterrà nel seguente modo:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{N} + \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\psi}\vec{x}, \quad (\text{IV.55})$$

dove  $\vec{N}, \vec{k}, \vec{x}$  sono i versori rispettivamente della linea dei nodi, dell'asse  $z$  e dell'asse  $\zeta$ .

Per ottenere le componenti di  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna mobile e a quella fissa in funzione degli angoli di Eulero occorre quindi trovare le componenti dei versori  $\vec{N}, \vec{k}, \vec{x}$  rispetto ai sistemi di riferimento mobile  $Oxyz$  e fisso  $\Omega\xi\eta\zeta$ . A tale scopo, iniziamo a scrivere la (IV.53) in forma matriciale nella forma (IV.53), dove i coefficienti direttori  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  per  $i = 1, 2, 3$  sono i coseni direttori dati dalle (IV.54). Osserviamo che la matrice formata da tali coefficienti è ortogonale (cioè la sua trasposta coincide con l'inversa) e quindi si ha anche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.56})$$

Tenendo conto delle (IV.53) e (IV.56) è ora immediato trovare le componenti di  $\vec{k}, \vec{x}$  rispetto alla terna fissa e a quella mobile. Per quanto riguarda il versore  $\vec{k}$  le sue componenti rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  sono, in base alla (IV.56),  $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ , mentre rispetto al riferimento  $Oxyz$  tale vettore avrà componenti  $(0, 0, 1)$ . Invece il versore  $\vec{x}$  avrà componenti  $(0, 0, 1)$  rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  e, in base a (IV.53),  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  rispetto al riferimento mobile  $Oxyz$ . Per determinare le componenti di  $\vec{N}$  rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  basta osservare che, rispetto alla terna  $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$ , tale versore si può rappresentare mediante il vettore applicato in  $\Omega$  che ha l'estremo libero  $\xi_1 = 1$  e  $\eta_1 = \zeta = 0$ . Quindi sostituendo nelle (IV.50) i valori  $\xi_1 = 1$  e  $\eta_1 = \zeta = 0$ , si trovano le componenti rispetto alla terna fissa  $(\cos\psi, \sin\psi, 0)$ . Analogamente, potendosi rappresentare  $\vec{N}$  rispetto alla terna  $\Omega\xi_1y_1z$  mediante il vettore applicato in  $\Omega$  che ha l'estremo libero  $\xi_1 = 1$  e  $\eta_1 = \zeta = 0$ , sostituendo  $\xi_1 = 1$  e  $\eta_1 = \zeta = 0$  nella (IV.52) si ottengono le componenti di  $\vec{N}$  rispetto a  $Oxyz$  che sono  $(\cos\phi, -\sin\phi, 0)$ .

Utilizzando quanto sopra trovato nella (IV.55) e indicando con  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  i versori della terna mobile e con  $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$  i versori della terna fissa, si ottiene

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\gamma_1)\vec{i} + (-\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\gamma_2)\vec{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\gamma_3)\vec{k}, \quad (\text{IV.57})$$

perciò indicando con  $p, q$  e  $r$  le componenti di  $\omega$  rispetto alla terna mobile si ha

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\gamma_1, \\ q = -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\gamma_2, \\ r = \dot{\phi} + \dot{\psi}\gamma_3. \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

Procedendo analogamente si trova

$$\vec{\omega} = \left( \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \alpha_3 \right) \vec{e} + \left( -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \beta_3 \right) \vec{f} + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \gamma_3 \right) \vec{g}, \quad (\text{IV.59})$$

e denotando le componenti di  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna fissa con  $\pi, \xi, \rho$  abbiamo

$$\begin{cases} \pi = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \alpha_3, \\ \xi = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \beta_3, \\ \rho = \dot{\psi} + \dot{\phi} \gamma_3. \end{cases} \quad (\text{IV.60})$$

## 8 Esercizi

**ESERCIZIO 1:** Un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare

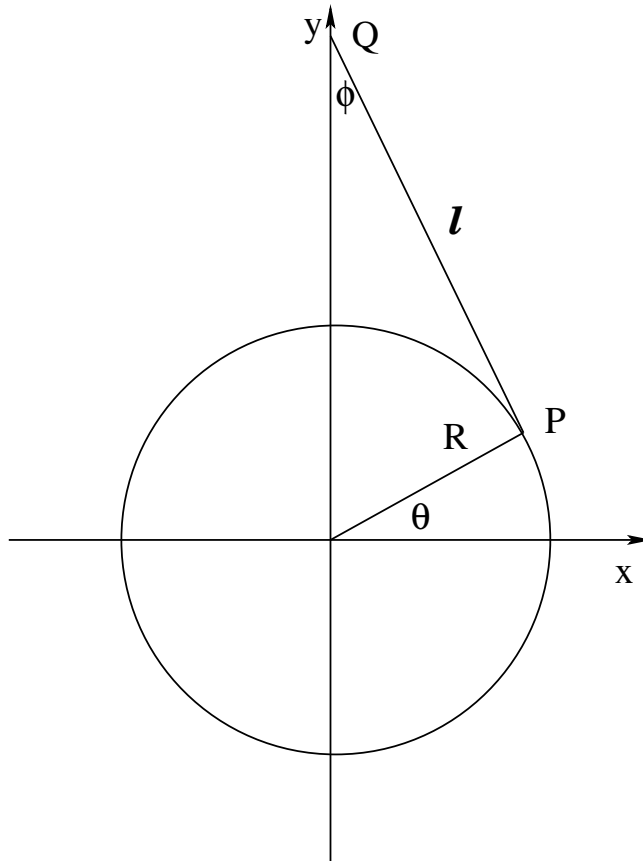
$$\vec{\omega} = \frac{1}{1+t^2} \vec{u},$$

essendo  $\vec{u}$  il versore dell'asse di rotazione.

- Calcolare la velocità e il suo modulo di un punto  $P$  situato a distanza  $d$  dell'asse di rotazione.
- Calcolare l'accelerazione e il suo modulo di un punto  $P$  situato a distanza  $d$  dell'asse di rotazione.

**ESERCIZIO 2:** Nel piano cartesiano  $Oxy$  si consideri l'asta  $PQ$  vincolata con l'estremo  $P$  a ruotare uniformemente sulla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R$  nel senso antiorario, e vincolata con l'estremo  $Q$  sul semiasse positivo delle  $y$ , essendo  $\ell$  ( $\ell > 2R$ ) la lunghezza dell'asta. Inizialmente (cioè, per  $t = 0$ ) il punto  $P$  si trova sul semiasse negativo delle  $y$ .

- Calcolare la velocità del punto  $P$ .
- Calcolare la velocità del punto  $Q$ .
- Calcolare la velocità angolare dell'asta, sapendo che il punto  $P$  si muove sulla circonferenza con velocità angolare  $\omega$ . Suggerimento: Usare la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi.
- Determinare la traiettoria del punto medio  $S$  dell'asta. Basta trovarla nella forma implicita  $F(x, y) = 0$  per un'opportuna funzione  $F$ .



**SOLUZIONE:** a) Sia  $\theta$  l'angolo polare tale che il punto  $P$  ha le coordinate cartesiane

$$x_P = R \cos \theta, \quad y_P = R \sin \theta,$$

dove  $\theta = -(\pi/2) + \omega t$ . Quindi la velocità del punto  $P$  è data dall'espressione  $\vec{v}_P = \dot{x}_P \vec{i} + \dot{y}_P \vec{j}$ , dove

$$\dot{x}_P = \omega R \cos(\omega t), \quad \dot{y}_P = \omega R \sin(\omega t).$$

b) Essendo  $\phi$  l'angolo tra l'asta e l'asse  $y$  tale che  $0 \leq \phi \leq \arctan(\frac{R}{\ell}) < \frac{\pi}{4}$ , abbiamo l'equazione

$$\ell \sin \phi = R \cos \theta = R \cos(-\frac{1}{2}\pi + \omega t) = R \sin(\omega t).$$

Calcolando la derivata rispetto a  $t$  otteniamo

$$\ell \dot{\phi} \cos \phi = \omega R \cos(\omega t),$$

dove  $\cos \phi > 0$  e quindi

$$\dot{\phi} = \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

Le coordinate del punto  $Q$  sono

$$x_Q = 0, \quad y_Q = R \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \omega t\right) + \ell \cos \phi = -R \cos(\omega t) + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$

Calcolando le derivate rispetto a  $t$  arriviamo alla velocità del punto  $Q$ , cioè  $\vec{v}_Q = \dot{y}_Q \vec{j}$ , dove

$$\dot{y}_Q = \omega R \sin(\omega t) - \frac{\omega R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

c) Abbiamo

$$\vec{v}_Q - \vec{v}_P = \vec{\omega}_0 \wedge (PQ),$$

dove  $\vec{\omega}_0$  è la velocità angolare dell'asta. In altre parole,

$$\begin{aligned} & -\omega R \cos(\omega t) \vec{i} - \frac{\omega R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \vec{j} = \\ & = \vec{\omega}_0 \wedge \left( -R \sin(\omega t) \vec{i} + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} \vec{j} \right). \end{aligned}$$

Siccome il moto dell'asta avviene nel piano  $Oxy$ , risulta  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$  per un'opportuna velocità angolare scalare  $\omega_0$ . Utilizzando  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$  e  $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ , otteniamo

$$\omega_0 = \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

Un altro modo per calcolare la velocità angolare  $\vec{\omega}_0$  si basa sulla seguente formula:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_0 &= \frac{(\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \wedge (P - Q)}{\ell^2} \\ &= \frac{1}{\ell^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega R \cos(\omega t) & -\frac{\omega R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} & 0 \\ R \sin(\omega t) & \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \vec{k}. \end{aligned}$$

d) Le coordinate del punto  $S$  a metà strada tra  $P$  e  $Q$  sono

$$x_S = \frac{1}{2} R \sin(\omega t), \quad y_S = -R \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$

Ora bisogna eliminare la variabile  $t$  dalle espressioni per  $x_S$  e  $y_S$  e arrivare ad un'equazione del tipo  $F(x_S, y_S) = 0$ . Il trucco è di sfruttare l'uguaglianza

$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$ . Infatti,

$$\sin(\omega t) = \frac{2x_S}{R},$$
$$\cos(\omega t) = \frac{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} - 2y_S}{2R} = \frac{\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S}{2R}.$$

Di conseguenza,

$$4[x_S]^2 + \left(\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S\right)^2 = 4R^2.$$



# Capitolo V

## Moti Relativi

Questo capitolo è organizzato nel seguente modo: in una prima sezione si studia il moto di un punto in moto rispetto a due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Nella seconda sezione si studia il moto di un sistema rigido in moto rispetto a due terne in moto l'una rispetto all'altra. Infine, nella terza sezione, i principi generali stabiliti sui moti relativi vengono sfruttati per studiare alcuni importanti esempi di moti rigidi (moti rigidi piani e moti di precessione).

### 1 Generalità

Consideriamo due terne trirettangole levogire  $\Omega\xi\eta\zeta$  e  $Oxyz$  l'una in moto rispetto all'altra. Convenzionalmente chiamiamo fissa la terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  e diciamo mobile la terna  $Oxyz$ . Sia  $P$  un punto mobile rispetto alle due terne. Nel passare dal riferimento fisso a quello mobile le grandezze cinematiche (per esempio la velocità e l'accelerazione) associate al punto  $P$  in generale cambiano. Si pone quindi il problema di trovare il legame fra tali grandezze qualora il moto di  $P$  sia osservato contemporaneamente da due osservatori (uno solidale alla terna fissa e l'altro solidale a quella mobile). Per risolvere tale problema premettiamo le seguenti definizioni: Si chiama **moto assoluto** il moto del punto  $P$  rispetto alla terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$ , **moto relativo** il moto del punto  $P$  rispetto alla terna mobile  $Oxyz$  e **moto di trascinamento** il moto rigido della terna mobile rispetto a quella fissa (cioè il moto dello spazio rigido solidale alla terna mobile rispetto alla terna fissa).

Indichiamo con  $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$  i versori degli assi della terna fissa e con  $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$  i versori degli assi della terna mobile. Siano inoltre  $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$  le coordinate del punto  $P$  rispetto alla terna fissa mentre  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  individuino  $P$  rispetto alla terna mobile. La dipendenza dal tempo delle coordinate di  $P$  è giustificata dal fatto che esso è in moto rispetto ad entrambe le terne.

Supponiamo che siano date le equazioni del moto relativo di  $P$

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), \quad (\text{V.1})$$

e che sia assegnato il moto di trascinamento della terna mobile rispetto a quella fissa tramite le funzioni  $O(t), \vec{j}_1(t), \vec{j}_2(t), \vec{j}_3(t)$ . L'equazione del moto assoluto di

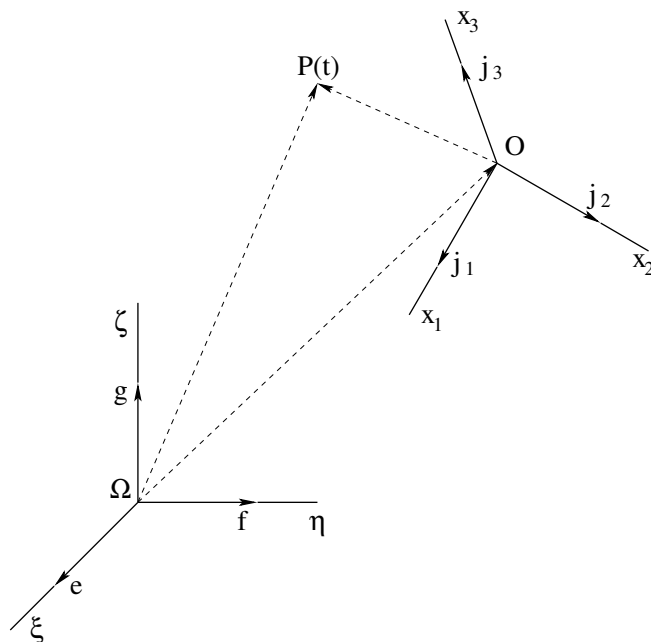


Figura V.1: Moto del punto  $P$  rispetto a due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro.

$P$  in forma vettoriale è

$$P = O + x_1 \vec{j}_1 + x_2 \vec{j}_2 + x_3 \vec{j}_3, \quad (\text{V.2})$$

dove  $x_1, x_2, x_3$  sono date dalle (V.1). Le equazioni (V.2) differiscono dalle (IV.1) perchè le coordinate di  $P$  non sono costanti rispetto alla base  $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ . Proiettando le (V.2) lungo gli assi della terna fissa si ottengono le equazioni del moto assoluto di  $P$

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad (\text{V.3a})$$

$$\eta = \beta + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \quad (\text{V.3b})$$

$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3, \quad (\text{V.3c})$$

essendo  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) i coseni direttori di  $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$  introdotti in (IV.2). Le (V.3) sono molto simili alle (IV.3) ma, rispetto ad esse,  $x_1, x_2, x_3$  dipendono



dal tempo (essendo date dalle (V.1)). Quindi, se sono noti il moto relativo di  $P$  e quello di trascinamento, è possibile scrivere esplicitamente le equazioni del moto assoluto di  $P$ . Viceversa, assegnati il moto assoluto e quello di trascinamento, invertendo le (V.3) si possono scrivere esplicitamente le equazioni del moto relativo di  $P$ .

## 1.1 Legge di composizione delle velocità e teorema di Coriolis

Denotiamo la velocità e l'accelerazione del punto  $P$  rispetto alla terna fissa rispettivamente con  $\vec{v}^{(a)}$  e  $\vec{a}^{(a)}$  (il pedice  $a$  sta per "assoluto"), mentre la velocità e l'accelerazione del punto  $P$  rispetto alla terna mobile si denoteranno con  $\vec{v}^{(r)}$  e  $\vec{a}^{(r)}$  (qui il pedice  $r$  sta per "relativo"). Infine denoteremo con  $\vec{v}^{(t)}$  e  $\vec{a}^{(t)}$  la velocità e l'accelerazione di trascinamento. Per velocità di trascinamento si intende la velocità di quel punto dello spazio rigido solidale alla terna mobile che, nell'istante considerato, è sovrapposto al punto  $P$ . In maniera analoga si definisce l'accelerazione di trascinamento.

Per stabilire il legame fra velocità assoluta, relativa e di trascinamento deriviamo la (V.2) rispetto al tempo e otteniamo

$$\frac{d(P - \Omega)}{dt} = \frac{d(O - \Omega)}{dt} + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{j}_i + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}. \quad (\text{V.4})$$

Se consideriamo il quadrinomio  $\frac{dO}{dt} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}$  si osserva subito che esso fornisce, istante per istante, la velocità del punto dello spazio rigido solidale alla terna mobile in moto di trascinamento rispetto alla terna fissa. Infatti, se, a partire da un certo istante  $t = t^*$ , il punto  $P$  si arrestasse nel suo moto rispetto alla terna  $Oxyz$  la (V.4) darebbe (a partire dall'istante  $t = t^*$ ) la velocità di un punto le cui componenti sono costanti rispetto alla terna mobile (e quindi tale punto appartiene allo spazio rigido solidale alla terna  $Oxyz$ ). Perciò possiamo porre

$$\vec{v}^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dO}{dt} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}, \quad (\text{V.5})$$

mentre, per definizione di velocità relativa si ha

$$\vec{v}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{j}_i. \quad (\text{V.6})$$

Quindi la (V.4) si può riscrivere come

$$\vec{v}^{(a)} = \vec{v}^{(r)} + \vec{v}^{(t)}. \quad (\text{V.7})$$

L'equazione (V.7) costituisce il **principio dei moti relativi** che asserisce che *ad ogni istante la velocità assoluta di un punto è la risultante della sua velocità relativa e della sua velocità di trascinamento.*

Per stabilire il legame fra accelerazione assoluta, relativa e di trascinamento, iniziamo con il derivare la (V.4)

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{j}_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2}. \quad (\text{V.8})$$

Introducendo la cosiddetta **accelerazione complementare** (o *accelerazione centrifuga composta*) come

$$\vec{a}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}, \quad (\text{V.9})$$

e poichè, per definizione di accelerazione di trascinamento e relativa, si ha

$$\vec{a}^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2}, \quad \vec{a}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{j}_i, \quad (\text{V.10})$$

possiamo scrivere la (V.8) nel seguente modo

$$\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)} + \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(c)}. \quad (\text{V.11})$$

Quest'ultima equazione esprime il teorema di Coriolis: *ad ogni istante l'accelerazione assoluta è la somma vettoriale delle accelerazioni di trascinamento, relativa e complementare.*

L'accelerazione complementare si può scrivere in un modo più significativo se si tiene conto delle formule di Poisson e della definizione di velocità relativa (cioè della (V.6)). Infatti, si trova subito:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(c)} &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{j}_i = 2 \sum_{i=1}^3 \vec{\omega}^{(t)} \wedge \dot{x}_i \vec{j}_i \\ &= 2 \vec{\omega}^{(t)} \wedge \left( \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{j}_i \right) = 2 \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)}, \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

essendo  $\vec{\omega}^{(t)}$  la velocità angolare della terna mobile rispetto a quella fissa (*velocità angolare di trascinamento*).

Il teorema di Coriolis mette in evidenza come le accelerazioni di un medesimo punto misurate in due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro, siano in generale diverse. Sorge allora spontanea la curiosità di individuare rispetto a quali classi di sistemi di riferimento l'accelerazione rimanga invariata. A tale interrogativo risponde il seguente teorema:

**Teorema V.1** *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'accelerazione sia invariante nel passaggio da un riferimento in moto rispetto ad un altro è che tale riferimento si muova di moto traslatorio e uniforme rispetto al primo.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che il moto della terna mobile sia traslatorio uniforme. In tal caso si ha

$$\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}, \quad \frac{d^2 O}{dt^2} = \vec{0}.$$

Quindi, per la (V.10) e la (V.12), l'accelerazione di trascinamento e quella complementare si annullano e la (V.11) fornisce  $\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)}$ .

Viceversa supponiamo che si abbia  $\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)}$  per ogni moto di  $P$ . Per la (V.11) deve quindi aversi

$$\vec{0} = \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(c)} = \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2} + 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)}. \quad (\text{V.13})$$

Si osservi che la velocità di trascinamento dipende solo dalla posizione del punto  $P$  e non dal moto relativo di  $P$ , perciò  $\vec{a}^{(t)}$  e  $\vec{a}^{(c)}$  sono ambedue (separatamente) nulle, cioè:

$$\begin{cases} \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2} = \vec{0}, \\ \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)} = \vec{0}. \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

La seconda di queste due equazioni deve essere soddisfatta per ogni moto di  $P$ , ovvero per qualunque valore di  $\vec{v}^{(r)}$  e, conseguentemente, essa è equivalente alla condizione  $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$ . Quindi il moto è traslatorio. Inoltre, tenendo conto delle formule di Poisson e della formula fondamentale dei corpi rigidi (eq. (IV.40)), possiamo riscrivere l'espressione dell'accelerazione di trascinamento nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(t)} &= \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2} = \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{j}_i)}{dt} \\ &= \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{d(\vec{\omega}^{(t)} \wedge (P - O))}{dt} \end{aligned}$$

$$= \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \left( \dot{\vec{\omega}}^{(t)} \wedge (P - O) \right) + \sum_{i=1}^3 \left( \vec{\omega}^{(t)} \wedge \frac{d}{dt}(P - O) \right). \quad (\text{V.15})$$

Se ora si tiene conto della prima delle (V.15) e che  $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$ , si trova

$$\vec{a}^{(t)} = \frac{d^2 O}{dt^2} = \vec{0}, \quad (\text{V.16})$$

e questo assicura che il moto della terma mobile rispetto alla terma fissa oltre che traslatorio è anche uniforme.  $\square$

## 2 Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili

Nella sezione precedente abbiamo studiato il moto di un singolo punto in moto rispetto a due sistemi di riferimento in moto reciproco. Consideriamo lo stesso problema qualora anzichè un singolo punto, si ponga l'attenzione su un sistema rigido  $S$  in moto rispetto a due terne in moto l'una rispetto all'altra. Ciò che interessa è determinare il legame fra le caratteristiche cinematiche del moto di  $S$  ad un fissato istante  $t$  rispetto ai due sistemi di riferimento. Anche in questo caso indichiamo con  $\Omega\xi\eta\zeta$  la terma fissa e con  $Oxyz$  la terma mobile. In base a quanto esposto nel capitolo dedicato ai moti rigidi, per poter individuare l'atto di moto del sistema  $S$  (in un fissato istante  $t$ ) basta conoscere i due vettori caratteristici  $\vec{v}_Q$  e  $\vec{\omega}$  che rappresentano, rispettivamente, la velocità di un punto  $Q$ , comunque prefissato e solidale ad  $S$ , e la velocità angolare di  $S$ . Poichè nella sezione precedente abbiamo imparato (tramite il teorema dei moti relativi) a esplicitare il legame tra le velocità di un qualunque punto di  $S$  rispetto ai due riferimenti in moto reciproco, rimane solo da trovare il legame fra le velocità angolari. A tal fine indichiamo con  $\vec{\omega}^{(a)}$  e  $\vec{\omega}^{(r)}$  rispettivamente le velocità angolari di  $S$  rispetto al riferimento fisso e rispetto al riferimento mobile, mentre si è già introdotta la velocità angolare di trascinamento  $\vec{\omega}^{(t)}$  come la velocità angolare del moto rigido della terma  $Oxyz$  rispetto alla terma fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$ .

Quindi se  $P$  è un punto di  $S$  e  $Q$  è un prefissato punto solidale a  $S$  (cioè dello spazio rigido solidale a  $S$ ), allora rispetto alla terma fissa si avrà

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_Q^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \wedge (P - Q), \quad (\text{V.17})$$

mentre rispetto alla terma mobile si ha

$$\vec{v}_P^{(r)} = \vec{v}_Q^{(r)} + \vec{\omega}^{(r)} \wedge (P - Q). \quad (\text{V.18})$$

Inoltre, se si considerano i punti dello spazio rigido solidale alla terna mobile che nell'istante considerato sono sovrapposti a  $P$  e  $Q$ , le velocità di trascinamento di questi soddisfano ancora alla (IV.40) e pertanto si ha:

$$\vec{v}_P^{(t)} = \vec{v}_Q^{(t)} + \vec{\omega}^{(t)} \wedge (P - Q). \quad (\text{V.19})$$

Teniamo ora presente che il teorema di moti relativi richiede che  $\vec{v}^{(a)} = \vec{v}^{(r)} + \vec{v}^{(t)}$  e, se sommiamo membro a membro la (IV.40) e la (IV.41), perveniamo alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \vec{v}_P^{(a)} &= \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)} = \left( \vec{v}_Q^{(r)} + \vec{v}_Q^{(t)} \right) + (\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}) \wedge (P - Q) \\ &= \vec{v}_Q^{(a)} + (\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}) \wedge (P - Q), \end{aligned}$$

cioè

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_Q^{(a)} + (\vec{\omega}^{(t)} + \vec{\omega}^{(r)}) \wedge (P - Q). \quad (\text{V.20})$$

Confrontando la (V.20) con la (V.17) si ottiene

$$\vec{\omega}^{(a)} \wedge (P - Q) = (\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}) \wedge (P - Q),$$

e poichè tale relazione deve valere qualunque siano i punti  $P$  e  $Q$  che si scelgono, essa conduce alla seguente importante equazione

$$\vec{\omega}^{(a)} = \vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}. \quad (\text{V.21})$$

Questa equazione rappresenta l'analogo per le velocità angolari dell'equazione (V.7). La (V.20) afferma che: *In un moto rigido qualunque la velocità angolare assoluta è, istante per istante, uguale alla somma vettoriale delle velocità angolari relativa e di trascinamento.*

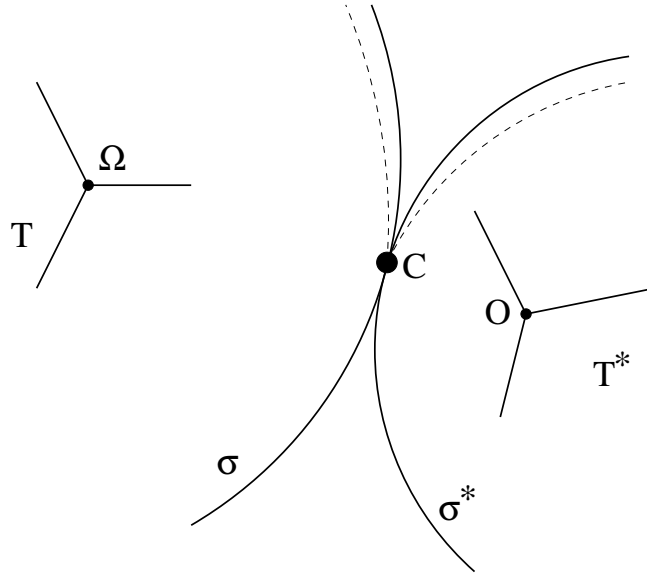
Si verifica facilmente che la velocità angolare rimane invariata nel passaggio da un riferimento in moto rispetto ad un altro solo se il moto del riferimento mobile è traslatorio (cioè se  $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$ .)

### 3 Applicazioni ai moti rigidi

In questa sezione discutiamo tre importanti applicazioni della teoria dei moti relativi ai moti rigidi: il rotolamento di due superfici rigide, i moti rigidi piani e i moti di precessione.

### 3.1 Rotolamento di due superfici rigide

Siano  $\sigma^*$  e  $\sigma$  due superfici rigide delle quali la prima è fissa mentre la seconda si muove mantenendo sempre il contatto con la prima almeno in un punto  $C$  (naturalmente, si suppongono soddisfatte tutte le condizioni di regolarità necessarie, in particolare, l'esistenza del piano tangente comune alle due superfici dove questi piani hanno punti in comune). Il moto di  $\sigma$  rispetto a  $\sigma^*$  si dice *moto di rotolamento*. Sia  $C$  uno qualunque dei punti di contatto (potrebbe anche essere l'unico, come accade se  $\sigma^*$  e  $\sigma$  sono due superfici sferiche). Esso varia generalmente sia su  $\sigma^*$  che su  $\sigma$ , descrivendo due curve. La velocità di quel punto



di  $\sigma$  che nell'istante considerato si trova sovrapposto a  $C$  si chiama *velocità di strisciamento* in  $C$ . Evidentemente, essa risulta parallela al piano tangente in  $C$  alle due superfici. Infatti, se  $T^*$  e  $T$  sono due terne rispettivamente solidali a  $\sigma^*$  e  $\sigma$ , la  $T^*$  si può considerare come una terna fissa, la  $T$  come una terna mobile e interpretare il moto di  $C$  su  $\sigma^*$  come moto assoluto, quello su  $\sigma$  come moto relativo. Il moto di trascinamento è il moto di rotolamento di  $\sigma$  su  $\sigma^*$  e, pertanto, la velocità di strisciamento esprime proprio la velocità di trascinamento. Dette  $\vec{v}_a^{(C)}$ ,  $\vec{v}_r^{(C)}$  e  $\vec{v}_\tau^{(C)}$  le velocità assoluta, relativa e di trascinamento di  $C$ , il principio dei moti relativi dà

$$\vec{v}_a^{(C)} = \vec{v}_r^{(C)} + \vec{v}_\tau^{(C)}. \quad (\text{V.22})$$

I vettori  $\vec{v}_a^{(C)}$ ,  $\vec{v}_r^{(C)}$ , esprimendo velocità di punti che si muovono su  $\sigma^*$  e su  $\sigma$  rispettivamente, sono paralleli al piano tangente comune alle due superfici. La (V.22) dimostra, pertanto, che anche il vettore  $\vec{v}_\tau^{(C)}$  è ad esso parallelo.

Il moto di  $\sigma$  su  $\sigma^*$  si dice di *puro rotolamento* se la velocità di strisciamento è nulla in ogni punto  $C$ . In tal caso si dice che  $\sigma$  rotola senza strisciare su  $\sigma^*$ .

Dato l'annularsi di  $\vec{v}_\tau^{(C)}$ , è chiaro, in base alla (V.22), che in un moto di puro rotolamento le due traiettorie descritte da  $C$  su  $\sigma^*$  e su  $\sigma$  hanno la medesima tangente in  $C$  e vengono da  $C$  percorse con uguali velocità. Inoltre, risultando nulla la velocità del punto solidale a  $\sigma$  sovrapposto a  $C$ , l'atto di moto rigido cui è soggetto  $\sigma$  è ad ogni istante un atto di moto rotatorio intorno a un asse passante per  $C$ .

### 3.2 Moti di precessione

Consideriamo un sistema rigido  $S$  avente un punto solidale  $O = \Omega$  all'origine comune alla terna fissa  $T^*$  e alla terna solidale  $T$  avente costantemente la velocità nulla. In tal caso la velocità  $\vec{v}_P$  di un qualsiasi punto solidale  $P$  diviene

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - \Omega). \quad (\text{V.23})$$

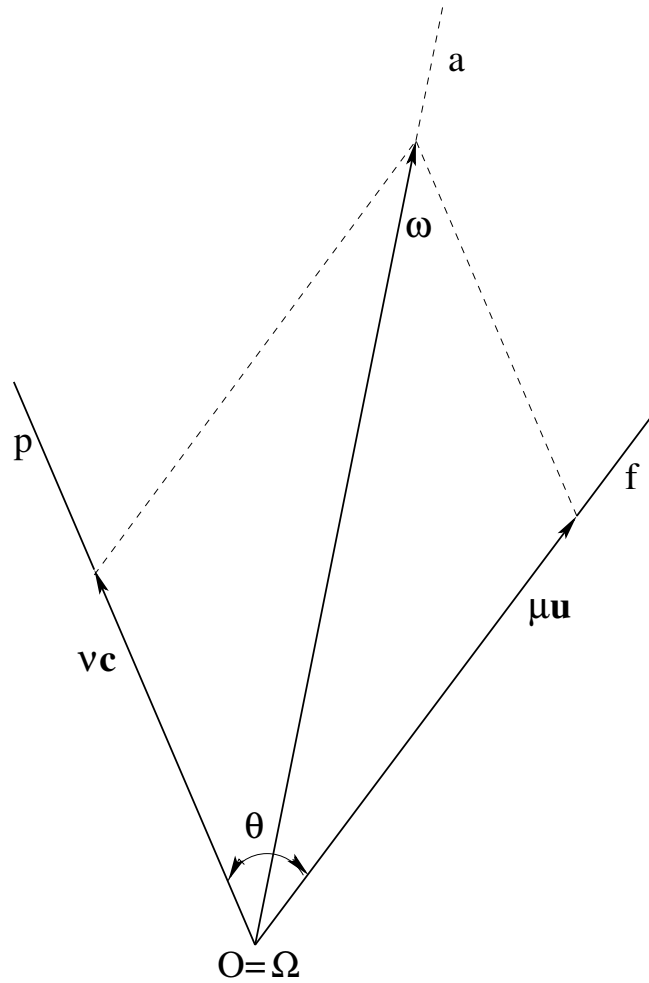
Ad ogni istante sia  $a$  la retta uscente da  $\Omega$  e parallela ad  $\vec{\omega}$  (supposto non nullo). Tale retta è, in generale, variabile sia nello spazio (cioè, rispetto alla terna fissa  $T^*$ ), sia nel sistema mobile (cioè, rispetto alla terna solidale  $T$ ). Passando la  $a$  sempre per il punto fisso  $O$ , essa descriverà due coni, uno nello spazio ambiente, l'altro nello spazio mobile. Tali coni si chiamano *coni di Poinsot*. Se si considera un qualunque punto  $P$  della retta del sistema rigido  $S$  a cui in ogni determinato istante la  $a$  è sovrapposta, la velocità di  $P$  risulta nulla. Infatti, in tal caso  $P - \Omega$  risulta parallelo ad  $\vec{\omega}$  e quindi  $\vec{v}_P = \vec{0}$  (vedi la (V.23)). Dunque abbiamo dimostrato l'esistenza di una retta  $a$ , il cosiddetto *asse di moto*, tale che ogni punto di  $a$  appartenente allo spazio mobile ha velocità nulla. In generale, la retta  $a$  non è solidale allo spazio mobile.<sup>1</sup>

Particolare interesse tra i moti rigidi con un punto fisso rivestono i *moti di precessione*. In tal caso una retta,  $f$ , uscente da  $O$  e solidale al sistema mobile forma un angolo invariabile,  $\theta$ , con una retta,  $p$ , anch'essa uscente da  $O$  ma fissa nello spazio ambiente. La retta  $f$  si chiama *asse di figura*, la retta  $p$  *asse di precessione*, il punto  $O$  *polo della precessione*. La velocità angolare,  $\vec{\omega}$ , risulta somma di due vettori, uno di direzione invariabile nel sistema mobile, l'altro di direzione invariabile nello spazio ambiente. Tale proprietà si esprime con la relazione

$$\vec{\omega} = \mu \vec{u} + \nu \vec{c}, \quad (\text{V.24})$$

dove  $\vec{u}$  è un versore solidale al sistema mobile (versore di  $f$ ) e  $\vec{c}$  è un versore invariabile nello spazio ambiente (versore di  $p$ , supposto non parallelo a  $\vec{u}$ ). Le quantità  $\mu$  e  $\nu$  si chiamano rispettivamente *velocità di rotazione propria* e *velocità di precessione*. Risultano le seguenti due identità:

<sup>1</sup>Se lo fosse, il moto sarebbe rotatorio.



$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \cos \theta = \text{costante}, \quad (\text{V.25a})$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = \vec{c} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{c} \cdot \vec{u}) - \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{u} = 0. \quad (\text{V.25b})$$

Di conseguenza, la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è parallela al piano dei vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{c}$ . L'annularsi di una delle velocità  $\mu, \nu$ , riduce il moto a un moto rotatorio.

Il moto di precessione si dice *precessione regolare* se ambedue le velocità  $\mu, \nu$ , sono delle costanti. In tal caso, la (V.24) evidenzia come  $\vec{\omega}$  sia la somma di due vettori, uno costante nel sistema mobile, l'altro nello spazio ambiente. Poichè in tal caso gli angoli che la retta,  $a$ , uscente da  $O$  e parallela ad  $\vec{\omega}$ , forma con  $f$  e  $p$  sono costanti, si deduce che i due coni di Poinsot sono rotondi.

L'esempio più noto di questo tipo di moto rigido è la precessione dell'asse della Terra. In tal caso, sotto l'ipotesi che la Terra abbia la forma di una sfera, l'origine  $O$  coincide con il centro della Terra, l'asse di precessione  $p$  è la retta che attualmente passa per i due poli nord e sud, e  $\theta \simeq 23,5^\circ$ . In prima



approssimazione, la precessione è regolare: il periodo di rotazione propria è 24 ore incirca, mentre il periodo di precessione vale 26.000 anni.

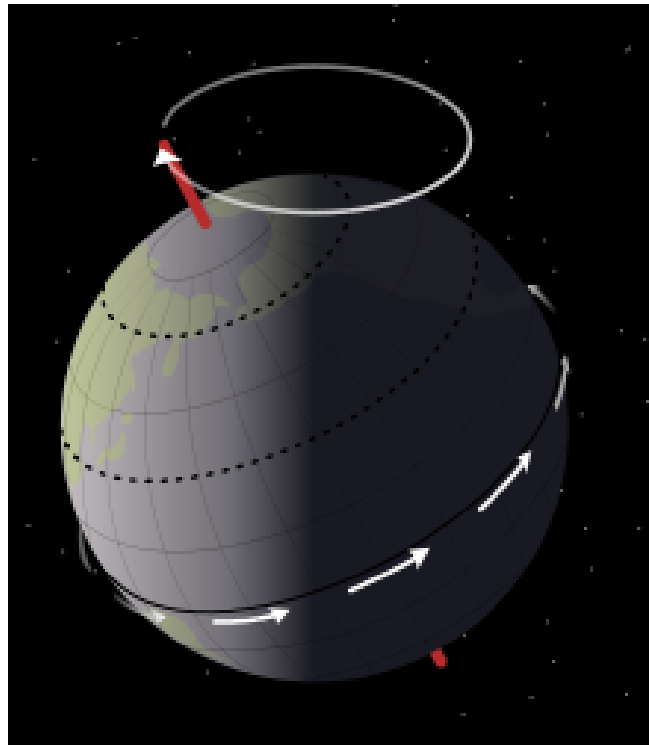


Figura V.2: La precessione dell'asse della Terra. Vedi Wikipedia.

Ritorniamo ora a discutere i coni di Poincaré, dimostrando che il cono mobile,  $\sigma$ , rotola senza strisciare sul cono fisso,  $\sigma^*$ . Sia, infatti,  $\lambda^*$  una qualunque curva tracciata su  $\sigma^*$  e che abbia un'intersezione semplice con ogni generatrice e sia  $C$  l'intersezione di  $\lambda^*$  con la generatrice che nell'istante considerato costituisce l'asse di moto. Durante il moto il punto  $C$  descrive su  $\sigma$  una curva  $\lambda$  ben determinata. Interpretando il moto di  $C$  su  $\sigma^*$  con traiettoria  $\lambda^*$  come moto assoluto e quello su  $\sigma$  con traiettoria  $\lambda$  come moto relativo, il moto di trascinamento è il moto di  $\sigma$  (cioè, il moto del sistema rigido). Ne segue che la velocità di trascinamento di  $C$  è nulla, appartenendo tale punto all'asse di moto in un atto di moto rotatorio.

Per il principio dei moti relativi, si ha, pertanto,

$$\vec{v}_a^{(C)} = \vec{v}_r^{(C)}. \quad (\text{V.26})$$

Dalla (V.26) risulta che  $\lambda^*$  e  $\lambda$  hanno la medesima tangente e ciò, essendo quella tangente distinta dalla generatrice comune ai due coni, implica che i due coni abbiano in comune il piano tangente. Inoltre, la velocità di trascinamento nel

moto di  $\sigma$  su  $\sigma^*$  è, evidentemente, nulla. Si tratta, pertanto, di un moto di puro rotolamento.

### 3.3 Moti rigidi piani

Un moto rigido si dice *piano* se è possibile trovare un piano  $\pi$  solidale al corpo che, durante il moto, si mantiene parallelo ed equidistante ad un piano  $\pi'$  solidale all'osservatore. Lo studio del moto rigido piano è riconducibile ad un problema in due dimensioni, ovvero allo studio del moto di una figura rigida piana nel suo piano. Infatti è immediato verificare che tutti i punti di una retta ortogonale al piano  $\pi$  hanno la stessa velocità. Quindi la velocità di ogni punto del corpo è conosciuto se si conosce la velocità della sua proiezione sul piano  $\pi$ , ovvero la velocità della sezione del corpo con il piano  $\pi$ .

Considerato un punto qualunque  $P$  del corpo distinto dalla sua proiezione  $P'$  sul piano  $\pi'$ , affinché il moto sia rigido piano, il vettore  $PP'$  deve risultare costante. Infatti si può scrivere:

$$PP' = \|PP'\|\vec{u}, \quad (\text{V.27})$$

dove  $\vec{u}$  è il versore normale al piano  $\pi$ , concorde con  $PP'$ . Allora derivando rispetto al tempo abbiamo:

$$\frac{d(PP')}{dt} = \frac{d\|PP'\|}{dt}\vec{u} + \|PP'\|\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Ma  $(d\|PP'\|/dt) = 0$  per la condizione di rigidità e quindi  $(d\vec{u}/dt) = \vec{0}$ . Quest'ultimo segue anche direttamente dal fatto che il piano  $\pi$  si mantiene sempre parallelo a se stesso durante il moto e quindi il versore  $\vec{u}$  ad esso normale è costante. Di conseguenza:

$$\frac{d(PP')}{dt} = \frac{dP'}{dt} - \frac{dP}{dt} = \vec{0},$$

oppure:

$$\vec{v}_{P'} = \vec{v}_P, \quad (\text{V.28})$$

qualunque sia il punto  $P'$  appartenente alla retta passante per  $P$  e normale al piano  $\pi$ . Dunque il moto della sezione del corpo con il piano  $\pi$  determina completamente il moto del corpo.

Dalla legge di distribuzione delle velocità (IV.40) e dalla (V.28) otteniamo le seguenti informazioni sulla velocità angolare:

$$\vec{\omega} \wedge PP' = \vec{0}. \quad (\text{V.29})$$

Essendo per ipotesi  $P \neq P'$ , per la velocità angolare nel moto rigido piano rimangono le due seguenti possibilità:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$  nel qual caso l'atto di moto risulta traslatorio;
- $\vec{\omega}$  è parallelo a  $PP'$ , cioè  $\vec{\omega}$  è parallelo al versore  $\vec{u}$  al piano  $\pi$ . In questo caso l'asse di Mozzi esiste ed è normale al piano  $\pi$ . Ricordiamo che la velocità di ogni punto dell'asse di Mozzi è parallela a  $\vec{u}$ .

Non abbiamo ancora utilizzato l'informazione relativa all'invariabilità della distanza fra i piani paralleli  $\pi$  e  $\pi'$ : questa comporta che la componente della velocità normale a questi piani deve essere nulla. Infatti considerando un punto  $A$  appartenente alla sezione del corpo con il piano  $\pi$  e la sua proiezione  $A'$  sul piano  $\pi'$ , la distanza tra i due piani si può esprimere come:

$$h = \vec{u} \cdot A'A. \quad (\text{V.30})$$

La sua invariabilità equivale a richiedere

$$\frac{dh}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{v}_A = \tau = 0 \quad (\text{V.31})$$

dal momento che la componente della velocità di  $A'$  lungo  $\vec{u}$  è necessariamente nulla, essendo  $A'$ , per definizione, un punto del piano fisso  $\pi'$ . Ora la (V.31) ci informa che la velocità dei punti del corpo o sono nulle o sono parallele al piano  $\pi$ , in quanto risultano ortogonali al versore normale a  $\pi$ . Questo significa anche che le velocità dei punti della sezione del corpo con il piano  $\pi$  costituiscono un sistema di vettori piani il cui piano è  $\pi$  e quindi la sezione piana si muove nel suo piano, senza mai uscire da esso.

Si conclude allora, che in un moto rigido piano l'atto di moto o è traslatorio, e allora tutti i piani hanno velocità uguali e parallele al piano  $\pi$ , oppure è rotatorio con le velocità dei punti sempre parallele al piano  $\pi$ . Il piano  $\pi$  si dice allora *piano del moto*. In questo caso il vettore velocità angolare è sempre normale al piano del moto.

Esaminiamo ora il caso in cui  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ; allora l'atto di moto è rotatorio e l'asse di Mozzi è un *asse di istantanea rotazione*, essendo una retta i cui punti hanno velocità nulla, ed è ortogonale al piano del moto. Definiamo ora *centro di istantanea rotazione* il punto di intersezione dell'asse di istantanea rotazione con il piano di moto. In un atto di moto rigido piano, in cui l'atto di moto è rotatorio, il centro di istantanea rotazione, è quel punto della sezione del corpo che, nell'istante considerato, ha velocità nulla. La velocità di un qualsiasi punto  $P$  del corpo è data da:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge CP, \quad (\text{V.32})$$

essendo  $C$  il centro di istantanea rotazione.

Per definizione di centro di istantanea rotazione si ha  $\vec{v}_C = \vec{0}$ , mentre il teorema di Poisson implica che

$$\vec{v}_C = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge \Omega C.$$

Quindi

$$\vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge \Omega C = \vec{0}, \quad (\text{V.33})$$

essendo  $\Omega$  un punto qualunque del corpo, scelto come origine di un sistema di assi solidali nel piano del moto. Moltiplicando vettorialmente per  $\vec{\omega}$  a sinistra la (V.33) riusciamo ad isolare  $\Omega C$ :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \omega \wedge \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \Omega C) \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega + (\vec{\omega} \cdot \Omega C)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\Omega C \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega - \omega^2 \Omega C, \end{aligned}$$

essendo  $\vec{\omega} \cdot \Omega C = \vec{0}$ . Essendo l'atto di moto rotatorio, cioè  $\omega \neq 0$ , otteniamo

$$\Omega C = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega}{\omega^2}. \quad (\text{V.34})$$

# Capitolo VI

## Vincoli

In questo capitolo vengono introdotti alcuni dei concetti più importanti per lo sviluppo della Meccanica, e cioè quelli di *vincolo*, *coordinate lagrangiane* e *grado di libertà*.

### 1 Vincoli e loro classificazione

Nello studio della Meccanica molto spesso ci si imbatte in sistemi materiali (continui e discreti) vincolati, cioè il cui movimento è ostacolato. Per vincolo si intende ogni dispositivo che limita la libertà di movimento dei punti di un sistema.

Ci soffermiamo sulla rappresentazione analitica dei vincoli, cioè sulla loro descrizione mediante opportune equazioni e/o disequazioni. Infatti una prima classificazione dei vincoli viene fatta tenendo conto della natura delle equazioni che li rappresentano.

Per prima cosa occorre distinguere fra vincoli *di posizione* e vincoli di *mobilità*. I vincoli sono detti di posizione se le equazioni che li rappresentano coinvolgono le coordinate dei punti del sistema ma non le loro velocità. Invece si ha un vincolo di mobilità se le equazioni del vincolo tengono conto sia della posizione dei punti che delle loro velocità.

Sofferamoci inizialmente sui vincoli di posizione. Essi possono ulteriormente essere classificati in:

- a. vincoli bilaterali e vincoli unilaterali
- b. vincoli fissi e vincoli dipendenti dal tempo
- c. vincoli interni e vincoli esterni

In particolare un vincolo viene detto di posizione e bilaterale se esso è rappresentato da un'equazione del seguente tipo:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_N; t) = 0, \quad (\text{VI.1})$$

essendo  $f$  una funzione degli  $N$  punti del sistema ed, eventualmente, del tempo  $t$ . Discutiamo alcuni semplici esempi di tale tipo di vincolo.

**1. Punto materiale  $P$  vincolato a stare su una superficie.** Supponiamo che l'equazione della superficie su cui il punto è costretto a restare costantemente in contatto sia

$$f(x, y, z; t) = 0, \quad (\text{VI.2})$$

dove  $(x, y, z)$  denotano le coordinate del punto  $P$ , mentre la dipendenza dal tempo  $t$  evidenzia che la superficie è mobile nel tempo. Evidentemente, l'equazione (VI.2) rappresenta un vincolo del tipo (VI.1) e quindi di posizione e bilaterale. Per esempio, il punto  $P(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  è vincolato a stare sulla superficie sferica di centro l'origine e raggio unitario, in altre parole il vincolo è rappresentato dall'equazione della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**2. Punto materiale  $P$  vincolato a stare su una curva.** Supponiamo che l'equazione della curva su cui il punto è costretto a restare costantemente in contatto sia

$$\begin{cases} f(x, y, z; t) = 0, \\ g(x, y, z; t) = 0, \end{cases} \quad (\text{VI.3})$$

dove  $(x, y, z)$  denotano le coordinate del punto  $P$ . In tal caso, ciascuna delle due equazioni (indipendenti) rappresenta un vincolo di posizione bilaterale. Per esempio, il punto  $P(x, \sqrt{1 - y^2}, x_0)$  è vincolato a stare sulla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario del piano  $xy$ . Tale vincolo è di posizione e bilaterale perchè le coordinate del punto  $P$  soddisfano le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

**3. Sistema rigido (vincolo di rigidità).** Come già discusso in un precedente capitolo, un sistema (continuo o discreto) si dice rigido se la distanza fra due punti qualunque del sistema è costante al trascorrere del tempo. Per semplicità, supponiamo che il sistema sia formato da un numero finito di punti  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  (con  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Il vincolo di rigidità sarà allora espresso mediante le equazioni (ciascuna del tipo (VI.1))

$$d(P_i, P_j) = \text{cost.} \quad \text{per } i, j = 1, 2, \dots, N, \text{ e } i \neq j, \quad (\text{VI.4})$$

dove con  $d(P_i, P_j)$  si è denotata la distanza fra i punti  $P_i$  e  $P_j$ . Se ai punti  $P_i$  si aggiunge un altro punto  $P$ , questo soddisfa il vincolo di rigidità se  $d(P, P_i) = \text{cost.}$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ . In particolare, questo significa aggiungere  $N$  vincoli a quelli già presenti.

Un vincolo viene detto di posizione e unilaterale se esso è rappresentato da una disequazione del seguente tipo:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_N; t) \geq 0. \quad (\text{VI.5})$$

Le configurazioni per cui la (VI.5) è soddisfatta come uguaglianza si dicono di *confine*, mentre quelle per cui la (VI.5) è verificata come disuguaglianza sono dette *ordinarie*. Consideriamo alcuni esempi di tale tipo di vincolo.

**4. Punto materiale  $P$  appoggiato a una superficie.** Supponiamo che un punto  $P$  sia costretto a rimanere sempre dalla stessa parte di una superficie senza poterla attraversare. Si dice allora che tale punto è appoggiato alla superficie. Se l'equazione della superficie su cui il punto è appoggiato, è  $f(x, y, z; t) = 0$ , allora le coordinate del punto  $P(x_P, y_P, z_P)$  dovranno soddisfare la relazione

$$f(x_P, y_P, z_P; t) \geq 0, \quad (\text{VI.6})$$

dove la dipendenza dal tempo  $t$  evidenzia che la superficie è mobile nel tempo. Evidentemente, l'equazione (VI.6) rappresenta un vincolo del tipo (VI.5) e quindi di posizione e unilaterale. Un esempio di punto appoggiato ad una superficie è rappresentato da un punto costretto a restare all'esterno della superficie sferica. In tal caso le sue coordinate  $x, y, z$  dovranno soddisfare la disequazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0.$$

In particolare, le configurazioni di confine sono quelle in cui le coordinate del punto  $P$  soddisfano all'equazione della sfera, mentre sono ordinarie le posizioni in cui la distanza di tale punto dall'origine è maggiore di uno.

Chiariamo ora la distinzione fra vincoli fissi e vincoli dipendenti dal tempo. Un vincolo si dice fisso se il tempo non compare esplicitamente nelle equazioni o disequazioni che lo rappresentano. Tutti gli esempi finora analizzati sono vincoli fissi. Un vincolo è invece dipendente dal tempo se il tempo appare esplicitamente nelle equazioni o disequazioni che lo rappresentano. Un esempio di vincolo dipendente dal tempo è quello di un punto  $P$  vincolato ad una retta  $r$  che ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse normale e incidente tale retta. Se la rotazione è uniforme allora tale vincolo si esprime nella forma

$$\theta = \pm\omega t + \theta_0$$

a seconda che tale rotazione sia destra o sinistra.

Infine un vincolo che presuppone l'interazione fra elementi facenti parti del sistema è detto interno. Un tipico esempio di sistema soggetto a vincolo interno è costituito da un corpo rigido. Infatti, si è già avuto modo di osservare che la velocità di ogni punto di un sistema rigido è nota una volta che siano assegnati i due vettori caratteristici  $\omega$  e  $\vec{v}_O$  (si veda il capitolo dedicato ai corpi rigidi per maggiori dettagli) e questo determina che le sue parti non possono muoversi indipendentemente l'una dall'altra. Sono vincoli esterni invece quelli che operano fra una parte fissa (il cosiddetto telaio) e un elemento del sistema.

## 2 Coordinate lagrangiane e sistemi olonomi

Consideriamo un sistema materiale vincolato. In un fissato istante  $t$  ogni punto del sistema occupa una determinata posizione, compatibilmente a quelle permesse dai vincoli. Quindi l'insieme delle posizioni occupate all'istante  $t$  dai punti del sistema individua la cosiddetta *configurazione del sistema all'istante considerato*  $t$ . In tutti i problemi da affrontare in questo corso, sarà sempre possibile descrivere la configurazione del sistema attraverso un numero finito di parametri indipendenti. Illustriamo ora quest'ultima affermazione riconsiderando alcuni degli esempi discussi nella sezione precedente e considerandone qualche altro.

Un punto  $P$  vincolato a stare su una curva, è individuato da un solo parametro: si potrebbe scegliere come parametro l'ascissa curvilinea  $s$  di  $P$  su tale curva. Un punto vincolato a stare su una superficie è individuato da due parametri indipendenti che potremo indicare con  $u, v$  essendo tali parametri tali che  $\vec{x}(u, v)$  fornisca una parametrizzazione della superficie. La configurazione di un corpo rigido, libero da vincoli esterni, è individuata da sei parametri indipendenti: si potrebbero scegliere per tali parametri le tre coordinate di un punto del corpo e i tre angoli di Eulero. Se invece sul corpo rigido agiscono dei vincoli esterni in modo che esso abbia un punto fisso, allora per determinarne la posizione bastano i tre angoli di Eulero. Come ulteriore esempio consideriamo un corpo rigido con un asse fisso. In tal caso la configurazione del sistema è, in ogni istante, individuata da un solo parametro: basta infatti assegnare l'angolo fra due piani, uno di questi fisso e l'altro solidale al corpo, contenenti l'asse fisso.

Si chiama *coordinata lagrangiana di un sistema materiale vincolato* ciascuno dei parametri indipendenti necessari a individuare la configurazione del sistema. A seconda del particolare problema studiato occorre scegliere i parametri lagrangiani che meglio consentono di affrontarne lo studio. In generale, tali coordinate si denotano con  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , essendo  $n$  il numero di coordinate lagrangiane necessarie a specificare la configurazione del sistema. Negli esempi prima considerati si potrebbero fare le seguenti scelte (che, ribadiamo, in contesti più specifici potrebbero non essere le più convenienti).



- a. *Punto vincolato a stare su una curva*: l'ascissa curvilinea può scegliersi come unica coordinata lagrangiana.
- b. *Sistema rigido senza vincoli esterni*: come coordinate lagrangiane possono adottarsi le tre coordinate  $x, y, z$  di un punto  $P$  del sistema e i tre angoli di Eulero  $\theta, \phi, \psi$ .
- c. *Corpo rigido con un asse fisso*: come unica coordinata lagrangiana si può scegliere l'angolo  $\theta$  formato fra un piano fisso contenente l'asse e un piano solidale al corpo e passante per l'asse.

Possiamo introdurre la seguente definizione: *Un sistema si dice olonomo se è soggetto solo a vincoli di posizione e bilaterali, cioè del tipo (VI.1)*. Nei sistemi olonomi la posizione di ogni punto  $P$  del sistema dipende dalle  $n$  coordinate lagrangiane e, eventualmente, dal tempo. In formule si ha

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (\text{VI.7})$$

o, equivalentemente, le (VI.8) possono scriversi, scalarmente, come

$$x = x(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (\text{VI.8a})$$

$$y = y(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (\text{VI.8b})$$

$$z = z(q_1, q_2, \dots, q_n; t). \quad (\text{VI.8c})$$

Come esempio, potremo considerare il *bipendolo*. Tale dispositivo è costituito da

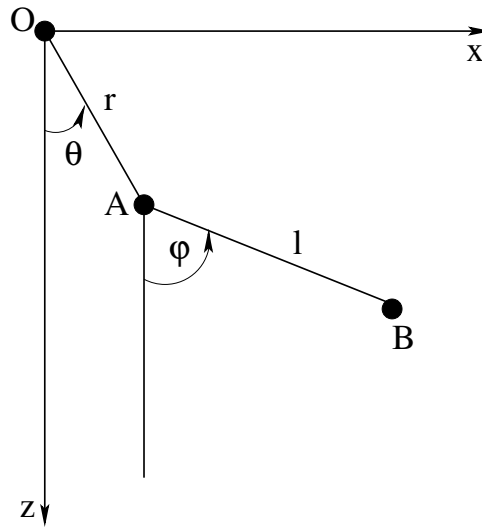


Figura VI.1: Bipendolo.

un punto materiale  $A$  vincolato a muoversi sulla circonferenza di centro l'origine

e raggio  $r$  e da un altro punto  $B$  soggetto al solo vincolo di rigidità rispetto al punto  $A$  (cioè la distanza fra  $A$  e  $B$  è invariabile e supponiamo sia uguale a  $l$ .)  
 Convien scegliere come parametri lagrangiani gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  indicati in figura (si osservi anche il verso dell'asse  $z$ !). In tal caso, si ha

$$\begin{cases} x = r \sin \theta + l \sin \phi, \\ y = 0, \\ z = r \cos \theta + l \cos \phi, \end{cases}$$

e quindi le coordinate di  $B$  sono espresse mediante equazioni del tipo (VI.8).

Si osserva subito che, in base alla definizione, per i sistemi olonomi gli incrementi che le  $n$  coordinate lagrangiane possono subire sono del tutto arbitrari sia in grandezza che in segno. Se nella definizione di sistema olonomo non si fosse richiesto che ogni vincolo fosse bilaterale, allora questo non sarebbe più vero: per esempio, nel caso di un punto appoggiato su un piano si avrebbe qualche limitazione del tipo  $dq_r \geq 0$ . Tenendo conto di questa osservazione possiamo introdurre i gradi di libertà nel seguente modo:

*Si definisce numero di gradi di libertà di un sistema materiale il numero di incrementi arbitrari indipendenti che le coordinate lagrangiane possono subire compatibilmente con i vincoli. In particolare, per un sistema olonomo il numero di gradi di libertà coincide sempre con il numero di coordinate lagrangiane.*

### 3 Cenni sui sistemi anolonomi

Sebbene in questo corso tratteremo quasi esclusivamente il caso di vincoli di posizione, per completezza introduciamo anche i vincoli di mobilità, cioè quei vincoli tali che la loro rappresentazione analitica implica la dipendenza dalle velocità dei punti del sistema, oltre che dalla posizione occupata da questi punti. Più precisamente possiamo dare la seguente definizione: Un vincolo si dice di *mobilità* e bilaterale se si può rappresentare con un'equazione del seguente tipo:

$$\sum_{h=1}^N [a_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{x}_h + b_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{y}_h + c_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{z}_h] + f(P_1, \dots, P_N; t) = 0, \quad (\text{VI.9})$$

in modo che non esista una funzione  $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t)$  tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = a_h, \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = b_h, \quad (\text{VI.10a})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_h} = c_h, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = f, \quad (\text{VI.10b})$$

per  $h = 1, 2, \dots, N$ . Quest'ultima richiesta deve sempre essere soddisfatta se il vincolo è di mobilità. Infatti, se così non fosse, tenendo conto della (VI.9) si avrebbe:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{h=1}^N [a_h \dot{x}_h + b_h \dot{y}_h + c_h \dot{z}_h] + f = 0$$

da cui si ottiene subito  $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t) = \text{cost.}$  e quindi il vincolo sarebbe di posizione!

I vincoli di posizione appaiono quasi sempre quando si studiano problemi di rotolamento. Nei seguenti due esempi mostriamo come la condizione di non integrabilità della funzione  $F$  assuma un carattere decisivo. Come primo esempio consideriamo un disco circolare vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea. Assumiamo che la guida rettilinea coincide con l'asse  $x$ . Poichè il disco

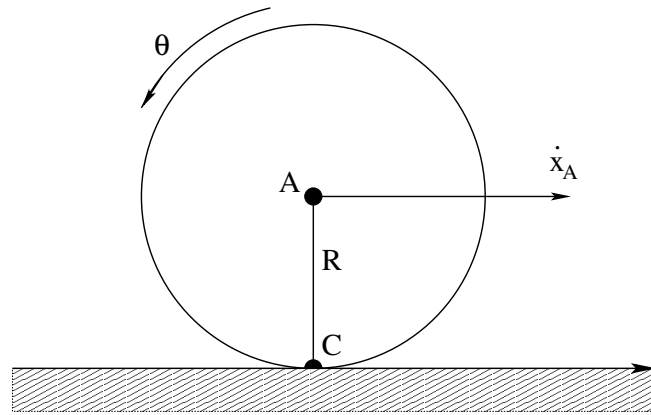


Figura VI.2: Disco circolare vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea.

rotola senza strisciare, ad ogni istante l'unico punto  $C$  di contatto fra disco e guida avrà velocità nulla. Se con  $A$  indichiamo il centro del disco e con  $R$  il suo raggio, l'applicazione della formula fondamentale della cinematica a questi due punti fornisce la seguente equazione

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A),$$

ed essendo nulla la velocità del punto di contatto si ha

$$\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{0}. \quad (\text{VI.11})$$

Considerando la proiezione di tale equazione lungo l'asse  $x$  e denotando con  $\dot{\theta}$  la velocità angolare del disco, si trova la rappresentazione analitica del vincolo

$$\dot{x}_A + R\dot{\theta} = 0. \quad (\text{VI.12})$$

Questa equazione rappresenta solo apparentemente un vincolo di mobilità, in quanto la (VI.12) può essere integrata conducendo alla seguente equazione

$$x_A + R\theta = \text{cost.} \quad (\text{VI.13})$$

In definitiva, il vincolo cui deve soddisfare un disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea è di tipo posizionale. Come secondo esempio consideriamo una sfera rigida vincolata a rotolare senza strisciare su un piano. Anche in questo caso cerchiamo di rappresentare analiticamente il vincolo. A tal fine, prendiamo come piano fisso su cui la sfera rotola, il piano di equazione  $\zeta = 0$ , e consideriamo il riferimento fisso  $\Omega\xi\eta\zeta$  con origine  $\Omega$  su tale piano. Consideriamo poi il riferimento mobile  $Oxyz$  solidale alla sfera (di raggio  $R$ ) e avente origine nel centro della sfera stessa e supponiamo che gli assi  $\zeta$  e  $z$  si trovino dalla stessa parte del piano in cui giace la sfera. Ora introduciamo le coordinate

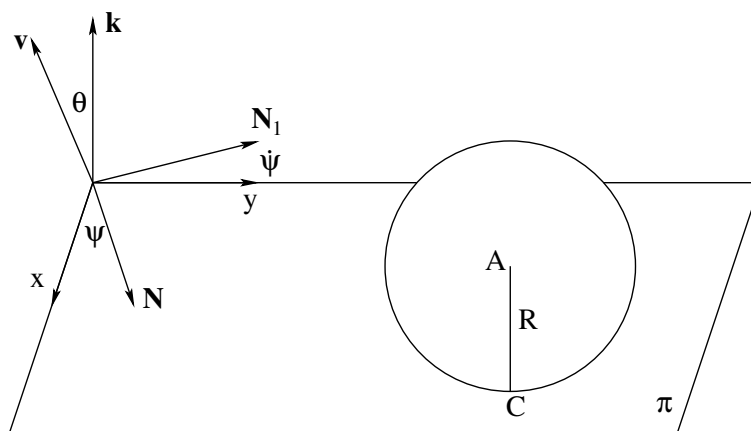


Figura VI.3: Sfera rigida vincolata a rotolare senza strisciare sul piano  $\pi$ .

lagrangiane che, ad ogni istante  $t$ , consentono di individuare in modo univoco la posizione della sfera. Tale posizione sarà completamente conosciuta qualora sia nota la posizione del centro della sfera  $O(\alpha, \beta, R)$  rispetto alla terna fissa (o equivalentemente del suo unico punto di contatto  $C$ ) e sia specificato il suo orientamento rispetto alla terna fissa. Tale orientamento è individuato tramite gli angoli di Eulero  $\theta, \phi, \psi$ . In definitiva, servono cinque coordinate lagrangiane  $(\alpha, \beta, \theta, \phi, \psi)$ . Occorre osservare che ad ogni sistema di valori di questi parametri corrisponde un'unica posizione della sfera a contatto con il piano. Inoltre, se le coordinate lagrangiane sono espresse da cinque funzioni del tempo, si ottengono le equazioni del moto della sfera costantemente a contatto con il piano di equazione  $\zeta = 0$ . Per ottenere un moto di puro rotolamento occorre inoltre che la velocità dell'unico punto di contatto  $C$  della sfera con il piano sia nulla. Tenendo conto di questa informazione e applicando la formula fondamentale della

cinematica ai punti  $C$  e  $O$ , si perviene alla seguente

$$\vec{v}_O = (C - O) \wedge \vec{\omega}, \quad (\text{VI.14})$$

essendo  $\vec{\omega}$  la velocità angolare della sfera. Si verifica subito che sia  $\vec{\omega}$  che  $\vec{v}_O$  sono paralleli al piano fisso ( $\vec{v}_O$  perchè è la velocità del centro della sfera che si muove parallelamente al piano,  $\vec{\omega}$  in quanto perpendicolare al vettore  $C - O$ ) Proiettando, la (VI.14) lungo gli assi  $\xi, \eta, \zeta$  si trova (indicando con  $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$  i versori di tali assi e con  $\omega_1$  e  $\omega_2$  le componenti della velocità angolare rispetto a tali assi)

$$\dot{\alpha}\vec{e} + \dot{\beta}\vec{f} = R \left( -\omega_1\vec{f} + \omega_2\vec{g} \right). \quad (\text{VI.15})$$

Ricordando le equazioni (IV.54) e (IV.60), si trovano le espressioni di  $\omega_1$  e  $\omega_2$  in funzione degli angoli di Eulero

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_2 = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta. \end{cases}$$

Utilizzando queste ultime e le (VI.15), si trova la rappresentazione analitica del vincolo di puro rotolamento

$$\dot{\alpha} = R \left( \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \right), \quad (\text{VI.16a})$$

$$\dot{\beta} = R \left( \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \right). \quad (\text{VI.16b})$$

Si può dimostrare che queste relazioni non sono integrabili, nel senso che non esiste una funzione  $F(\alpha, \beta, \theta, \phi, \psi)$  tale che, differenziando questa equazione rispetto al tempo e tenendo conto delle (VI.16), si arriva a delle identità. Tralasciamo la dimostrazione di questo fatto.

Anche i vincoli di mobilità possono essere classificati come unilaterali, fissi o dipendenti dal tempo. Più precisamente un vincolo di mobilità è unilaterale se si può rappresentare con una disequazione del seguente tipo:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N [a_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{x}_h + b_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{y}_h + c_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{z}_h] \\ + f(P_1, \dots, P_N; t) \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.17})$$

in modo però che non esista una funzione  $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t)$  tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = a_h, \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = b_h, \quad (\text{VI.18a})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_h} = c_h, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = f. \quad (\text{VI.18b})$$

Un vincolo di mobilità è detto *fisso* se nella loro espressione analitica (VI.9) il tempo non figura esplicitamente, mentre è detto *dipendente dal tempo* se nella (VI.9) il tempo appare esplicitamente.

Possiamo dare la seguente definizione: Un sistema è detto *anolonomo* se è soggetto a soli vincoli bilaterali, di cui almeno uno di mobilità.

Si è sottolineato, nella precedente sezione, che per un sistema olonomo il numero di libertà è esattamente uguale al numero di coordinate lagrangiane. Questa affermazione non rimane vera se riferita a sistemi anolonomi. Più precisamente, in un sistema anolonomo il numero di gradi di libertà è uguale al numero di gradi di coordinate lagrangiane diminuito del numero di vincoli di mobilità (o, il che è lo stesso, del numero di relazioni non integrabili). Infatti, in tali sistemi, gli incrementi di tali coordinate non sono indipendenti fra loro ma legati dalle relazioni lineari che si ottengono moltiplicando per  $dt$  i vincoli di mobilità del tipo (VI.9). Per esempio, nel caso prima considerato della sfera che rotola senza strisciare sopra un piano, si è visto che per determinare ad ogni istante la configurazione della sfera occorrono cinque coordinate lagrangiane  $\alpha, \beta, \theta, \psi, \phi$ . Gli incrementi di tali coordinate sono legati dalle seguenti relazioni lineari (ottenute moltiplicando per  $dt$  le (VI.16)), si ottiene

$$d\alpha - R \sin \psi d\theta + R \cos \psi \sin \theta d\phi = 0, \quad (\text{VI.19a})$$

$$d\beta + R \cos \psi d\theta + R \sin \psi \sin \theta d\phi = 0. \quad (\text{VI.19b})$$

Quindi solo tre dei cinque incrementi delle coordinate lagrangiane possono essere attribuiti ad arbitrio mentre gli altri due sono determinati dalle (VI.19). Perciò il numero dei gradi di libertà del sistema è tre. (Si osservi che questo è in perfetto accordo con il fatto che ad ogni istante l'atto di moto è una rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto  $C$ .)

## 4 Spostamenti effettivi e spostamenti virtuali

# Capitolo VII

## Dinamica Newtoniana

### 1 Meccanica di una particella

I fondamenti teorici della meccanica classica risalgono ai tre volumi di *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (in breve, Principia), pubblicati nel 1687 da Isaac Newton (1643-1727). I Principia hanno rivoluzionato la fisica, poichè in essi, per la prima volta, viene presentata una teoria matematica consistente della meccanica classica. Nei libri sono stati introdotti per la prima volta il calcolo differenziale<sup>1</sup> e il calcolo integrale.

La meccanica classica riguarda la dinamica dei punti materiali (e di corpi, cioè di aggregazioni di punti materiali) in uno spazio euclideo tridimensionale,  $\mathbb{R}^3$ , in cui i moti dipendono dal tempo  $t$ . Lo spazio ed il tempo sono ambedue assoluti. Inoltre, lo spazio è isotropo nel senso che le sue proprietà fisiche sono globalmente le stesse in tutte le direzioni. Le forze influiscono sulle particelle in modo istantaneo, qualunque sia la distanza tra loro, anche se le particelle si trovano in galassie diverse. Due osservatori, trovandosi in luoghi diversi, misurano gli stessi valori della posizione di un punto materiale e dell'istante in cui si verifica un certo evento, se utilizzano lo stesso sistema di riferimento.

Già durante la sua vita, Newton è stato criticato per aver introdotto il postulato dell'istantaneità dell'effetto di una forza su un punto materiale. Dopo lo sviluppo della relatività speciale (1905) e della relatività generale (1916) ad opera di Albert Einstein (1879-1955), è apparso chiaro che la meccanica classica è soltanto un'ottima approssimazione della meccanica relativistica per velocità molto inferiori di quella della luce ( $c \simeq 300.000 \text{ km/s}$ ) e per campi gravitazionali deboli. Inoltre, le leggi della meccanica classica vanno sostituite da quelle della meccanica quantistica per distanze microscopiche essendo, in principio, impos-

---

<sup>1</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pubblicò una teoria del calcolo differenziale per poter calcolare l'area sotto il grafico di una funzione  $y = f(x)$  nel 1686, costringendo Newton alla pubblicazione dei Principia. Leibniz utilizzava la notazione  $f'$  e Newton  $dy/dx$ .

sibile separare l'effetto delle osservazioni delle quantità fisiche dall'intervento stesso dell'osservazione.

Isaac Newton ha formulato le tre leggi su cui poggia l'edificio della meccanica classica (note con il nome di leggi di Newton). La *prima legge di Newton* (o *principio d'inerzia*) afferma che un punto materiale si muove con velocità vettoriale costante se non viene sottoposto ad una forza.<sup>2</sup> In altre parole, l'effetto di una forza è di **cambiare** la velocità vettoriale (sia la velocità scalare, sia la sua direzione), cioè di causare un'accelerazione vettoriale. Ciò contraddice le idee in vigore dai tempi di Aristotele (384 aC-322 aC). Infatti, la legge sembra essere controintuitiva, poichè secondo la nostra esperienza, la mancanza di una forza implica che la particella resti ferma. Purtroppo una tale esperienza è basata sul fatto che abbiamo la tendenza di non prendere in considerazione certe forze (quali, ad esempio, la forza d'attrito).

Secondo la *seconda legge di Newton* (il cosiddetto *principio di proporzionalità*), la forza totale  $\mathbf{F}$  agente sulla particella è la derivata della *quantità di moto*  $\mathbf{p}$  (o *momento lineare* rispetto al tempo  $t$ ):<sup>3</sup>

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (\text{VII.1})$$

Indicando con i pedici  $x$ ,  $y$  e  $z$  le componenti lungo gli assi di un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$  di  $\mathbb{R}^3$ , si può proiettare la (VII.1) lungo tali assi, ottenendo

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

La quantità di moto è definita come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (\text{VII.2})$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità vettoriale della particella e  $m$  è la sua *massa*. Nella maggior parte dei casi la massa della particella è costante e la (VII.1) si riduce a<sup>4</sup>

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (\text{VII.3})$$

dove  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione vettoriale della particella. La prima legge di Newton si può dedurre dalla (VII.1) come seguente *legge di conservazione della quantità*

---

<sup>2</sup>Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

<sup>3</sup>Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

<sup>4</sup>In molti testi la (VII.3) viene enunciata come la seconda legge di Newton.



*di moto*: se la forza totale  $\mathbf{F}$  è zero, allora  $\dot{\mathbf{p}} = \vec{0}$  e la quantità di moto  $\mathbf{p}$  si conserva.

Nella cinematica del punto abbiamo trattato le velocità vettoriali e le accelerazioni vettoriali come vettori liberi in  $\mathbb{R}^3$ , spesso dipendenti da  $t$ , che si possono comporre: Una velocità vettoriale ha componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$ , oppure ha componenti radiale e trasversa, che hanno la velocità vettoriale totale come loro risultante. Nella meccanica classica le forze che agiscono su una particella (considerata un punto materiale) si comportano nello stesso modo: La forza totale agente sulla particella è la risultante di tutte le forze agenti su essa. La stessa cosa vale per la quantità di moto.

Il *momento angolare*  $\mathbf{L}$  di una particella rispetto all'origine  $O$  dello spazio tridimensionale è definito dall'espressione

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p},$$

dove  $\mathbf{r}$  è il *raggio vettore diretto da  $O$  verso la particella*. Definendo il *momento della forza* rispetto ad  $O$  come

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F},$$

si vede subito che

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \stackrel{\text{(VII.1)}}{=} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{v}} \wedge \underbrace{\mathbf{p}}_{=m\mathbf{v}} + \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{L}},$$

poichè  $\mathbf{v} \wedge (m\mathbf{v}) = \vec{0}$ . Abbiamo trovato la seguente *legge di conservazione del momento angolare* di una particella: se il momento totale  $\mathbf{N}$  della forza è uguale a zero, allora  $\dot{\mathbf{L}} = \vec{0}$  e il momento angolare  $\mathbf{L}$  si conserva.

La *terza legge di Newton* riguarda due particelle. La legge dice che le forze che le due particelle esercitano l'una sull'altra, hanno la stessa intensità e direzioni collineari opposte.<sup>5</sup> In altre parole, se  $\mathbf{F}$  è la forza esercitata dalla prima particella sull'altra, allora  $-\mathbf{F}$  è la forza esercitata dalla seconda particella sulla prima, mentre

$$\mathbf{F} \wedge (Q - P) = \vec{0},$$

essendo  $P$  e  $Q$  le posizioni delle due particelle. La terza legge viene anche chiamata il *principio di azione e reazione*. La terza legge implica che tutte le forze sono interazioni tra particelle; quindi non esistono forze unilaterali che agiscono su una singola particella se sono presenti altre particelle.

Le leggi di Newton, come tutte le altre leggi della fisica, dipendono dal moto dell'osservatore rispetto all'oggetto fisico. Infatti le tre leggi valgono soltanto in

---

<sup>5</sup>Lex III: Actioni contrariam semper et qualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse quales et in partes contrarias dirigi.

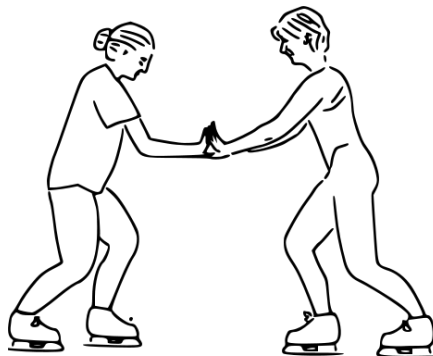


Figura VII.1: Secondo la terza legge di Newton, i due pattinatori esercitano forze collineari opposte l'uno sull'altro. Vedi Wikipedia (Newton's laws).

un cosiddetto *sistema inerziale*. Spesso la prima legge viene interpretata come definizione del sistema inerziale: I sistemi inerziali sono esattamente i sistemi di coordinate in cui vale la prima legge. Indichiamo con  $\{\tau_i\}$  la classe di tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Osserviamo che affinché la (VII.1) (e la (VII.3)) acquistino un preciso significato, occorre specificare lo spazio fisico di riferimento e la scala dei tempi a cui queste leggi si riferiscono. Infatti, se focalizziamo l'attenzione sulla (VII.3), mentre  $\mathbf{F}$  traduce azioni fisiche concrete (dovute alla presenza di altri corpi) e ha significato assoluto, l'accelerazione  $\mathbf{a}$  è una grandezza relativa (cioè per essere definita occorre specificare lo spazio fisico e la scala dei tempi). Pertanto il legame stabilito da (VII.3) (e da (VII.1)) sarà verificato solo in riferimenti privilegiati e indichiamo con  $R^*$  uno di questi. Come già osservato, in  $R^*$  dovrà essere soddisfatta anche la prima legge della dinamica che potrà quindi enunciarsi nel seguente modo: *In assenza di forze un punto materiale si muove (rispetto a  $R^*$ ) di moto rettilineo e uniforme, oppure rimane indefinitamente in quiete.* In particolare, l'uniformità del moto comporta che la scala assoluta dei tempi in  $R^*$  è scelta con la condizione che siano uguali i tempi nei quali vengono percorsi, in assenza di forze, spazi uguali. Tale scala dei tempi non è quindi univoca, ma definita a meno di una trasformazione lineare. Infatti se  $t$  e  $t'$  indicano due scale dei tempi che soddisfano in  $R^*$  il principio di inerzia, la condizione che ogni moto uniforme nella prima scala lo sia anche nella seconda, implica le seguenti relazioni:

$$\frac{ds}{dt} = c_1, \quad \frac{ds}{dt'} = c_2,$$

essendo  $c_1$  e  $c_2$  costanti. Dalle due relazioni di sopra si ricava subito che  $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt'} \frac{dt'}{dt}$  e quindi  $\frac{dt}{dt'} = \text{cost.}$ , e da quest'ultima relazione otteniamo il

legame fra le due scale dei tempi (assoluti) in  $R^*$ :

$$t = at' + b$$

essendo  $a$  e  $b$  due costanti numeriche.

Se ora indichiamo con  $\{\tau^*\}$  l'insieme dei sistemi di riferimento spaziali per cui è valida la legge (VII.1) (essendo la scala dei tempi determinata dalla legge d'inerzia come mostrato sopra), si può dimostrare che anche tale classe coincide con la classe dei riferimenti inerziali, o, in altre parole,  $\{\tau^*\} = \{\tau_i\}$  (tralasciamo per semplicità espositiva la non difficile dimostrazione di questo fatto). A questo punto diventa importante specificare almeno un sistema di riferimento inerziale, poichè tutti gli altri sistemi (inerziali) saranno caratterizzati dal muoversi di moto traslatorio uniforme rispetto ad esso. Solitamente, si assume come riferimento spaziale  $\tau^*$ , una terna ottenuta dalle *stelle fisse*, nel senso che gli assi sono costantemente diretti verso tre stelle fissate ad arbitrio e talmente lontane dalla terra da apparire fisse (ad un osservatore solidale alla terra stessa) e l'origine di tale riferimento è posta in una stella analoga.

Giova anche sottolineare che un riferimento avente l'origine localizzata nel centro della terra e per assi una terna di assi solidali alla terra, non può considerarsi inerziale in quanto, rispetto ad esso, ogni singola stella che sia sufficientemente lontana da tutti i corpi celesti (quindi su di essa non agiscono forze) descrive una traiettoria non rettilinea violando così il principio di inerzia. Va comunque rimarcato che, nei problemi di meccanica terrestre, in prima approssimazione si può identificare  $\tau^*$  con una terna solidale alla Terra.

Le tre leggi di Newton sono invarianti sotto le cosiddette trasformazioni galileiane. Per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  (traslazione temporale), ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  (traslazione spaziale), ogni  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$  (moto uniforme) ed ogni matrice ortogonale del terzo ordine  $R$  (rotazione se  $\det R = 1$ ; rotazione più riflessione se  $\det R = -1$ ) la corrispondente *trasformazione galileiana* è definita come

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t, \\ t' = t + t_0. \end{cases} \quad (\text{VII.4})$$

La massa resta invariante sotto una tale trasformazione. Utilizzando che le derivate rispetto a  $t$  e  $t'$  coincidono, otteniamo dalla (VII.4) per la velocità vettoriale e l'accelerazione vettoriale

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= R\mathbf{v} + \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{a}' &= R\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Dunque la quantità di moto e la forza si trasformano nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= m\mathbf{v}' = m(R\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) = R\mathbf{p} + \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{F}' &= \dot{\mathbf{p}}' = R\dot{\mathbf{p}} = R\mathbf{F}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, le prime due leggi di Newton sono invarianti sotto le trasformazioni galileiane. La stessa cosa vale per la terza legge. È facile dimostrare che tutte le trasformazioni galileiane sono composte dalle seguenti quattro trasformazioni galileiane elementari: a) traslazioni spaziali ( $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ ,  $t' = t$ ), b) traslazioni temporali ( $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ ,  $t' = t + t_0$ ), c) moti uniformi ( $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}_0 t$ ,  $t' = t$ ), e d) rotazioni e riflessioni ( $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$ ,  $t' = t$ ).

## 2 Meccanica di un sistema di particelle

Per estendere la meccanica classica a sistemi di più particelle, bisogna fare una distinzione tra *forze esterne*, esercitate sulle particelle da sorgenti poste al di fuori del sistema, e *forze interne*, esercitate su ogni particella del sistema da tutte le altre particelle del sistema stesso. Così, la seconda legge di Newton per la particella  $i$ -esima assume la forma:

$$\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (\text{VII.5})$$

dove  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  rappresenta la forza esterna e  $\mathbf{F}_{ji}$  la forza interna sulla particella  $i$ -esima dovuta a quella  $j$ -esima. Secondo la terza legge di Newton, si ha per  $i \neq j$

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}, \quad (\text{VII.6a})$$

$$\mathbf{F}_{ji} \wedge (P_i - P_j) = \vec{0}, \quad (\text{VII.6b})$$

essendo  $P_i$  la posizione della particella  $i$ -esima.

Sommando su tutte le particelle e poichè  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$  (essendo  $m_i$  la massa e  $\mathbf{x}_i$  il raggio vettore della particella  $i$ -esima), la (VII.5) assume la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{x}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \{\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}\} \stackrel{(\text{VII.6a})}{=} \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

Definendo la massa totale  $M$  e la forza esterna totale  $\mathbf{F}^{(e)}$  come

$$M = \sum_i m_i, \quad \mathbf{F}^{(e)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)},$$

otteniamo l'equazione di moto

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (\text{VII.7})$$

dove

$$\mathbf{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{M} = \left( \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \right) \quad (\text{VII.8})$$

si chiama *baricentro* o *centro di massa* del sistema di particelle. Quindi le sole forze interne non hanno alcun effetto sul moto del centro di massa.

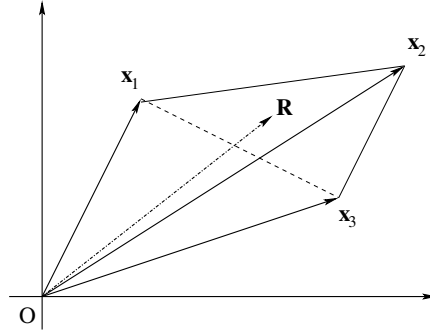


Figura VII.2: Baricentro di tre particelle. Si osservi che il baricentro appartiene alla faccia del tetraedro costituita dagli estremi dei vettori  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ .

Calcoliamo ora la quantità di moto totale del sistema:

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{x}_i \right) = \frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) = M\dot{\mathbf{R}}.$$

Si trova così *legge di conservazione della quantità di moto* di un sistema di particelle: se la risultante delle forze esterne è zero, la quantità di moto totale si conserva.

Definiamo ora il momento angolare totale del sistema come

$$\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i) \\ &= \sum_i \cancel{(\mathbf{v}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i)} + \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i) \\ &\stackrel{(\text{VII.5})}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ji}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ij}) \\
&\stackrel{\text{(VII.6a)}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \wedge \mathbf{F}_{ji} \\
&\stackrel{\text{(VII.6b)}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}).
\end{aligned}$$

Definendo il *momento delle forze esterne*  $\mathbf{N}^{(e)}$  come

$$\mathbf{N}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}),$$

otteniamo

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^{(e)}.$$

In altre parole, abbiamo dimostrato la *legge di conservazione del momento angolare totale*: il momento angolare totale  $\mathbf{L}$  è costante nel tempo se il momento delle forze esterne è uguale a zero.

Scomponiamo il momento angolare  $\mathbf{L}$  in due termini: uno riguardante il moto come se il sistema fosse concentrato nel baricentro, e l'altro riguardante il moto attorno al baricentro. A tal fine, introduciamo le seguenti quantità relative al baricentro:

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}, \quad (\text{VII.9})$$

dove  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ . Dunque

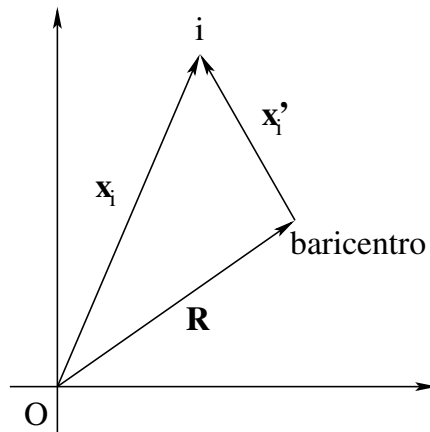


Figura VII.3: Moto della particella  $i$ -esima relativo al baricentro.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i) \\
&= \sum_i (\mathbf{R} \wedge m_i \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i (m_i \mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{R} \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}'_i) \\
&= M(\mathbf{R} \wedge \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i) + \cancel{(\mathbf{M}\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}\mathbf{R})} \wedge \mathbf{V} + \mathbf{R} \wedge \frac{d}{dt} \sum_i m_i [\mathbf{x}_i - \mathbf{R}] \\
&= M(\mathbf{R} \wedge \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i) + \mathbf{R} \wedge \frac{d}{dt} \cancel{(\mathbf{M}\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}\mathbf{R})} \\
&= \mathbf{R} \wedge M\mathbf{V} + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i) \\
&= \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i),
\end{aligned}$$

dove il primo termine è il momento angolare se l'intero sistema fosse concentrato nel baricentro e il secondo termine corrisponde al moto attorno al baricentro.

### 3 Lavoro, energia cinetica e energia potenziale

In questo paragrafo discutiamo il lavoro compiuto da una forza, l'energia cinetica e quella potenziale, sia per una singola particella che per un sistema di particelle.

#### 3.1 Lavoro e energia cinetica

Consideriamo una singola particella di massa  $m$  sotto l'effetto di una forza  $\mathbf{F}$ . Il *lavoro* compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  sulla particella per lo spostamento dal punto 1 al punto 2 è definito come

$$W_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (\text{VII.10})$$

dove l'integrale curvilineo viene calcolato lungo la traiettoria della particella. Se la massa  $m$  è costante, risulta

$$W_{12} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2),$$

dove  $v_1$  e  $v_2$  sono le velocità scalari nei rispettivi punti 1 e 2. La quantità

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

viene chiamata *energia cinetica*. Il lavoro compiuto dalla forza per spostare la particella dal punto 1 al punto 2 è uguale all'aumento della energia cinetica:

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

Per un sistema di particelle (del tipo studiato nel paragrafo 2), calcoliamo il lavoro totale compiuto da tutte le forze, esterne ed interne, per lo spostamento del sistema dalla configurazione iniziale 1 alla configurazione finale 2:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i \\ &\stackrel{\text{(VII.5)}}{=} \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right). \end{aligned}$$

Introducendo l'*energia cinetica totale*  $T$  come

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2,$$

segue che il lavoro compiuto da tutte le forze per spostare il sistema di particelle dalla configurazione 1 alla configurazione 2 è uguale all'aumento della energia cinetica totale:

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

Scriviamo ora la velocità vettoriale come la somma di due termini: la velocità vettoriale del baricentro e la velocità relativa al baricentro, come fatto prima nella (VII.9). In tal caso

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{x}'_i \right) \\ &\stackrel{\text{(VII.9)}}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i [\mathbf{x}_i - \mathbf{R}] \right) \\ &\stackrel{\text{(VII.8)}}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \cancel{(\mathbf{M}\mathbf{R} - \mathbf{M}\mathbf{R})} \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [v'_i]^2, \end{aligned}$$

dove  $V = \|\mathbf{V}\|$  e  $v'_i = \|\mathbf{v}'_i\|$ . Come il momento angolare, anche l'energia cinetica si compone di due parti: l'energia cinetica che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro, più l'energia cinetica corrispondente al moto attorno al baricentro.



### 3.2 Forze conservative e energia potenziale

Una forza  $\mathbf{F}$  che agisce su una singola particella di massa  $m$  si dice *conservativa*, se il lavoro  $W_{12}$  compiuto dalla  $\mathbf{F}$  per spostare la particella dal punto 1 al punto 2 dipende soltanto dai punti 1 e 2 e non dalla traiettoria seguita per passare da 1 a 2. In tal caso si può scegliere un punto di riferimento, che indichiamo con 0, e definire l'*energia potenziale* (o *potenziale*)  $U_1$  come il lavoro compiuto dalla forza per spostare la particella dal punto 1 al punto di riferimento 0, cioè,

$$U_1 = W_{10} = -W_{01} = - \int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Poichè

$$U_1 = W_{10} = T_0 - T_1,$$

essendo  $T_1$  e  $T_0$  le energie cinetiche della particella nei punti 1 e 0, otteniamo

$$T_1 + U_1 = T_0. \quad (\text{VII.11})$$

L'equazione (VII.11) esprime il fatto che l'*energia totale*, essendo la somma delle energie cinetica e potenziale, non cambia nel tempo. Per l'energia totale esiste un'ambiguità basata sulla scelta del punto di riferimento. Se scegliessimo un altro punto di riferimento, che indichiamo con  $0'$ , e definissimo  $U'_1 \stackrel{\text{def}}{=} W_{10'}$ , allora

$$U'_1 - U_1 = W_{10'} - W_{10} = -W_{0'1} - W_{10} = -W_{0'0} = W_{00'},$$

cioè la differenza di energia potenziale nel punto 1 eguaglierebbe il lavoro compiuto per spostare la particella dal punto di riferimento 0 al nuovo punto di riferimento  $0'$ .

Ricaviamo ora il legame tra la forza e l'energia potenziale. Supponiamo che la forza dipenda dalla posizione,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  per  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , e scegliamo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  come punto di riferimento in cui si annulla l'energia potenziale, risulta

$$U(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{x}'), \quad (\text{VII.12})$$

indipendentemente dalla traiettoria che connette  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}$ . Sia

$$\varphi(\tau) = (1 - \tau)\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{x}, \quad \tau \in [0, 1],$$

il segmento che congiunge  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ . Allora

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0.$$

Quindi

$$s(\tau) = \int_0^\tau \left\| \frac{d\varphi}{d\tau} \right\| d\tau = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \tau.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' \\ &= - \int_0^1 \mathbf{F}(\varphi(\tau)) \cdot d\varphi(\tau) = - \int_0^1 \mathbf{F}(\varphi(\tau)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{VII.13})$$

**Teorema VII.1** Sia  $\mathbf{F}$  una forza conservativa e sia  $U$  il potenziale. Allora

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (\text{VII.14})$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che ci siano due funzioni a valori vettoriali  $\mathbf{F}^{(1)}$  e  $\mathbf{F}^{(2)}$  tali che per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$U(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}'. \quad (\text{VII.15})$$

Supponiamo cioè che esistano due forze conservative  $\mathbf{F}^{(1)}$  e  $\mathbf{F}^{(2)}$  che conducono alla stessa energia potenziale. In tal caso la funzione a valori vettoriali  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{F}^{(2)}$  verifica, per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , la relazione

$$\int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{y}} \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' = \vec{0},$$

e quindi  $\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}') \equiv \vec{0}$ . In altre parole,  $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}^{(2)}$ .

Verifichiamo ora che la funzione (VII.14) è soluzione della (VII.13). Infatti,

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (-\nabla U)(\varphi(\tau)) \cdot d\varphi(\tau) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} U(\varphi(\tau)) d\tau \\ &= [U(\varphi(\tau))]_{\tau=0}^1 = U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}_0) = U(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Poichè vale la (VII.15) per  $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}^{(2)} = -\nabla U$ , risulta la (VII.14), grazie alla prima parte della dimostrazione.  $\square$

Definiamo il *rotore* della forza  $\mathbf{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  come<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

<sup>6</sup>Un'altra notazione per il rotore è  $\text{rot } \mathbf{F}$ .

Se la forza  $\mathbf{F} = -\nabla U$  è conservativa, allora

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{F} &= \left( -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \vec{i} + \left( -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \vec{j} \\ &+ \left( -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \vec{k} = \vec{0},\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che le derivate parziali del secondo ordine non dipendono dell'ordine di derivazione parziale.<sup>7</sup> In altre parole, una forza conservativa  $\mathbf{F}$  è *irrotazionale* nel senso che

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \vec{0}. \quad (\text{VII.17})$$

**Esempio VII.2** Esistono forze irrotazionali che non sono conservative. Infatti, sia

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j},$$

dove  $\mathbf{x}$  è un punto di  $\mathbb{R}^3$  che non appartiene all'asse  $z$ . Si verifica facilmente la (VII.17); quindi la forza  $\mathbf{F}$  è irrotazionale. Sia  $\gamma$  la traiettoria definita come  $\gamma = \{\mathbf{x}(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ , dove

$$\mathbf{x}(t) = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}.$$

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla  $\mathbf{F}$  per spostare la particella lungo la traiettoria chiusa  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}W &= \int_0^{2\pi} \left( -\sin(t) \vec{i} + \cos(t) \vec{j} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\sin(t) \vec{i} + \cos(t) \vec{j} \right) \cdot \left( -\sin(t) \vec{i} + \cos(t) \vec{j} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2(t) + \cos^2(t)] dt = 2\pi,\end{aligned}$$

il che dimostra che  $\mathbf{F}$  non è una forza conservativa.

Nella seguente tabella presentiamo un confronto tra concetti simili utilizzati nei corsi di meccanica razionale e nei corsi di analisi matematica.

meccanica razionale	analisi matematica
$\mathbf{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$	$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
forza conservativa	forma differenziale esatta
energia potenziale $U$	funzione primitiva $-U$
forza irrotazionale	forma differenziale chiusa
lavoro	integrale curvilineo

<sup>7</sup>Ci vuole l'ipotesi che il potenziale  $U$  sia di classe  $C^2$  (oppure: che le componenti della forza siano di classi  $C^1$ ) per poter applicare il teorema di Schwartz.

Consideriamo ora un sistema di particelle. La particella  $i$ -esima del sistema è sottoposta ad una forza  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  ed ad una forza interna  $\mathbf{F}_{ji}$  dalla parte della particella  $j$ -esima, con  $j \neq i$ . Le forze interne hanno le proprietà (VII.6) a causa della terza legge di Newton. Supponiamo che tutte le forze esterne siano conservative (cioè, che  $\mathbf{F}_i^{(e)} = -\nabla_i U_i$  per un opportuno potenziale  $U_i$ ) e che le forze interne provengano dai potenziali

$$U_{ij} = U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|),$$

che dipendono soltanto dalla distanza tra le particelle. Sia  $\nabla_i$  il vettore delle derivate parziali rispetto a  $\mathbf{x}_i$ . In tal caso le due forze sono uguali e opposte:<sup>8</sup>

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i U_{ij} = +\nabla_j U_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}, \quad (\text{VII.18})$$

e dirette lungo la retta che congiunge le due particelle:

$$\nabla_i U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) = -\nabla_j U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)f,$$

dove

$$f = \frac{U'(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.$$

Quindi il lavoro compiuto da tutte le forze per lo spostamento del sistema dalla configurazione 1 alla configurazione 2 è dato da

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i \\ &= -\sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j \\ &\stackrel{(\text{VII.18})}{=} -\sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_i U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_j U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_j \end{aligned}$$

(utilizzando  $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$  e  $\nabla_i U_{ij} = \nabla_{ij} U_{ij} = -\nabla_j U_{ij}$ )

$$\begin{aligned} &= -\sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_{ij} U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_{ij} U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_j \\ &= -\sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_{ij} U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_{ij} \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup> $\nabla_i$  denota le derivazioni parziali rispetto alle componenti di  $\mathbf{x}_i$ .

$$= - \sum_i [U_i]_1^2 - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} [U_{ij}]_1^2 = - [U]_1^2,$$

dove l'energia potenziale totale è data da

$$U = \sum_i U_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} U_{ij} = \sum_i U_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij}.$$

In analogia con il caso di una singola particella, si calcola facilmente che

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = T_2 - T_1,$$

dove

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

è l'energia cinetica totale. Di conseguenza,

$$W_{12} = T_2 - T_1 = - [U]_1^2.$$

Quindi abbiamo dimostrato che l'energia totale (cioè, l'energia cinetica più l'energia potenziale) non dipende dal tempo  $t$ .

## 4 Vincoli e reazioni vincolari

Finora abbiamo discusso soltanto sistemi di particelle le cui equazioni di moto hanno la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji},$$

dove le forze interne soddisfano alle (VII.6). In generale, bisogna tenere conto dei vincoli che limitano il moto del sistema.

Ci sono vari modi di classificare i vincoli. Se le condizioni imposte dai vincoli sono tali che le coordinate delle particelle e il tempo siano legate da equazioni del tipo

$$f_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, t) = 0, \quad (\text{VII.19})$$

allora si dice che i vincoli sono *olonomi*. Uno degli esempi principali è rappresentato dal corpo rigido, per il quale i vincoli sono esprimibili mediante equazioni della forma

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Un altro esempio di vincolo olonomo consiste in una particella che è costretta a muoversi lungo una curva o su una superficie. In tal caso, le funzioni  $f_j$  nella (VII.19) rappresentano le equazioni della curva o della superficie.

**Esempio VII.3 (pendolo semplice)** Consideriano il pendolo semplice. Una massa  $m$  appesa ad un filo di lunghezza  $l$  è vincolata a muoversi nel piano  $Oxz$  sotto l'effetto della forza gravitazionale costante. La forza  $\mathbf{F} = mg\vec{k}$  è

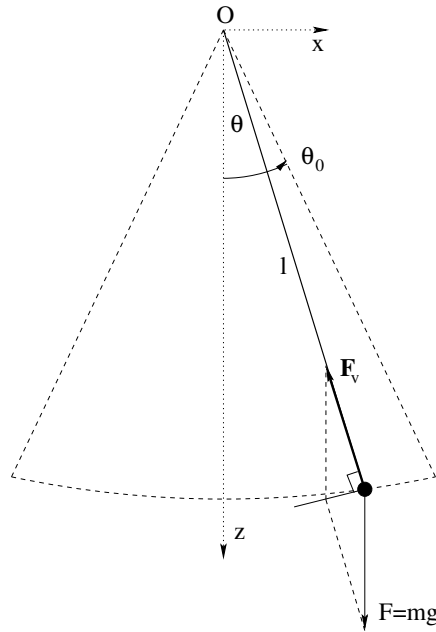


Figura VII.4: Il pendolo semplice.

conservativa con potenziale  $U = -mgz$ . I vincoli sono  $y = 0$  e  $x^2 + z^2 = l^2$ . Introduciamo i versori

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (\cos \theta)\vec{k} + (\sin \theta)\vec{i}, \\ \mathbf{w} &= -(\sin \theta)\vec{k} + (\cos \theta)\vec{i}.\end{aligned}$$

Allora  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\theta}\mathbf{w}$ ,  $\dot{\mathbf{w}} = -\dot{\theta}\mathbf{u}$  e

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w} = (\dot{r} + r\dot{\theta})\mathbf{w} = l\dot{\theta}\mathbf{w},$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al vincolo  $r = \sqrt{z^2 + x^2} = l$ , cioè  $r$  è costante e  $\dot{r} = 0$ . Quindi l'energia cinetica si esprime nella forma

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2,$$

mentre l'energia potenziale è data data

$$U = -mgz = -mgl \cos \theta.$$

Poichè l'energia totale  $T + U$  non dipende dal tempo, risulta

$$0 = \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta \right) = ml^2 \dot{\theta} \left( \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \right).$$

Otteniamo in questo modo l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (\text{VII.20})$$

Se l'angolo  $\theta$  è piccolo, possiamo approssimare  $\sin \theta$  da  $\theta$  e risolvere l'equazione di moto approssimativa

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta.$$

La sua soluzione generale è data dall'espressione

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l}) + \dot{\theta}_0 \frac{\sin(t\sqrt{g/l})}{\sqrt{g/l}},$$

dove  $\theta_0$  e  $\dot{\theta}_0$  sono l'angolo iniziale e la velocità angolare iniziale. Il moto del pendolo è periodico con periodo  $2\pi\sqrt{l/g}$ .

Si può anche introdurre una reazione vincolare  $\mathbf{F}_v$ , diretta verso l'origine  $O$ , tale che la risultante di  $\mathbf{F}_v$  e della forza gravitazionale  $m\mathbf{g}\vec{k}$  è tangenziale. In tal caso la reazione vincolare è la forza centripeta e si trova

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta),$$

che riconduce all'equazione di moto (VII.20).

Il pendolo semplice viene discusso nell'Appendice B senza imporre la condizione che l'angolo  $\theta$  sia piccolo.

**Esempio VII.4 (paracadutista)** Supponiamo che una massa  $m$  cada con la caduta smorzata in proporzione alla velocità. In tal caso

$$\ddot{z} = -g - c\dot{z},$$

essendo  $c$  un'opportuna costante positiva. Ponendo  $w = \dot{z}$ , otteniamo  $\dot{w} = g - cw$ . Risolvendo quest'equazione differenziale lineare di primo ordine, otteniamo

$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-ct} - \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}),$$

essendo  $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$ . Integrando quest'espressione rispetto a  $t$  si ottiene, per  $z_0 = z(0)$ ,

$$z = z_0 + \left[ \frac{\dot{z}_0}{c} + \frac{g}{c^2} \right] (1 - e^{-ct}) - \frac{gt}{c}.$$

Quindi  $\dot{z} \rightarrow -(g/c)$  se  $t \rightarrow +\infty$ . Inoltre, per  $\dot{z}_0 > 0$  il valor massimo

$$z_{\max} = z_0 + \left[ \frac{\dot{z}_0}{c} + \frac{g}{c^2} \right] \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + (g/c)} - \frac{g}{c^2} \ln \left( 1 + \frac{c\dot{z}_0}{g} \right)$$

di  $z$  viene raggiunto all'istante

$$t_{\max} = \frac{1}{c} \ln \left( 1 + \frac{c\dot{z}_0}{g} \right).$$

Supponiamo ora che una massa si sposti nel piano  $xz$  sotto l'effetto della forza di gravità e di una forza smorzante proporzionale e in direzione contraria alla velocità. In tal caso

$$\ddot{x} = -c\dot{x}, \quad \ddot{z} = -g - c\dot{z},$$

essendo  $c$  un'opportuna costante positiva. Come spiegato prima, otteniamo

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-ct}, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 e^{-ct} - \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}),$$

essendo  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$  e  $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$ . Integrando queste espressioni rispetto a  $t$  si ottiene, per  $x_0 = x(0)$  e  $z_0 = z(0)$ ,

$$x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{c}(1 - e^{-ct}), \quad z = z_0 + \left[ \frac{\dot{z}_0}{c} + \frac{g}{c^2} \right] (1 - e^{-ct}) - \frac{gt}{c}.$$

Quindi  $x \rightarrow x_0 + (\dot{x}_0/c)$  e  $\dot{z} \rightarrow -(g/c)$  se  $t \rightarrow +\infty$ .

Supponiamo ora che una massa  $m$  cada con la caduta smorzata in proporzione della velocità al quadrato. In tal caso

$$\ddot{z} = g - c\dot{z}^2,$$

essendo  $c$  un'opportuna costante positiva. Ponendo  $w = \dot{z}$ , otteniamo

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{g}} \left( \frac{1}{w - \sqrt{g/c}} + \frac{1}{w + \sqrt{g/c}} \right) \dot{w} = -c,$$

oppure

$$\ln \left| \frac{w - \sqrt{g/c}}{w + \sqrt{g/c}} \right| = \alpha - 2t\sqrt{cg}$$

per un'opportuna costante  $\alpha$ . Esponenziando e scrivendo  $w = \dot{z}$ , risulta

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{\dot{z}_0 [1 + e^{-2t\sqrt{cg}}] + \sqrt{\frac{g}{c}} [1 - e^{-2t\sqrt{cg}}]}{\dot{z}_0 [1 - e^{-2t\sqrt{cg}}] + \sqrt{\frac{g}{c}} [1 + e^{-2t\sqrt{cg}}]} \\ &= \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{\dot{z}_0 [e^{t\sqrt{cg}} + e^{-t\sqrt{cg}}] + \sqrt{\frac{g}{c}} [e^{t\sqrt{cg}} - e^{-t\sqrt{cg}}]}{\dot{z}_0 [e^{t\sqrt{cg}} - e^{-t\sqrt{cg}}] + \sqrt{\frac{g}{c}} [e^{t\sqrt{cg}} + e^{-t\sqrt{cg}}]} \\ &= \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{\dot{z}_0 \cosh(t\sqrt{cg}) + \sqrt{\frac{g}{c}} \sinh(t\sqrt{cg}) [e^{t\sqrt{cg}} - e^{-t\sqrt{cg}}]}{\dot{z}_0 \sinh(t\sqrt{cg}) + \sqrt{\frac{g}{c}} \cosh(t\sqrt{cg})} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{c}}, \end{aligned}$$



se  $t \rightarrow +\infty$ . Di conseguenza, per un'opportuna costante  $\beta$  si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= \beta + \frac{1}{c} \ln \left\{ \dot{z}_0 [e^{t\sqrt{cg}} - e^{-t\sqrt{cg}}] + \sqrt{\frac{g}{c}} [e^{t\sqrt{cg}} + e^{-t\sqrt{cg}}] \right\} \\ &= z_0 + \frac{1}{c} \ln \left\{ \frac{1}{2} \dot{z}_0 \sqrt{\frac{c}{g}} [e^{t\sqrt{cg}} - e^{-t\sqrt{cg}}] + \frac{1}{2} [e^{t\sqrt{cg}} + e^{-t\sqrt{cg}}] \right\} \\ &= z_0 + \frac{1}{c} \ln \left\{ \dot{z}_0 \sqrt{\frac{c}{g}} \sinh(t\sqrt{cg}) + \cosh(t\sqrt{cg}) \right\}. \end{aligned}$$



# Capitolo VIII

## Forze Centrali e Problema dei Due Corpi

In questo capitolo studiamo il moto di un punto materiale sottoposto ad una forza centrale. Uno dei risultati più importanti che verrà presentato consiste nella derivazione delle tre leggi di Keplero. Come è noto tali leggi descrivono l'orbita di un pianeta nel sistema solare.

### 1 Cinematica

Consideriamo ora un moto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  per cui l'accelerazione  $\ddot{\mathbf{r}}$  è collineare al moto, cioè

$$\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (\text{VIII.1})$$

In tal caso

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Di conseguenza  $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$  è un vettore costante. Nel caso in cui il vettore  $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$  si annulli, abbiamo la collinearità dei vettori  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  e  $\ddot{\mathbf{r}}$  e il moto è rettilineo. Nel caso contrario i vettori  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$  appartengono al piano per l'origine ortogonale al vettore costante  $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ , quindi il moto è piano.

Utilizzando la seconda legge di Newton, si vede che l'ipotesi (VIII.1) implica

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = 0, \quad (\text{VIII.2})$$

dove  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  è la forza che agisce sulla particella di massa  $m$ . Ciò implica che il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad (\text{VIII.3})$$

è costante, dove  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$  è la quantità di moto. Il moto è rettilineo se  $\mathbf{L} = 0$ , mentre risulta essere ristretto al piano per l'origine ortogonale ad  $\mathbf{L}$  se  $\mathbf{L} \neq 0$ .

Scegliendo le coordinate  $(x, y, z)$  tali che  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{j} = 0$  e  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{k} > 0$ , adottiamo le coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  tali che

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Introducendo il versore radiale  $\hat{\mathbf{e}}_r$  e quello tangenziale  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= -\frac{y}{r} \mathbf{i} + \frac{x}{r} \mathbf{j} = -(\sin \theta) \mathbf{i} + (\cos \theta) \mathbf{j}, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= -(\sin \theta) \dot{\theta} \mathbf{i} + (\cos \theta) \dot{\theta} \mathbf{j} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= -(\cos \theta) \dot{\theta} \mathbf{i} - (\sin \theta) \dot{\theta} \mathbf{j} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r(\dot{\theta})^2 \cos \theta, \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r(\dot{\theta})^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

mentre  $\ddot{z} = 0$ . Di conseguenza, essendo  $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$ ,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (\text{VIII.4a})$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] \hat{\mathbf{e}}_r + [2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}] \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (\text{VIII.4b})$$

Calcoliamo ora il momento angolare. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\ &= mr \hat{\mathbf{e}}_r \wedge (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} (\hat{\mathbf{e}}_r \wedge \hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \mathbf{k} = 2m \dot{A} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

dove  $\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$  è la velocità areale. Quindi  $L = |\mathbf{L}| = 2m|\dot{A}|$  è il momento angolare.

## 2 Baricentro e Forze Centrali

Si considerino due oggetti di massa  $M_S$  e  $m$  (assimilabili, ad esempio, al Sole ed un pianeta che ruota intorno ad esso), che immagineremo di schematizzare

con due punti materiali, le cui posizioni rispetto all'origine  $O$  di un sistema di riferimento inerziale sono individuate dai due vettori posizione  $\mathbf{r}_1$  (per il pianeta) e  $\mathbf{r}_2$  (per il Sole). Le sole forze agenti sul sistema dei due corpi sono quelle di mutua interazione  $\mathbf{F}_{12}$  e  $\mathbf{F}_{21}$ , che supporremo essere dirette lungo il segmento tra i due corpi e di avere risultante zero.

Introduciamo le nuove variabili

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r}_1 + M_S\mathbf{r}_2}{m + M_S},$$

dove  $\mathbf{r}$  è la posizione relativa del pianeta rispetto al Sole e  $\mathbf{R}$  è la posizione del centro di massa dei due corpi. Siccome

$$\mathbf{R} = \frac{m}{m + M_S}\mathbf{r}_1 + \frac{M_S}{m + M_S}\mathbf{r}_2$$

è una combinazione lineare convessa (cioè, aventi per coefficienti numeri compresi tra 0 e 1 la cui somma è 1) delle posizioni  $\mathbf{r}_1$  del pianeta e  $\mathbf{r}_2$  del Sole, la posizione del centro di massa  $\mathbf{R}$  appartiene al segmento congiungente dei due corpi. Le posizioni  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  si esprimono nelle nuove coordinate nel seguente modo:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{M_S}{m + M_S}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m}{m + M_S}\mathbf{r}.$$

Rispetto alle nuove coordinate l'energia cinetica totale si esprime come

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}M_S|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left|\dot{\mathbf{R}} + \frac{M_S}{m + M_S}\dot{\mathbf{r}}\right|^2 + \frac{1}{2}M_S\left|\dot{\mathbf{R}} - \frac{m}{m + M_S}\dot{\mathbf{r}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(m + M_S)|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\frac{mM_S}{m + M_S}|\dot{\mathbf{r}}|^2 \\ &= \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2, \end{aligned}$$

essendo

$$M = m + M_S, \quad \mu = \frac{mM_S}{m + M_S}.$$

La quantità  $M$  rappresenta la massa totale (massa del Sole più massa del pianeta) del sistema, mentre  $\mu$  è la cosiddetta massa ridotta. Nel caso in cui  $m \ll M_S$ , abbiamo  $\mu < m$  e  $(m - \mu) \ll M_S$ , che giustifica il termine massa ridotta.

Una tale trasformazione si applica anche al momento angolare. Infatti, siano  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  la quantità di moto del pianeta e del Sole. Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2 = m(\mathbf{r}_1 \wedge \dot{\mathbf{r}}_1) + M_S(\mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2) \\
&= m \left( \left[ \mathbf{R} + \frac{M_S}{m + M_S} \mathbf{r} \right] \wedge \left[ \dot{\mathbf{R}} + \frac{M_S}{m + M_S} \dot{\mathbf{r}} \right] \right) \\
&+ M_S \left( \left[ \mathbf{R} - \frac{m}{m + M_S} \mathbf{r} \right] \wedge \left[ \dot{\mathbf{R}} - \frac{m}{m + M_S} \dot{\mathbf{r}} \right] \right) \\
&= (m + M_S)(\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}) + \frac{mM_S^2 + M_Sm^2}{(m + M_S)^2} (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\
&= (m + M_S)(\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}) + \frac{mM_S}{m + M_S} (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\
&= M(\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}) + \mu(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\
&= \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{p},
\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{P}$  è la quantità di moto del baricentro e  $\mathbf{p}$  è quella del moto relativo al baricentro.

La risultante delle forze,  $\mathbf{F}_{\text{est.}}$ , si trasforma nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{est.}} &= m\ddot{\mathbf{r}}_1 + M_S\ddot{\mathbf{r}}_2 \\
&= m \left( \ddot{\mathbf{R}} + \frac{M_S}{m + M_S} \ddot{\mathbf{r}} \right) + M_S \left( \ddot{\mathbf{R}} - \frac{m}{m + M_S} \ddot{\mathbf{r}} \right) \\
&= (m + M_S)\ddot{\mathbf{R}} = M\ddot{\mathbf{R}}.
\end{aligned}$$

Quindi la risultante delle forze causa un'accelerazione del baricentro.

Nello studio del problema dei due corpi facciamo l'ipotesi che il loro baricentro sia fermo:

$$\dot{\mathbf{R}} = 0.$$

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento sul baricentro, l'energia cinetica sarà  $T = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2$  ed il momento angolare sarà  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ , dove  $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ . Supponiamo inoltre che le forze agenti tra i due corpi,  $\mathbf{F}_{12}$  e  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , dipendano soltanto dalla distanza tra loro, cioè da  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . In altre parole, la forza  $\mathbf{F}_{12}$ , che il Sole esercita sul pianeta, dipende soltanto da  $r$ :

$$\mathbf{F}_{12} = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r,$$

essendo la  $f(r)$  una funzione continua di  $r$  e  $\hat{\mathbf{e}}_r$  il versore radiale (cioè, proveniente dal baricentro).

Sia  $U(r)$  una primitiva della  $-f(r)$ :  $f(r) = -U'(r)$ . Allora  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e

$$\begin{aligned}\nabla U(r) &= \frac{\partial}{\partial x}U(r)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}U(r)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}U(r)\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} \right\} \\ &= U'(r) \left\{ \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k} \right\} \\ &= -f(r)\hat{\mathbf{e}}_r = -\mathbf{F}_{12},\end{aligned}$$

dove  $\hat{\mathbf{e}}_r$  è il versore radiale (con componenti  $x/r$ ,  $y/r$  e  $z/r$ ). In altre parole, la forza, che il Sole esercita sul pianeta, è conservativa.

### 3 Forza Gravitazionale

Secondo la teoria della gravitazione di Newton, due corpi esercitano una forza gravitazionale uno sull'altro che è proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra essi. In altre parole,

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{GM_S m}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r,$$

dove  $G$  è una costante universale (determinata sperimentalmente per la prima volta da Henry Cavendish nel 1797-98). Siccome

$$M_S m = \mu(m + M_S) = \mu M,$$

abbiamo anche

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{G\mu M}{r^2} = -\nabla U(r),$$

dove

$$U(r) = -\frac{G\mu M}{r}.$$

Per trovare l'orbita del pianeta intorno al Sole, applichiamo la seconda legge di Newton nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\mu[\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] = -U'(r),$$

dove  $\mu r\dot{\theta}^2$  è la forza centrifuga. Siccome la velocità areale  $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = (L/2\mu)$  per  $L$  il momento angolare, si ha

$$\mu r(\dot{\theta})^2 = \mu r \left( \frac{L}{\mu r^2} \right)^2 = \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

Infine arriviamo all'equazione differenziale

$$\mu\ddot{r} = -\frac{G\mu M}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3}. \quad (\text{VIII.5})$$

Per risolvere la (VIII.5) introduciamo la nuova funzione  $u = (1/r)$  e convertiamo le derivate rispetto al tempo in derivate rispetto a  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\theta}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt} r = \frac{d}{dt} \frac{1}{u} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d(1/u)}{d\theta} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo tali espressioni per  $r$  e  $\ddot{r}$  nella (VIII.5) otteniamo

$$-\frac{L^2 u^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -G\mu M u^2 + \frac{L^2}{\mu} u^3.$$

Oppure:

$$u''(\theta) + u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{L^2}. \quad (\text{VIII.6})$$

La soluzione generale è la seguente:

$$u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{L^2} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)),$$

dove  $\varepsilon$  e  $\theta_0$  sono costanti arbitrarie. Di conseguenza

$$r(\theta) = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (\text{VIII.7})$$

Introducendo le coordinate  $x$  e  $y$  tali che l'asse  $x$  positivo ha la stessa direzione della semiretta di angolo polare  $\theta_0$  (cioè,  $x = r \cos(\theta - \theta_0)$  e  $y = r \sin(\theta - \theta_0)$ ), risulta

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x = r + \varepsilon x = r[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)] = \frac{L^2}{G\mu^2 M}.$$

Eliminando la radice quadrata arriviamo all'equazione quadratica

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{L^2}{G\mu^2 M} \right)^2 - 2\varepsilon \frac{L^2}{G\mu^2 M} x + \varepsilon^2 x^2. \quad (\text{VIII.8})$$

Si presentano quattro casi:



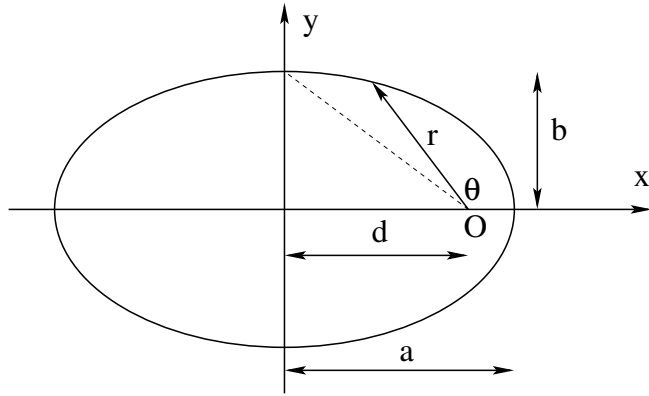


Figura VIII.1: Orbita di un pianeta nel sistema solare.

- a.  $\varepsilon = 0$ :  $r(\theta) = [L^2/G\mu^2M]$  è costante. Il moto è una circonferenza attorno al baricentro del Sole e del pianeta.
- b.  $0 < \varepsilon < 1$ : Si ha

$$(1 - \varepsilon^2) \left( x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{L^2}{G\mu^2 M} \right)^2 \frac{1}{1 - \varepsilon^2},$$

oppure:

$$\frac{\left( x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)} \right)^2}{\left( \frac{L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)} \right)^2} + \frac{y^2}{\left( \frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} = 1,$$

cioè un ellisse con semiassi

$$a = \frac{L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)}, \quad b = \frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

semidistanza dei fuochi  $d = \varepsilon L^2/G\mu^2 M\sqrt{1 - \varepsilon^2}$  e l'eccentricità  $(d/a) = \varepsilon$ , mentre il baricentro è uno dei fuochi.

- c.  $\varepsilon = 1$ : In tal caso

$$y^2 = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \left\{ \frac{L^2}{G\mu^2 M} - 2x \right\},$$

una parabola con il baricentro nel fuoco.

d.  $\varepsilon > 1$ : In tal caso

$$\frac{\left(x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(\varepsilon^2 - 1)}\right)^2}{\left(\frac{L^2}{G\mu^2 M(\varepsilon^2 - 1)}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2} = 1,$$

un'iperbole con semiassi

$$a = \frac{L^2}{G\mu^2 M(\varepsilon^2 - 1)}, \quad b = \frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

semidistanza dei fuochi  $d = \varepsilon L^2 / G\mu^2 M\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$  e l'eccentricità  $(d/a) = \varepsilon$ , mentre il baricentro è uno dei fuochi.

e. Per  $\varepsilon < 0$  abbiamo le stesse coniche, poiché la trasformazione  $(x, \varepsilon) \mapsto (-x, -\varepsilon)$  converte la (VIII.8) in se stessa.

Torniamo al caso  $0 < \varepsilon < 1$ . Il periodo del moto è

$$\tau = \frac{\pi ab}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{L/2\mu} = \frac{2\pi ab\mu}{L}.$$

Poichè  $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ,

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) \mu^2}{L^2} \\ &= a^3 \frac{4\pi^2 \mu^2 (1 - \varepsilon^2)}{L^2} \frac{L^2}{G\mu^2 M (1 - \varepsilon^2)} = a^3 \frac{4\pi^2}{GM}. \end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi che  $m \ll M_S$  (cioè che  $M \simeq M_S$  e  $\mu \simeq m$ ) risultano le tre leggi di Keplero [Astronomia Nova, 1609]:

1. **Prima legge di Keplero:** Le orbite dei pianeti sono ellissi con il Sole che occupa uno dei fuochi. In realtà, le orbite dei pianeti sono ellissi con il baricentro del Sole e del pianeta che occupa uno dei fuochi.
2. **Seconda legge di Keplero:** La velocità areale  $\dot{A}$  è costante:

$$\dot{A} = \frac{L}{2\mu}.$$

3. **Terza legge di Keplero:** Il rapporto tra il quadrato del periodo  $\tau$  e il cubo del semiasse maggiore  $a$  è una costante che non dipende dal pianeta:

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \simeq \frac{4\pi^2}{GM_S}.$$

## 4 Vettore di Laplace-Runge-Lenz

Una proprietà caratteristica del problema di Keplero è l'esistenza di un ulteriore vettore che si conserva oltre al momento angolare. Per una forza centrale qualunque si può scrivere la seconda legge di Newton come:

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$$

per un'opportuna funzione  $f(r)$ . In tal caso

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{L} &= f(r)\hat{\mathbf{e}}_r \wedge \mu(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{\mu f(r)}{r} [\mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}})] \\ &\stackrel{\text{(VIII.3)}}{=} \frac{\mu f(r)}{r} [(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}].\end{aligned}$$

Poichè

$$\frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}}{r} - r\dot{\mathbf{r}} \stackrel{\text{(VIII.4a)}}{=} [(r\hat{\mathbf{e}}_r) \cdot (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta)]\hat{\mathbf{e}}_r - r(\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = -r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

risulta grazie alla conservazione del momento angolare  $\mathbf{L}$ :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{L} = -\mu f(r)r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Utilizzando  $f(r) = -[G\mu M/r^2]$ , si ha:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) = G\mu^2 M\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta = G\mu^2 M\dot{\mathbf{e}}_r.$$

Di conseguenza, il cosiddetto *vettore di Laplace-Runge-Lenz*<sup>1</sup>

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - G\mu^2 M\hat{\mathbf{e}}_r$$

è costante. Inoltre, essendo ortogonale al piano di moto il momento angolare  $\mathbf{L}$ , si ha:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = [\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - G\mu^2 M\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \mathbf{L} = \vec{0}.$$

Si vede facilmente che

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} &= (\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - G\mu^2 M[\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{r}] \\ &= (\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - G\mu^2 Mr = -(\mathbf{L} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} - G\mu^2 Mr \\ &= -\mathbf{L} \cdot (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) - G\mu^2 Mr = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) - G\mu^2 Mr \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - G\mu^2 Mr = \|\mathbf{L}\|^2 - G\mu^2 Mr.\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Il vettore fu utilizzato in pubblicazioni di Pierre-Simon de Laplace [Traité de Mécanique Celeste, 1799], Carle Runge [Vektoranalysis, 1919] e Wilhelm Lenz [Über den Bewegungsverlauf und Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung, Zeitschrift für Physik **24**, 197–207 (1924)], ma venne già discusso da J. Hermann in due lettere (1710).

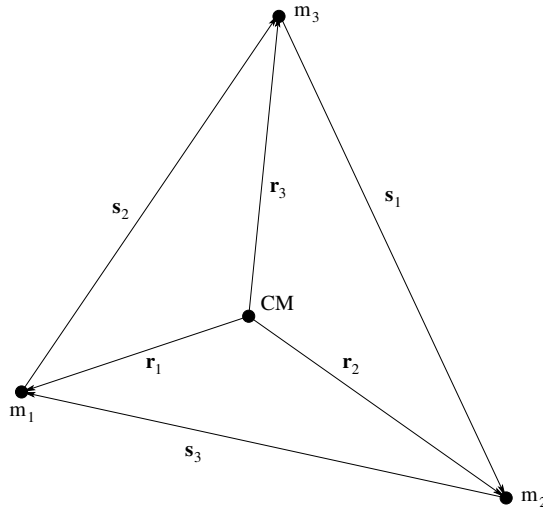


Figura VIII.2: Vettori posizione  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ ,  $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  per il problema dei tre corpi.

Essendo  $\vartheta$  l'angolo tra  $\mathbf{r}$  e la direzione fissa di  $\mathbf{A}$ , risulta:<sup>2</sup>

$$\|\mathbf{A}\| r \cos \vartheta = \|\mathbf{L}\|^2 - G\mu^2 M r,$$

oppure:

$$\frac{1}{r} = \frac{G\mu^2 M}{\|\mathbf{L}\|^2} \left\{ 1 + \frac{\|\mathbf{A}\|}{G\mu^2 M} \cos \vartheta \right\}.$$

Dunque abbiamo ricavato la prima legge di Keplero, se il modulo di  $\mathbf{A}$  è strettamente inferiore di  $G\mu^2 M$ . In tal caso  $\varepsilon = [\|\mathbf{A}\|/G\mu^2 M]$  è l'eccentricità  $\varepsilon$  (e quindi  $\mathbf{A} = \vec{0}$  se e solo se l'orbita del pianeta è una circonferenza) e il vettore di Laplace-Runge-Lenz è diretto dal Sole verso il perielio dell'ellisse (cioè,  $\vartheta = 0$ ). Infine, il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz è dato da:

$$\|\mathbf{A}\| = G\mu^2 M \varepsilon.$$

## 5 Problema dei Tre Corpi

Il problema di Keplero dei tre corpi riguarda la risoluzione delle equazioni di moti di un sistema di tre masse,  $m_1$  in posizione  $\mathbf{r}_1$ ,  $m_2$  in posizione  $\mathbf{r}_2$  e  $m_3$  in posizione  $\mathbf{r}_3$  (con tutte le posizioni relative al centro di massa), che interagiscono

<sup>2</sup>Il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz viene scritto come  $\|\mathbf{A}\|$ , per non confonderlo con l'area che figura nella discussione della velocità areale.

tramite la forza gravitazionale tra ogni coppia di particelle. Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} = -Gm_2 \frac{\mathbf{s}_3}{|\mathbf{s}_3|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} = -Gm_3 \frac{\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|^3} + Gm_1 \frac{\mathbf{s}_3}{|\mathbf{s}_3|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} = -Gm_1 \frac{\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2|^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|^3},\end{aligned}$$

essendo

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

In tal caso si ottengono le tre equazioni di moto

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|^3} + m_i \mathbf{G}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{VIII.9})$$

dove

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \quad \mathbf{G} = G \left( \frac{\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2|^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{|\mathbf{s}_3|^3} \right).$$

Dalle tre equazioni accoppiate (VIII.9) non si conosce la soluzione generale, ma soltanto quella che si ottiene in alcuni casi abbastanza elementari. Si osservi che le tre equazioni (VIII.9) sono accoppiate, poichè

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = \vec{0}. \quad (\text{VIII.10})$$

Nel caso in cui  $\mathbf{G} = \vec{0}$ , le equazioni di moto (VIII.9) si disaccoppiano e la (VIII.9) si riduce alla stessa forma del problema di Keplero dei due corpi:

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

con ciascuna delle masse che si muove lungo un'orbita ellittica che giace sullo stesso piano con lo stesso punto focale e lo stesso periodo. Il disaccoppiamento si verifica quando le masse si trovano ai vertici di un triangolo equilatero.<sup>3</sup> Man mano che il moto procede, le equazioni rimangono disaccoppiate e quindi la condizione del triangolo equilatero rimane valida anche se il triangolo cambia orientazione e grandezza. In astronomia una tale situazione consiste nei cosiddetti troiani, asteroidi che condividono la stessa orbita di un pianeta maggiore ma costituiscono un triangolo equilatero con il pianeta maggiore ed il Sole. Sono

---

<sup>3</sup>Le equazioni (VIII.10) e  $\mathbf{G} = \vec{0}$  valgono simultaneamente se e solo se le tre masse si trovano nei vertici di un triangolo equilatero.

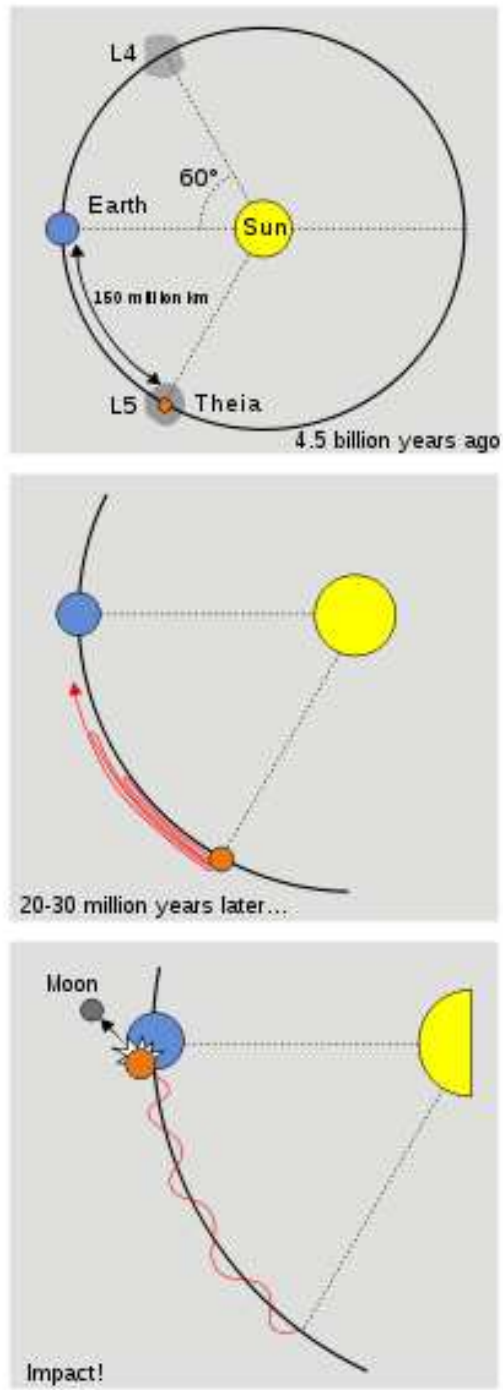


Figura VIII.3: L'ipotetica formazione della Luna. Vedi Wikipedia.

stati infatti trovati asteroidi troiani per Giove, Marte e Nettuno, e, di recente, per la Terra. Secondo una teoria (da comprovare) la Luna è nata dalla collisione della Terra con un pianeta ipotetico (chiamato Theia oppure Orpheus) che prima formava un triangolo equilatero con la Terra ed il Sole e poi è stato disturbato gravitazionalmente (vedi Wikipedia, Formazione della Luna).

Un altro caso particolare che si può trattare abbastanza bene, è il caso in cui le due masse  $m_1$  e  $m_2$  sono molto grandi e si muovono l'una rispetto all'altra di un moto confinato, mentre la terza,  $m_3$ , molto più piccola, si limita a perturbare il moto delle altre due. In tal caso la terza massa si muove nel campo gravitazionale generato dalle prime due masse. Un esempio è il moto di una navicella spaziale in orbita tra la Terra e la Luna.





# Capitolo IX

## Calcolo delle Variazioni e Equazioni di Eulero-Lagrange

In questo capitolo discuteremo il calcolo delle variazioni e la sua applicazione alla formulazione lagrangiana delle equazioni di moto sia per un sistema non vincolato sia per un sistema soggetto a vincoli olonomi. Infine, deriveremo da un'opportuna lagrangiana le equazioni di moto di una particella soggetta alla forza elettromagnetica.

### 1 Calcolo delle Variazioni

Nella sua forma più semplice il calcolo delle variazioni consiste nel minimizzare il cosiddetto integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[y, \dot{y}, t] dt \quad (\text{IX.1})$$

al variare di tutte le funzioni  $y = y(t)$  ai valori prefissati  $y(t_1) = y_1$  e  $y(t_2) = y_2$ . Essenzialmente si cerca un cammino  $y = y(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) che collega i due punti  $(t_1, y_1)$  e  $(t_2, y_2)$  e che minimizza l'integrale d'azione  $S$ . Uno degli esempi più semplici è il seguente: Fissati nel piano due punti, quale è il cammino più breve che li congiunge? Per poter dare una risposta a tale domanda (dimostrando rigorosamente che tale cammino è il segmento di retta per i due punti dati) occorre trovare la funzione  $y(t)$  che minimizza l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dt. \quad (\text{IX.2})$$

essendo  $y(t_1) = y_1$  e  $y(t_2) = y_2$ .

Supponendo che la  $f$  sia di classe  $C^1$  nelle tre variabili  $y$ ,  $\dot{y}$  e  $t$ , consideriamo i due cammini  $y = y(t)$  e  $Y(t) = y(t) + \alpha\eta(t)$  passanti per i punti  $(t_1, y_1)$  e  $(t_2, y_2)$ , dove  $\alpha$  è un parametro. Quindi  $y(t_1) = Y(t_1) = y_1$  e  $y(t_2) = Y(t_2) = y_2$  e dunque

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0. \quad (\text{IX.3})$$

Calcolando la derivata dell'integrale d'azione

$$S = S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f(Y, \dot{Y}, t) dt$$

nella (IX.1) rispetto alla variabile  $\alpha$  (rispetto alla curva  $Y(t)$ ) otteniamo, utilizzando l'integrazione per parti e le relazioni (IX.3),

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} - \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt + \left[ \eta \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \eta \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt, \end{aligned}$$

dove la  $\eta = \eta(t)$  è una funzione arbitraria di classe  $C^1$  che verifica la (IX.3). Di conseguenza,  $S'(\alpha) = 0$  se e solo se il cammino  $y = y(t)$  è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (\text{IX.4})$$

Tornando all'esempio (IX.2), sostituiamo  $f(y, \dot{y}, t) = \sqrt{1 + (\dot{y})^2}$  nell'equazione di Eulero-Lagrange (IX.4). Poichè la  $f$  non dipende da  $y$ , risulta che

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}$$

è costante, cioè  $\dot{y}$  è costante. In altre parole, la soluzione che minimizza l'integrale d'azione, è il segmento che collega i punti  $y_1$  e  $y_2$ , cioè

$$y(t) = \frac{(t_2 - t)y_1 + (t - t_1)y_2}{t_2 - t_1}.$$

**Esempio IX.1 (La brachistocrona)** Dati due punti  $P_1$  e  $P_2$ , con il primo punto posto a una quota superiore a quella del secondo punto, quale deve essere la forma che dobbiamo dare a uno scivolo privo di attrito affinché uno slittino

lasciato scivolare dal punto  $P_1$  raggiunga il punto  $P_2$  nel minor tempo possibile? Il tempo di percorrenza da  $P_1$  a  $P_2$  è

$$\text{tempo}(P_1 \mapsto P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

in cui la velocità alla quota generica  $y$  vale  $v = \sqrt{2gy}$ .<sup>1</sup> Poichè

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(y))^2 + 1} dy,$$

dove  $x = x(y)$  è la funzione incognita e  $(dx/dy) = x'(y)$ , risulta

$$\text{tempo}(P_1 \mapsto P_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy,$$

essendo zero la quota in  $P_1$  e  $-y_2$  la quota in  $P_2$ . L'equazione di Eulero-Lagrange è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}} = \frac{d}{dy} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}},$$

e, osservando che il primo membro non dipende da  $x$ , questa equazione si può scrivere come:

$$\frac{x'(y)}{\sqrt{x'(y)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{y}{2a}},$$

dove  $a$  è un'opportuna costante positiva. Poichè  $x(y)$  è una funzione crescente, risulta

$$x'(y) = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

Infine, utilizzando la sostituzione  $y = a(1 - \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ), si trova

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \sqrt{\frac{\hat{y}}{2a - \hat{y}}} d\hat{y} = \int_0^\theta \sqrt{\frac{2a \sin^2(\frac{1}{2}\hat{\theta})}{2a \cos^2(\frac{1}{2}\hat{\theta})}} a \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} \\ &= \int_0^\theta \frac{\sin(\frac{1}{2}\hat{\theta})}{\cos(\frac{1}{2}\hat{\theta})} 2a \sin(\frac{1}{2}\hat{\theta}) \cos(\frac{1}{2}\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\ &= 2a \int_0^\theta \sin^2(\frac{1}{2}\hat{\theta}) d\hat{\theta} = a \int_0^\theta [1 - \cos \hat{\theta}] d\hat{\theta} \\ &= a(\theta - \sin \theta). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Iniziando con velocità uguale a zero abbiamo per l'accelerazione, velocità e distanza percorsa al tempo  $t$ :  $g$ ,  $gt$  e  $s = \frac{1}{2}gt^2$ . Quindi  $t = \sqrt{2s/g}$  e  $v = \sqrt{2gs}$ .

Quindi il cammino consiste nella curva rappresentata parametricamente da

$$\begin{aligned}x &= a(\theta - \sin \theta), \\y &= a(1 - \cos \theta),\end{aligned}$$

dove  $0 \leq \theta \leq a$ . Tali equazioni costituiscono la parametrizzazione di una cicloide.

**Esempio IX.2 (Superfici di rotazione)** Consideriamo il solido di rotazione

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z), z_1 \leq z \leq z_2\},$$

essendo  $g = g(z)$  una funzione positiva di classe  $C^1$ . Allora il volume e l'area della superficie tonda (l'area del bordo senza i dischi contenuti nei piani  $z = z_1$  e  $z = z_2$ ) sono date dalle espressioni

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \pi \int_{z_1}^{z_2} g(z)^2 dz, \\ \text{Area} &= 2\pi \int_{z_1}^{z_2} g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz.\end{aligned}$$

Supponiamo ora che  $g(z_1) = g_1$  e  $g(z_2) = g_2$ . Minimizzando il volume si trova l'equazione di Eulero-Lagrange

$$2\pi g = 0,$$

che non possiede alcuna soluzione soddisfacente le condizioni  $g(z_1) = g_1$  e  $g(z_2) = g_2$  per  $g_1^2 + g_2^2 > 0$ . Minimizzando l'area tonda si trova l'equazione differenziale (di Eulero-Lagrange)

$$2\pi \sqrt{1 + (g')^2} = 2\pi \frac{d}{dz} \left( g \frac{g'}{\sqrt{1 + (g')^2}} \right),$$

oppure

$$\sqrt{1 + (g')^2} = g' \frac{g'}{\sqrt{1 + (g')^2}} + g \frac{1}{[1 + (g')^2]^{3/2}} g'',$$

oppure

$$1 + (g')^2 = gg'',$$

un'equazione differenziale non facilmente risolvibile.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Ponendo  $p = g'$  e scrivendo l'equazione differenziale in termini della variabile  $p$ , risulta un'equazione differenziale a variabili separabili di soluzione  $g(p) = c\sqrt{p^2 + 1}$ , dove  $c$  è un'opportuna costante positiva. Sostituendo  $p = g'$ , risulta l'equazione differenziale a variabili separabili  $g = c\sqrt{1 + (g')^2}$  di soluzione  $g = g_1 \cosh([z - z_1]/c) \pm \sqrt{g_1^2 - c^2} \sinh([z - z_1]/c)$ , dove  $c$  segue dalla condizione  $g(z_2) = g_2$ .

Complichiamoci ora la vita minimizzando l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[y_1, \dots, y_N, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_N, t] dt, \quad (\text{IX.5})$$

dove  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$  è un cammino in  $\mathbb{R}^N$  che collega i due punti  $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, \dots, y_N^1)$  e  $\mathbf{y}^2 = (y_1^2, \dots, y_N^2)$ . Supponiamo che la  $f$  sia di classe  $C^1$  nelle  $2N + 1$  variabili  $y_1, \dots, y_N, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_N$  e  $t$  e perturbiamo il cammino  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{y} + \alpha \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N), \\ \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_N), \end{cases}$$

essendo  $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{Y}(t_1) = \mathbf{y}^1$  e  $\mathbf{y}(t_2) = \mathbf{Y}(t_2) = \mathbf{y}^2$ . Quindi

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(t_2) = 0. \quad (\text{IX.6})$$

Calcolando la derivata dell'integrale d'azione  $S = S(\alpha)$  nella (IX.1) rispetto alla variabile  $\alpha$  otteniamo, utilizzando l'integrazione per parti e la relazione (IX.6)

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left( \eta_j \frac{\partial f}{\partial y_j} + \dot{\eta}_j \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left( \eta_j \frac{\partial f}{\partial y_j} - \eta_j \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right) dt + \sum_{j=1}^N \left[ \eta_j \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \eta_j \left( \frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right) dt, \end{aligned}$$

dove la  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  è una funzione arbitraria di classe  $C^1$  che verifica la (IX.6). Di conseguenza,  $S'(\alpha) = 0$  se e solo se il cammino  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  è soluzione delle  $N$  equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{IX.7})$$

## 2 Equazioni di Lagrange

Avendo a disposizione i metodi del calcolo delle variazioni, possiamo intraprendere lo studio della formulazione della meccanica che Joseph Lagrange (1736-1813) (nome di battesimo Giuseppe Lodovico Lagrangia) pubblicò nel 1788 [Mécanique Analytique]. Il vantaggio principale delle equazioni lagrangiane è il fatto che esse

mantengono la stessa forma in ogni sistema di coordinate. Inoltre la formulazione lagrangiana permette di eliminare le reazioni vincolari. In questo modo si semplifica notevolmente la maggior parte dei problemi in quanto le reazioni vincolari sono generalmente incognite.

Consideriamo il caso particolare più semplice: una singola particella sotto l'effetto di una forza conservativa. In tal caso l'energia cinetica della particella vale

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

essendo  $m$  la sua massa. L'energia potenziale è  $U = U(x, y, z)$ . La lagrangiana è definita come

$$\mathcal{L} = T - U,$$

quindi come *differenza* dell'energia cinetica e di quella potenziale. Cerchiamo ora di minimizzare l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) dt.$$

La traiettoria  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  che minimizza un tale integrale d'azione deve soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}},$$

che possono anche scriversi come:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}.$$

Tenuto conto dell'espressione dell'energia cinetica si trova

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = m\ddot{y}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = m\ddot{z},$$

ovvero in forma vettoriale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U,$$

che coincide con la seconda legge di Newton per una forza conservativa. In altre parole, la formulazione lagrangiana è equivalente alla seconda legge di Newton.

Abbiamo trovato il seguente **Principio di Hamilton**: *Il moto effettivo di una particella dal punto  $P_1$  al punto  $P_2$  nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$  è tale che l'integrale di azione*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

assume su di esso un valore stazionario.

La generalizzazione delle idee precedenti al caso di un sistema costituito da  $N$  particelle non vincolate è banale. In tal caso abbiamo

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\dot{\mathbf{r}}_j|^2}_{=\text{energia cinetica}} - \underbrace{U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}_{\text{energia potenziale}}.$$

Il principio di Hamilton ha la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \ddot{x}_j, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} = m_j \ddot{y}_j, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} = m_j \ddot{z}_j,$$

per  $j = 1, 2, \dots, N$ . Abbiamo trovato  $N$  copie della seconda legge di Newton:

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = -\nabla_{\mathbf{r}_j} U, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

### 3 Principio di Hamilton: Sistemi Vincolati

La potenza dell'impostazione lagrangiana si rivela soprattutto nella possibilità di trattare sistemi vincolati. In tal caso basta esprimere la lagrangiana nel numero minimo di coordinate indipendenti e enunciare le equazioni di Eulero-Lagrange.

Si consideri un sistema arbitrario di  $N$  particelle occupanti le posizioni  $\mathbf{r}_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). I parametri  $q_1, \dots, q_n$  si dicono *coordinate generalizzate* (o *lagrangiane*) del sistema se e solo se ogni vettore posizione  $\mathbf{r}_j$  si può esprimere in funzione delle  $q_1, \dots, q_n$  ed eventualmente del tempo  $t$ :

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, \dots, q_n, t), \quad j = 1, \dots, N,$$

e se, viceversa, ogni  $q_l$  si può esprimere in funzione delle  $\mathbf{r}_j$  ed eventualmente del tempo  $t$ :

$$q_l = q_l(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad l = 1, \dots, n.$$

Inoltre si richiede che il numero  $n$  delle coordinate generalizzate sia il minimo numero intero che consente di descrivere il sistema in questo modo. Nello spazio tridimensionale il numero  $n$  delle coordinate generalizzate di un sistema di  $N$  particelle non può superare  $3N$ . Per i sistemi vincolati questo numero è sempre minore, a volte anche molto minore.

Il *grado di libertà* di un sistema è il numero di coordinate che possono essere fatte variare indipendentemente in un piccolo spostamento. In altre parole è il numero delle direzioni indipendenti in cui il sistema può muoversi a partire da una configurazione iniziale data. Un sistema di  $N$  particelle nello spazio a tre

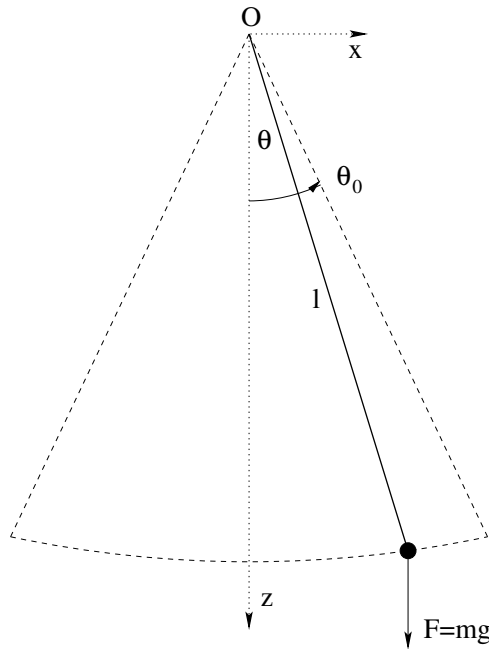


Figura IX.1: Il pendolo semplice.

dimensioni si dice *libero* se il grado di libertà è uguale a  $3N$  e *vincolato* se è strettamente minore di  $3N$ .

I sistemi per cui il grado di libertà è uguale al numero minimo  $n$  delle sue coordinate lagrangiane si dicono anche *olonomi*. Un sistema olonomo è quindi un sistema con  $n$  gradi di libertà che può essere descritto da  $n$  coordinate generalizzate  $q_1, \dots, q_n$ . In questo corso non ci occuperemo dei sistemi anolonomi.

Discutiamo ora due esempi dal punto di vista lagrangiano.

**Esempio IX.3 (Pendolo semplice)** Un piombino di massa  $m$  è fissato a un'estremità di un'asta priva di massa, a sua volta fissata all'origine  $O$  e libera di ruotare senza attrito nel piano  $xz$ . Il piombino è vincolato dall'asta in modo tale che la distanza  $l = \sqrt{x^2 + z^2}$  rimane costante. La posizione del piombino è data da

$$x = l \sin \theta, \quad z = l \cos \theta,$$

essendo  $\theta$  l'angolo tra l'asta e il verticale. L'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $U$  hanno la seguente forma:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad U = mgl(1 - \cos \theta),$$

essendo  $g$  l'accelerazione gravitazionale. Quindi

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta),$$



e l'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$-mgl \sin \theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \ddot{\theta},$$

che si può scrivere più semplicemente come

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Conclusione: Abbiamo un singolo grado di libertà e una singola coordinata generalizzata,  $\theta$ , per cui  $\mathbf{r} = (l \sin \theta, 0, l \cos \theta)$  e  $\theta = \arctan(x/z)$ .

**Esempio IX.4 (Problema dei due corpi)** La forza esercitata da un corpo esercita sull'altro è attrattiva, diretta lungo il segmento congiungente e dipende soltanto dalla loro distanza  $r$ . Utilizzando il sistema di riferimento in cui il baricentro delle due masse si trova nell'origine, abbiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r),$$

essendo  $\mu$  la massa ridotta e  $(r, \theta)$  le coordinate polari nel piano del moto. Abbiamo le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}),$$

$$\mu r \dot{\theta}^2 - U'(r) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}.$$

La prima equazione di Eulero-Lagrange conduce alla costante di moto  $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ , il momento angolare. Sostituendo  $\dot{\theta} = L/\mu r^2$ , otteniamo dalla seconda equazione di Eulero-Lagrange

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -U'(r).$$

Nel caso della forza gravitazionale tra il Sole e un pianeta abbiamo

$$U(r) = -\frac{GM\mu}{r},$$

essendo  $G$  la costante gravitazionale e  $M$  la massa totale. Conclusione: Abbiamo due gradi di libertà e due coordinate generalizzate,  $r$  e  $\theta$ , per cui  $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(y/x)$ .

Deriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso di una singola particella vincolata. Per ragioni di semplicità supponiamo che la particella sia vincolata

a muoversi mantenendosi sempre su una superficie data. In tal caso la particella ha due gradi di libertà e il suo moto si può descrivere con due coordinate generalizzate indipendenti  $q_1$  e  $q_2$ .

Le forze che possono agire sulla particella sono di due tipi. Il primo tipo comprende le reazioni vincolari (che in generale non sono conservative): indicheremo con  $\mathbf{F}_v$  la risultante delle forze vincolari agenti sulla particella, nel nostro caso normale alla superficie. Il secondo tipo comprende tutte le forze rimanenti agenti sulla particella. La loro risultante è supposta conservativa:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}, t),$$

dove il potenziale  $U$  può dipendere dal tempo  $t$ . La forza totale sulla particella è  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}$ .

Al solito la lagrangiana è definita come

$$\mathcal{L} = T - U,$$

dove l'energia potenziale è dovuta alle sole forze non vincolari. Vedremo che la formulazione lagrangiana permetterà di eliminare le forze vincolari dalle incognite del problema.

Indicheremo con  $\mathbf{r}(t)$  la traiettoria effettiva della particella, essendo  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$  e  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$  le posizioni iniziale e finale della particella, ambedue supposte prefissate. Indichiamo con  $\mathbf{R}(t)$  un qualunque moto variato passante per gli stessi punti. Conviene scrivere

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  è un vettore infinitesimale che congiunge i punti  $\mathbf{r}(t)$  del moto effettivo con quelli  $\mathbf{R}(t)$  nel moto variato. Assumeremo che entrambi le traiettorie  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{R}(t)$  appartengano alla superficie vincolare. Poichè entrambi le traiettorie  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{R}(t)$  congiungono gli stessi due punti iniziale e finale, si ha  $\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) = 0$ .

Indichiamo con  $S$  l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) dt$$

calcolato lungo un qualunque cammino  $\mathbf{R}(t)$  sulla superficie vincolare e indichiamo con  $S_0$  il valore che esso assume lungo il moto effettivo  $\mathbf{r}(t)$ . Studiamo l'andamento della differenza

$$\delta S = S - S_0$$

se  $|\boldsymbol{\varepsilon}| \rightarrow 0$ . La differenza  $\delta S$  è l'integrale della differenza tra le lagrangiane calcolate lungo i due moti:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

Poichè

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}, t), \quad \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{R}}|^2 - U(\mathbf{R}, t),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(|\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2 - |\dot{\mathbf{r}}|^2) - [U(\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}, t) - U(\mathbf{r}, t)] \\ &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2), \end{aligned}$$

dove  $O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2)$  contiene la somma di tre termini che, nel dividere da  $|\boldsymbol{\varepsilon}|^2$ ,  $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2$  e  $|\boldsymbol{\varepsilon}| |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|$ , rispettivamente, rimangono limitate se  $|\boldsymbol{\varepsilon}| + |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|$  tende a zero. Dunque

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U] dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U] dt + [m\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}]_{t=t_1}^{t_2} + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot [m\ddot{\mathbf{r}} + \nabla U] dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2), \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato l'integrazione per parti e tenuto conto che  $\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) = 0$ . Poichè  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}$  e  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , risulta

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}_v dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2).$$

Tranne un termine di tipo  $O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2)$ , il vettore  $\boldsymbol{\varepsilon}$  appartiene al piano tangente alla superficie, mentre la forza vincolare  $\mathbf{F}_v$  è ortogonale alla superficie. Quindi

$$\delta S = O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2),$$

e l'integrale d'azione è stazionario lungo il moto effettivo.

Abbiamo dimostrato, in modo non troppo rigoroso, la validità del principio di Hamilton, ossia che l'integrale d'azione è stazionario lungo il moto che la particella effettivamente compie. Nella dimostrazione non sono ammessi tutti gli spostamenti ma soltanto quelli tra due moti appartenenti alla superficie. Questo fatto significa che non sussistono le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto alle tre coordinate cartesiane, ma solo rispetto alle coordinate generalizzate. Nel nostro caso ( $n = 2$  vincoli e  $n = 2$  coordinate generalizzate  $q_1$  e  $q_2$ ) possiamo scrivere l'integrale d'azione in funzione di  $q_1$  e  $q_2$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt$$

e questo deve essere stazionario per *ogni* variazione di  $q_1$  e  $q_2$  rispetto al moto effettivo  $[q_1(t), q_2(t)]$ . Si verificano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = 0.$$

È abbastanza semplice generalizzare la derivazione del principio di Hamilton ad un sistema vincolato di  $N$  particelle. *Un sistema olonomo con  $n$  gradi di libertà (e quindi  $n$  coordinate generalizzate  $(q_1, \dots, q_n)$ , soggetto a forze non vincolari il cui risultante è derivabile da un'energia potenziale  $U(q_1, \dots, q_n, t)$ , è completamente determinato dalle  $n$  equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} = 0, \quad l = 1, \dots, n. \quad (\text{IX.8})$$

**Esempio IX.5 (Moto su una superficie cilindrica)** Si consideri una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi senza attrito sulla superficie cilindrica  $x^2 + y^2 = R^2$  sotto l'effetto della forza centrale  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ , essendo  $k$  una costante positiva. Utilizzando le coordinate cilindriche  $(\rho, \theta, z)$ , dove  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , l'energia cinetica  $T$  e quella potenziale  $U$  valgono

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2).$$

Quindi la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2),$$

essendo la particella vincolata a muoversi sulla superficie  $\rho = R$ . Scegliamo ora le coordinate generalizzate  $z$  e  $\theta$ . Risultano le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &\implies -kz = m\ddot{z}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &\implies \frac{d}{dt} mR^2\dot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono del tipo  $z = A \cos(\omega t - \delta)$  e  $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$ , essendo  $\omega = \sqrt{k/m}$  e  $mR^2\omega_0$  il momento angolare attorno all'asse  $z$ .

**Esempio IX.6 (Biglia su una guida rotante)** Una biglia di massa  $m$  è vincolata a una guida costituita da un filo di ferro circolare di raggio  $R$ . La guida appartiene a un piano verticale ed è fatta ruotare attorno al suo diametro verticale con velocità angolare  $\omega$ . La posizione della biglia sulla guida è determinata dall'angolo  $\theta$  misurato a partire della verticale. La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR(1 - \cos \theta),$$

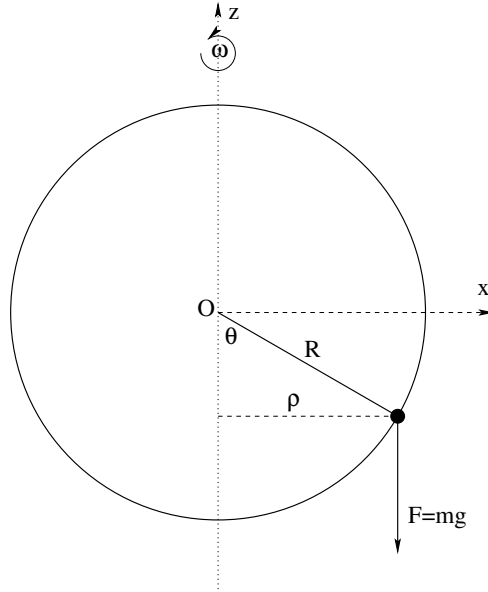


Figura IX.2: La biglia su una guida rotante.

a cui corrisponde l'equazione di Eulero-Lagrange

$$mR^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta = mR^2\ddot{\theta}.$$

Dividendo per  $mR^2$ , otteniamo l'equazione del moto

$$\ddot{\theta} = \left( \omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta.$$

Moltiplicando per  $2\dot{\theta}$  e integrando otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2(1 - \cos 2\theta) - \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta),$$

dove la costante di integrazione  $\dot{\theta}_0$  verifica  $|\dot{\theta}_0| \geq \sqrt{2g/R}$ . Ne segue

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2(1 - \cos 2\theta) - \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)}},$$

e il calcolo della primitiva  $t(\theta)$  conduce ad un cosiddetto integrale ellittico (non esprimibile analiticamente).

## 4 Momenti generalizzati

In un sistema con  $n$  coordinate generalizzate  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) le quantità  $F_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{L}/\partial q_i$  si dicono *forze generalizzate* e le quantità  $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$  *quantità di moto*

*generalizzate* o *momenti generalizzati*. Ciò consente di riformulare le  $n$  equazioni di Eulero-Lagrange come fossero  $n$  componenti della seconda legge di Newton:

$$F_i = \frac{d}{dt}p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

In particolare, se la lagrangiana  $\mathcal{L}$  non dipende da una certa coordinata  $q_i$ , allora  $F_i = (\partial\mathcal{L}/\partial q_i) = 0$  e la quantità di moto generalizzata  $p_i$  si conserva. Tali coordinate generalizzate si dicono *ignorabili* o *cicliche*.

Un caso interessante è il problema del proiettile soggetto solamente alla forza gravitazionale. La sua energia potenziale è  $U = mgz$ , e la sua lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

La forza generalizzata è proprio quella usuale. La quantità di moto generalizzata è quella usuale. Poichè  $\mathcal{L}$  non dipende da  $x$  e  $y$ , si conservano le quantità di moto  $p_x$  e  $p_y$ .

Per motivi di efficienza scegliamo le coordinate generalizzate in modo che la lagrangiana dipenda dal minor numero di coordinate generalizzate  $q_i$ , per poter derivare il maggior numero di leggi di conservazione per le quantità di moto generalizzate.

Calcoliamo la derivata della lagrangiana rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=p_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i \} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui la lagrangiana  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo, cioè nel caso in cui  $(\partial\mathcal{L}/\partial t) = 0$ , si può concludere che la cosiddetta *hamiltoniana*

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

è una quantità conservata.

Dimostriamo ora che l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia totale del sistema. Poichè  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , si ottiene l'identità

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Perciò

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

essendo

$$A_{jk} = A_{jk}(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Dunque, utilizzando il fatto che  $A_{jk} = A_{kj}$ ,

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{j=1}^n A_{jj} \dot{q}_j^2 + \sum_{j<k} A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \\ &= A_{ii} \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{k>i} A_{ik} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j<i} A_{ji} \dot{q}_j \\ &= \sum_{l=1}^n A_{il} \dot{q}_l. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l=1}^n A_{il} \dot{q}_l \right) \dot{q}_i = \sum_{i,l=1}^n A_{il} \dot{q}_i \dot{q}_l = 2T.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - [T - U] = T + U,$$

che è l'energia totale.

## 5 Lagrangiana per la Forza Magnetica

Finora abbiamo introdotto la formulazione lagrangiana esclusivamente per i sistemi il cui risultante delle forze non vincolari è conservativo. Ponendo  $\mathcal{L} = T - U$ , si è poi passati alle equazioni di Eulero-Lagrange, considerate un sistema completo e minimale (in termini del numero delle equazioni) di equazioni che descrivono il moto del sistema. Ciò non ci impedisce di introdurre la lagrangiana come qualsiasi funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

tale che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange descrivono completamente e in modo minimale il moto del sistema, anche se non esistesse il potenziale  $U$ .

Un esempio significativo è il seguente: Si consideri una particella di massa  $m$  e carica elettrica  $q$  in moto in un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$ . Sulla particella agisce la forza (non conservativa) di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right),$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità della particella e  $c$  è la velocità della luce. La seconda legge di Newton assume la forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (\text{IX.9})$$

Possiamo trovare, in modo non unico,<sup>3</sup> il potenziale elettrico  $V(\mathbf{r}, t)$  e quello magnetico  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  tali che

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

Definiamo la funzione lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - q \left( V - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \right) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - qV + \frac{q}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \end{aligned} \quad (\text{IX.10})$$

Possiamo quindi scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &\implies -q \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{q}{c} \left\{ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\} = \frac{d}{dt} \left( m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &\implies -q \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{q}{c} \left\{ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right\} = \frac{d}{dt} \left( m\dot{y} + \frac{q}{c} A_y \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &\implies -q \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{q}{c} \left\{ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right\} = \frac{d}{dt} \left( m\dot{z} + \frac{q}{c} A_z \right). \end{aligned}$$

Queste tre equazioni conducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} -q \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{q}{c} \left[ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] &= m\ddot{x} + \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right], \\ -q \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{q}{c} \left[ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] &= m\ddot{y} + \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial A_y}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right], \\ -q \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{q}{c} \left[ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] &= m\ddot{z} + \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>I campi elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$  non cambiano sotto le trasformazioni  $V \mapsto V + \text{cost.}$  e  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \phi$  per qualunque  $\phi$  che non dipende da  $t$ .



Queste ultime sono equivalenti a:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \dot{y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{q}{c} \dot{z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \\ m\ddot{y} &= -q \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \dot{z} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{q}{c} \dot{x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \\ m\ddot{z} &= -q \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \dot{x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{q}{c} \dot{y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

oppure:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x, \\ m\ddot{y} &= -q \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_y, \\ m\ddot{z} &= -q \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_z, \end{aligned}$$

o, in forma vettoriale,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -q \left( \nabla V + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})],$$

la quale implica la (IX.9).

Si consideri il caso particolare in cui  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  è costante e  $V \equiv 0$ . In tal caso si scelga

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} B(-y, x, 0) = \frac{1}{2} B r \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

essendo  $\hat{\mathbf{e}}_\theta = -(\sin \theta) \mathbf{i} + (\cos \theta) \mathbf{j}$  il versore tangenziale. Utilizzando le coordinate cilindriche, risulta facilmente

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z} \mathbf{k}, \quad |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2,$$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} B r (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z} \mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{2} B r^2 \dot{\theta},$$

essendo  $\hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  e  $\mathbf{k}$  ortogonali tra loro. Di conseguenza,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2c} r^2 \dot{\theta},$$

in cui risultano cicliche le variabili  $\theta$  e  $z$ . Quindi le quantità di moto generalizzate

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} + \frac{qB}{2c} r^2, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m \dot{z},$$

vengono conservate. Ci rimane una singola equazione di Eulero-Lagrange non banale:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \implies m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{qB}{c} r\dot{\theta},$$

oppure:

$$m\ddot{r} = mr \left( \frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc} \right)^2 + \frac{qB}{c} r \left( \frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc} \right) = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{q^2 B^2 r}{4mc^2}.$$

Moltiplicando ambedue le parti da  $2\dot{r}/m$  e calcolando la primitiva, risulta per un'opportuna costante positiva  $\gamma$ :

$$\dot{r}^2 = \gamma^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} - \frac{q^2 B^2 r^2}{4m^2 c^2}.$$

Scegliendo  $\gamma > 0$  tale che il secondo membro si annulla per  $r = r_0$ , si ottiene il moto lungo l'elica  $r = r_0$ ,  $\dot{\theta} = \text{cost.}$  e  $\dot{z} = \text{cost.}$  Uno dei moti consentiti dal sistema lagrangiana è l'elica attorno al campo magnetico costante  $\mathbf{B}$ .

## 6 Moltiplicatori di Lagrange

Finora abbiamo discusso la formulazione lagrangiana di un sistema olonomo vincolato sempre nello stesso modo, utilizzando i vincoli per arrivare ad un minor numero di coordinate generalizzate. Una tale riduzione del numero delle variabili non è sempre facile da eseguire. In certi casi potrebbe essere opportuno utilizzare un sistema con più variabili, sfruttando alcuni vincoli esplicitamente.

Consideriamo, per esempio, un sistema con soltanto tre coordinate cartesiane  $x, y, z$ , legate da un'equazione del vincolo del tipo

$$f(x, y, z) = 0.$$

Al posto della lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$  si consideri la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda(t)f(x, y, z),$$

essendo  $\lambda(t)$  un cosiddetto *moltiplicatore di Lagrange*. Al posto delle solite equazioni di Eulero-Lagrange, abbiamo le seguenti equazioni modificate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &= 0, \end{aligned}$$

più il vincolo  $f(x, y, z) = 0$ .

Consideriamo il caso di una singola particella soggetta ad una forza conservativa. La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z),$$

e le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= m\ddot{x}, \\ -\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= m\ddot{y}, \\ -\frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= m\ddot{z}, \end{aligned}$$

o, in forma vettoriale,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U + \lambda \nabla f.$$

Quindi la forza vincolare vale  $\mathbf{F}_v = \lambda \nabla f$  e risulta essere ortogonale alla superficie di equazione  $f(x, y, z) = 0$ .

Nel caso di due vincoli,  $f(x, y, z) = 0$  e  $g(x, y, z) = 0$ , si derivano le equazioni di Eulero-Lagrange dalla lagrangiana ampliata

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda(t)f(x, y, z) + \mu(t)g(x, y, z),$$

essendo  $\lambda$  e  $\mu$  due moltiplicatori di Lagrange.

**Esempio IX.7 (Pendolo semplice)** Consideriamo la lagrangiana (confronta con l'Esempio IX.3)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

sotto i vincoli  $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$  e  $g(x, y, z) = y = 0$ . Partendo dalla lagrangiana ampliata

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda(x^2 + z^2 - l^2) + \mu y,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= m\ddot{x}, \\ \mu &= m\ddot{y}, \\ -mg + 2\lambda z &= m\ddot{z}, \end{aligned}$$

più i vincoli  $x^2 + z^2 = l^2$  e  $y = 0$ . Il vincolo  $y = 0$  ci consente di eliminare l'equazione per  $y$  e di arrivare al sistema di tre equazioni

$$2\lambda x = m\ddot{x}, \quad -mg + 2\lambda z = m\ddot{z}, \quad x^2 + z^2 = l^2.$$

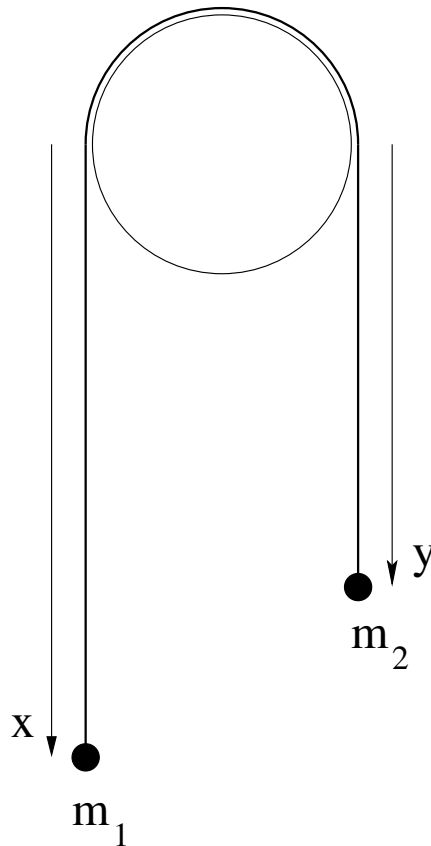


Figura IX.3: Macchina di Atwood.

Moltiplicando la prima equazione per  $\dot{x}$ , la seconda per  $\dot{z}$  e calcolando la somma si ottiene

$$2\lambda(x\dot{x} + z\dot{z}) = m[\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z} + g\dot{z}],$$

e quindi

$$\lambda \underbrace{(x^2 + z^2)}_{=l^2} = \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}_{=T} + \underbrace{mgz}_{=U} + \text{cost.}$$

Allora la costante vale  $\lambda l^2 - \mathcal{H}$ , essendo  $\mathcal{H}$  l'energia totale del sistema.

**Esempio IX.8 (Macchina di Atwood)** Si consideri la macchina di Atwood formata da due masse,  $m_1$  e  $m_2$ , collegate da un filo privo di massa e inestendibile che passa per una puleggia, priva di attrito. Essendo la lunghezza del filo,  $l$ , fissa, la massa  $m_1$  si trova al di sotto di una distanza  $x$  da un opportuno livello di riferimento e la massa  $m_2$  al di sotto di una distanza  $y$  da questo livello, mentre

$x + y = \text{cost.}$  Allora la lagrangiana ampliata è

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2}_{=T} + \underbrace{(m_1gx + m_2gy)}_{=-U} + \lambda(x + y - L),$$

dove  $L = l - \pi R$  (essendo  $R$  il raggio della puleggia). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono le seguenti:

$$\begin{aligned} m_1g + \lambda &= m_1\ddot{x}, \\ m_2g + \lambda &= m_2\ddot{y}, \end{aligned}$$

accompagnate dal vincolo  $x + y = L$ . Calcolando la somma delle due equazioni di Eulero-Lagrange e sfruttando il fatto che  $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$ , otteniamo

$$0 = \ddot{x} + \ddot{y} = \frac{m_1g + \lambda}{m_1} + \frac{m_2g + \lambda}{m_2},$$

quindi  $\lambda = -2gm_1m_2/(m_1 + m_2)$ . Di conseguenza,

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \quad \ddot{y} = \frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Integrando due volte, troviamo le soluzioni

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0t + \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2, \quad y(t) = L - x_0 - \dot{x}_0t - \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2.$$

Alternativamente, eliminando la variabile  $y$ ,  $y = L - x$ , si può partire dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

e arrivare all'equazione di Eulero-Lagrange

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{x},$$

che conduce alla stessa soluzione  $x(t)$  già trovata. La  $y(t)$  si trova poi dall'equazione  $y(t) = L - x(t)$ .



# Capitolo X

## Equazioni del Moto di Hamilton

In questo capitolo verrà sviluppata la formulazione hamiltoniana della meccanica analitica. Ciò conduce allo studio delle equazioni di Hamilton, delle trasformazioni canoniche, delle parentesi di Lagrange e di Poisson e dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

### 1 Equazioni di moto di Hamilton

A un sistema avente  $n$  gradi di libertà corrispondono  $n$  equazioni di moto di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{X.1})$$

essendo  $q_1, \dots, q_n$  le coordinate generalizzate. Poichè le equazioni (X.1) sono del secondo ordine, il moto del sistema è completamente determinato, ad ogni istante di tempo, se sono assegnati i  $2n$  valori iniziali di  $q_1, \dots, q_n$  e  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Definiamo ora i momenti generalizzati (o le quantità di moto generalizzate)  $p_1, \dots, p_n$  come

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{X.2})$$

Utilizzando la (X.1) si verifica facilmente che

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{X.3})$$

Applichiamo ora la cosiddetta *trasformazione di Legendre* alle equazioni di Eulero-Lagrange (X.1) con l'obiettivo di arrivare ad un sistema di equazioni nelle variabili  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$ . Introduciamo la hamiltoniana

$$\mathcal{H}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (\text{X.4})$$

Il suo differenziale è dato da

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt.$$

D'altra parte, utilizzando la definizione (X.4) dell'hamiltoniana, si ha

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n \cancel{p_i d\dot{q}_i} - \sum_{i=1}^n \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

dove si sono sfruttate le equazioni di Eulero-Lagrange (X.1), la definizione dei momenti generalizzati  $p_i$  [vedi (X.2)] e delle loro derivate  $\dot{p}_i$  [vedi (X.4)]. Troviamo due espressioni per il differenziale  $d\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Di conseguenza, sfruttando l'indipendenza delle variabili  $q_i$ ,  $p_i$  e  $t$  (e quindi degli spostamenti virtuali  $dq_i$ ,  $dp_i$  e  $dt$ ), si ottengono

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (\text{X.5a})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad (\text{X.5b})$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (\text{X.5c})$$

La (X.5a) e la (X.5b) si chiamano *equazioni canoniche di Hamilton*. Esse costituiscono un sistema di  $2n$  equazioni del primo ordine che prendono il posto delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Osserviamo ora che una coordinata ciclica  $q_j$ , cioè una coordinata che non appare esplicitamente nella lagrangiana, è anche ciclica per quanto riguarda l'hamiltoniana. Infatti, se  $q_j$  non appare nella lagrangiana, allora  $(\partial \mathcal{L} / \partial q_j) = 0$  e quindi (per (X.4))

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$



che significa che il momento generalizzato  $p_j$  viene conservato. Dalla (X.5b) segue che  $(\partial\mathcal{H}/\partial q_j) = 0$ , e quindi  $q_j$  non appare esplicitamente nell'hamiltoniana. Viceversa, se  $q_j$  non appare nell'hamiltoniana, allora  $\dot{p}_j = 0$  e dunque  $(\partial\mathcal{L}/\partial q_j) = 0$ . In altre parole, la coordinata generalizzata  $q_j$  è ciclica per la lagrangiana, se e solo se essa è ciclica per l'hamiltoniana, se e solo se il momento generalizzato  $p_j$  è una quantità conservata.

Sia  $q_n$  una coordinata ciclica. Allora la lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n, t),$$

in cui figurano tutte le velocità generalizzate  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Il problema ha ancora  $n$  gradi di libertà. D'altra parte, la ciclicità della coordinata generalizzata  $q_n$  rende costante il momento generalizzato  $p_n$  e dunque rende banali le equazioni di Hamilton per  $i = n$ . Si ottiene un sistema di  $2(n-1)$  equazioni di Hamilton (le equazioni (X.5a) e (X.5b) per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) che contengono il momento generalizzato conservato  $p_n$  come parametro.

Il metodo di Routh consente di trattare agevolmente il caso in cui una parte delle coordinate è ciclica e l'altra parte non lo è. Tale metodo consiste nell'effettuare la trasformazione da  $(q_i, \dot{q}_i)$  a  $(q_i, p_i)$  solo per le coordinate che sono cicliche, ottenendo così le corrispondenti equazioni di moto sotto forma hamiltoniana, mentre le rimanenti coordinate continuano a essere governate dalle equazioni di Eulero-Lagrange. Se indichiamo ora con  $q_1, \dots, q_s$  le coordinate cicliche, possiamo introdurre una nuova funzione  $\mathcal{R}$ , detta *funzione di Routh*, secondo la seguente definizione:

$$\mathcal{R}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_s, \dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_{s+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (\text{X.6})$$

Il suo differenziale risulta pertanto

$$d\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=s+1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt,$$

da cui

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (\text{X.7a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (\text{X.7b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = s+1, \dots, n, \quad (\text{X.7c})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = s+1, \dots, n. \quad (\text{X.7d})$$

Si noti che, essendo cicliche le coordinate  $q_1, \dots, q_s$ , i corrispondenti momenti generalizzati  $p_1, \dots, p_s$  si conservano, giustificando l'ultimo membro della (X.7b). Le equazioni (X.7a) e (X.7b) relative alle coordinate  $q_1, \dots, q_s$  hanno la forma di equazioni di Hamilton con hamiltoniana  $\mathcal{R}$ , mentre le equazioni (X.7c) e (X.7d) indicano che le coordinate rimanenti possono essere ricavate dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = s + 1, \dots, n, \quad (\text{X.8})$$

con lagrangiana  $\mathcal{R}$ .

## 2 Leggi di conservazione

Abbiamo visto prima che l'hamiltoniana è una quantità conservata (uguale all'energia totale) se la lagrangiana non dipende dal tempo esplicitamente. Grazie alla (X.5c) una tale legge di conservazione vale anche se l'hamiltoniana non dipende dal tempo esplicitamente. Ora (ri)dimostriamo tale fatto utilizzando le equazioni di Hamilton (X.5a) e (X.5b). Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (\text{X.9})$$

**Esempio X.1 (Singola particella, forza centrale)** In tal caso

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r),$$

e quindi

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Essendo  $\mathcal{H} = T + U(r)$ , troviamo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r).$$

Ne escono quattro equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, & \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - U'(r), & \dot{p}_\theta &= 0.\end{aligned}$$

Si osservi che la coordinata  $\theta$  è ciclica e quindi che il momento generalizzato  $p_\theta$  (uguale al momento angolare) viene conservato.

**Esempio X.2 (Singola particella, forza elettromagnetica)** In tal caso

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - q \left( V - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \right),$$

essendo  $q$  la carica della particella,  $c$  la velocità della luce,  $V$  il suo potenziale e  $\mathbf{A}$  il suo potenziale magnetico [Vedi (IX.10)]. Possiamo scegliere come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane  $x, y, z$ , per cui

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = mv_i + \frac{q}{c} A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

L'hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 v_j p_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + qV = \frac{1}{2m} \left| \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right|^2 + qV.$$

### 3 Principio variazionale per l'hamiltoniana

Secondo il principio di Hamilton le equazioni di Eulero-Lagrange si trovano richiedendo che l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \tag{X.10}$$

sia stazionario al variare di tutti i moti con gli stessi punti iniziale  $\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}(t_1)$  e finale  $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}(t_2)$ , essendo  $\mathbf{q}^s = (q_1^s, \dots, q_n^s)$  per  $s = 1, 2$ . Sostituendo la (X.4) nella (X.10), si ottiene

$$\begin{aligned}0 &= \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) dt \\ &= \delta \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} p_i dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H} dt.\end{aligned}$$

Nello spazio delle configurazioni definito dalle  $n$  coordinate generalizzate, le configurazioni iniziale e finale del sistema agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  rispettivamente, sono rappresentate ciascuna da un punto. Con l'espressione *variazione dell'integrale* si intende la variazione del valore dell'integrale allorché si cambia la traiettoria percorsa dal punto rappresentativo del sistema tra i due punti estremi. La variazione va costruita mantenendo costante il tempo. Di conseguenza, il tempo di viaggio tra le due configurazioni iniziale e finale risulta lo stesso per tutte le traiettorie. In più, le traiettorie variate vanno considerate come costruite mediante una successione di spostamenti virtuali (che non implicano alcun cambio di  $t$ ) fatti a partire dai punti della traiettoria effettivamente percorsa. Dire allora che la variazione dell'integrale in un intorno della traiettoria effettiva è uguale a zero, è equivalente ad affermare che l'integrale ha un estremo in corrispondenza a questa traiettoria.

L'operazione di variazione  $\delta$  è esprimibile mediante i comuni metodi del calcolo differenziale, individuando con un parametro  $\alpha$  ciascuna delle possibili traiettorie nello spazio delle configurazioni. Le coordinate  $q_i$  di un punto dello spazio delle configurazioni diventano allora funzioni sia del tempo che di  $\alpha$ , l'ultimo parametro stando ad indicare qual'è il cammino di integrazione utilizzato. Si può allora considerare l'integrale d'azione  $S$  come una funzione di  $\alpha$ , per cui la variazione  $\delta$  viene a coincidere con l'espressione più familiare del differenziale corrispondente a un incremento  $d\alpha$  attorno al valore  $\alpha$  associato alla traiettoria reale:

$$\delta \mapsto d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (\text{X.11})$$

Nel seguito ricaveremo le equazioni di Hamilton dal principio di Hamilton, seguendo essenzialmente lo stesso procedimento. L'unica differenza sarà quella di trattare la variazione delle  $q_i$  e delle  $p_i$  come indipendenti.

Infatti,

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) dt \\ &= d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) dt. \end{aligned}$$

Il secondo termine sotto il segno dell'integrale viene riscritto tramite la seguente integrazione per parti:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = \left[ p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right]_{t=t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt,$$

poichè tutte le traiettorie variate hanno gli stessi punti estremi (cioè,  $q_i(t_1)$  e  $q_i(t_2)$  non dipendono da  $\alpha$ ) e quindi  $\partial q_i / \partial \alpha$  si annulla ai valori  $t_1$  e  $t_2$ . Di

conseguenza,

$$\begin{aligned}
\delta S &= d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i - \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right\} dt,
\end{aligned}$$

che si annulla. Poichè le variazioni  $\delta p_i$  e  $\delta q_i$  sono indipendenti, i loro coefficienti nella sommatoria sotto il segno dell'integrale si devono annullare. Così risultano le equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (\text{X.12a})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad (\text{X.12b})$$

dove  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Nella derivazione delle equazioni di Eulero-Lagrange dal principio di Hamilton abbiamo eliminato le variazioni  $\delta \dot{q}_i$  tramite  $n$  integrazioni per parti e trattato le variazioni  $\delta q_i$  come fossero indipendenti. Nella derivazione delle equazioni di Hamilton invece, abbiamo trattato tutte le  $2n$  variazioni  $\delta q_i$  e  $\delta p_i$  come fossero indipendenti.

## 4 Trasformazioni canoniche

Consideriamo il moto di un punto in presenza di una forza centrale. Tale moto è un moto piano e supponiamo che il piano del moto sia il piano  $xy$ . Si può studiare il moto utilizzando le coordinate cartesiane  $x$  e  $y$  oppure adottando le coordinate polari  $r$  e  $\theta$ . Quest'ultima scelta appare più conveniente perchè la coordinata  $\theta$  è ciclica. Quindi, se si partisse impostando lo studio del moto in coordinate cartesiane, sarebbe poi opportuno passare alle coordinate polari per semplificare le equazioni di moto. Una trasformazione di coordinate di questo tipo è detta *trasformazione puntuale*, poichè si passa da un sistema di coordinate  $q_i$  ad un nuovo sistema di coordinate  $Q_i$ .

In molte occasioni è comodo trasformare sia i  $q_i$  che i  $p_i$  mediante equazioni di trasformazione del seguente tipo:

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \\ P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases} \quad (\text{X.13})$$

essendo  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ .

In meccanica hamiltoniana rivestono particolare interesse solo quelle trasformazioni per le quali le nuove coordinate  $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$  e  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$  sono canoniche. Questa condizione sarà soddisfatta purché esista una funzione  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ , tale che le equazioni di moto riferite al nuovo sistema di coordinate abbiano la forma hamiltoniana

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i}, \quad (\text{X.14a})$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i}, \quad (\text{X.14b})$$

dove  $i = 1, 2, \dots, n$ . Le trasformazioni, per le quali valgono le (X.14), si dicono *canoniche*.

Se le nuove coordinate  $Q_i$  e  $P_i$  sono canoniche, deve valere il principio variazionale

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) dt = 0.$$

Allo stesso momento le vecchie coordinate soddisfano a un principio analogo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) dt = 0.$$

Il verificarsi simultaneo dei due principi variazionali significa che gli integrandi dei due integrali possono differire al più per una derivata totale, rispetto al tempo, di una funzione arbitraria  $\mathcal{F}$  delle coordinate, degli impulsi e del tempo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{F}}{dt} dt = \mathcal{F}(P_2) - \mathcal{F}(P_1),$$

e la variazione di questo integrale è automaticamente nulla qualunque sia la funzione  $\mathcal{F}$ , poichè la variazione si annulla nei punti estremi. La funzione arbitraria  $\mathcal{F}$  si chiama *funzione generatrice* della trasformazione, poichè, come vedremo, nota  $\mathcal{F}$ , le equazioni di trasformazione (X.13) risultano completamente determinate.

La funzione generatrice  $\mathcal{F}$  dipende dalle  $4n$  variabili  $q_i, p_i, Q_i$  e  $P_i$ , ma non tutte queste variabili sono indipendenti. Soffermandoci su  $2n$  variabili, scriviamo la  $\mathcal{F}$  nei seguenti quattro modi diversi:

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad \mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad \mathcal{F}_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \quad \mathcal{F}_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t).$$

Esistono comunque altre funzioni generatrici  $\mathcal{F}$  che non hanno una tale forma.

Nel caso in cui la prima forma  $\mathcal{F}_1$  sia indicata, gli integrandi nei due principi variazionali sono legati dalla relazione

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (\text{X.15})$$

dove

$$\frac{d\mathcal{F}_1}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t}.$$

Poichè le vecchie e le nuove coordinate  $q_i$  e  $Q_i$  sono considerate come variabili indipendenti, la (X.15) sussiste se e solo se i coefficienti delle  $\dot{q}_i$  e delle  $\dot{Q}_i$  si annullano:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i},$$

da cui

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t}.$$

Abbiamo trovate la relazione tra la vecchia e la nuova hamiltoniana.

Facendo lo stesso discorso per la forma  $\mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , si definisce

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \sum_{i=1}^n P_i Q_i.$$

In tal caso si ottiene dalla (X.15)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d}{dt} \left( \mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - \sum_{i=1}^n Q_i P_i \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i - \mathcal{K} + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \\ &= -\sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i - \mathcal{K} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}, \quad (\text{X.16})$$

con

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}.$$

Partendo dalla relazione

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{i=1}^n q_i p_i + \mathcal{F}_3(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, t),$$

troviamo dalla (X.15)

$$-\sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t),$$

da cui

$$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}, \quad (\text{X.17})$$

con

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial t}.$$

Infine, ponendo

$$\mathcal{F}_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \sum_{i=1}^n P_i Q_i - \sum_{i=1}^n p_i q_i,$$

si ottiene

$$-\sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i - \mathcal{H} = -\sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i - \mathcal{K} + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t).$$

Di conseguenza,

$$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}, \quad (\text{X.18})$$

con

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial t}.$$

**Esempio X.3 (Trasformazione identità)** Sia

$$\mathcal{F}_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i.$$

Allora

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i,$$

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i,$$

e quindi  $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ . Di conseguenza,  $\mathcal{F}_2$  genera la trasformazione identità.

**Esempio X.4 (Scambio delle coordinate)** Sia

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{k=1}^n q_k Q_k.$$



Allora  $\mathcal{K} = \mathcal{H}$  e

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i} = -q_i.$$

Tranne il segno, abbiamo scambiato i ruoli delle coordinate generalizzate e dei momenti generalizzati.

Funzione generatrice $\mathcal{F}$	Derivata	Caso banale
$\mathcal{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_1 = \sum_{i=1}^n q_i Q_i,$ $Q_i = p_i, P_i = -p_i$
$\mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - \sum_{i=1}^n Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i,$ $Q_i = q_i, P_i = p_i$
$\mathcal{F}_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) + \sum_{i=1}^n q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_3 = \sum_{i=1}^n p_i Q_i,$ $Q_i = -q_i, P_i = -p_i$
$\mathcal{F}_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) + \sum_{i=1}^n [q_i p_i - Q_i P_i]$	$q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_4 = \sum_{i=1}^n p_i P_i,$ $Q_i = p_i, P_i = -q_i$

**Esempio X.5 (Moto armonico)** Sia

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2} m \omega q^2 \cotg Q,$$

essendo  $m$  e  $q$  delle costanti. In tal caso  $\mathcal{K} = \mathcal{H}$  e

$$p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m \omega q \cotg Q,$$

$$P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m \omega q^2}{2 \sin^2 Q}.$$

Quindi

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q.$$

Di conseguenza, se avessimo l'hamiltoniana della forza elastica

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2,$$

allora

$$\mathcal{H} = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P.$$

In altre parole, l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  è ciclica nella nuova variabile  $Q$  e il momento associato  $P$  è pertanto una costante (uguale all'energia totale diviso da  $\omega$ :  $P = E/\omega$ ). L'equazione di moto per  $Q$  si riduce alla semplice forma

$$Q = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = \omega,$$

la cui soluzione immediata è

$$Q = \omega t + Q_0,$$

essendo  $Q_0$  il valore iniziale di  $Q$ . Di conseguenza,

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0).$$

## 5 Integrali invarianti di Poincaré

Consideriamo una superficie bidimensionale  $\Sigma$  nel cosiddetto *spazio delle fasi*, i cui punti sono rappresentati dalle coordinate

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

Siano  $u$  e  $v$  due parametri relativi alla superficie  $\Sigma$ , cioè

$$q_j = q_j(u, v), \quad p_j = p_j(u, v),$$

per ogni  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Sigma$ . Allora l'elemento di superficie  $dq_j dp_j$  si trasforma nell'elemento di superficie  $du dv$  mediante il determinante jacobiano

$$\frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial u} & \frac{\partial p_j}{\partial u} \\ \frac{\partial q_j}{\partial v} & \frac{\partial p_j}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si consideri la trasformazione canonica che fa passare dalle coordinate  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  alle coordinate  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  e che viene generata dalla funzione generatrice  $\mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Utilizzando le (X.16) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_j}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial p_j}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial v} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(u, v)} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial q_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_j}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_j}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Scambiando i pedici  $j, k$  nei termini della prima sommatoria si produce il suo termine contrario, quindi la prima sommatoria vale zero. Dunque

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(u, v)} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_j}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Così otteniamo

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(u, v)} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial P_j \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_j}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_j}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_j}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix},$$

essendo, in base a considerazioni analoghe, la prima sommatoria uguale a zero. Osservando che:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial P_j \partial P_k} \frac{\partial P_j}{\partial u} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \frac{\partial q_j}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_k}, \\ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial P_j \partial P_k} \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_j \partial P_k} \frac{\partial q_j}{\partial v} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_k}, \end{aligned}$$

e ricordando le (X.16), si ottiene infine

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(u, v)} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_k}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}. \quad (\text{X.19})$$

Di conseguenza,

$$J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Sigma} \sum_{j=1}^n dq_j dp_j = \iint_{\Sigma} \sum_{k=1}^n dQ_k dP_k$$

è un integrale invariante sotto le trasformazioni canoniche.

Ripetendo la procedura, si dimostra che l'integrale, esteso ad una superficie 4D nello spazio delle fasi,

$$J_2 \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Sigma} \sum_{j,k=1}^n dq_j dp_j dq_k dp_k = \iint_{\Sigma} \sum_{j,k=1}^n dQ_j dP_j dQ_k dP_k$$

è invariante sotto le trasformazioni canoniche. Infine, l'integrale, esteso a qualsiasi regione dello spazio delle fasi,

$$J_n \stackrel{\text{def}}{=} \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n,$$

è invariante sotto le trasformazioni canoniche.

## 6 Parentesi di Lagrange e di Poisson

L'equazione (X.19) sull'invarianza della somma dei determinanti jacobiani si può anche scrivere nella seguente forma:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial q_j}{\partial u} \frac{\partial p_j}{\partial v} - \frac{\partial p_j}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial Q_j}{\partial u} \frac{\partial P_j}{\partial v} - \frac{\partial P_j}{\partial u} \frac{\partial Q_j}{\partial v} \right).$$

È pertanto evidente che la cosiddetta *parentesi di Lagrange*

$$\{u, v\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial q_j}{\partial u} \frac{\partial p_j}{\partial v} - \frac{\partial p_j}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} \right), \quad (\text{X.20})$$

è invariante sotto le trasformazioni canoniche. Inoltre, la parentesi di Lagrange è antisimmetrica rispetto ai suoi due argomenti:

$$\{u, v\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -\{v, u\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}.$$

L'indipendenza delle coordinate  $q_j$  e  $p_k$  conduce alla relazione

$$\{q_j, q_l\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial q_l} \right) = 0. \quad (\text{X.21a})$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$\{p_j, p_l\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial p_l} - \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \frac{\partial q_k}{\partial p_l} \right) = 0. \quad (\text{X.21b})$$

D'altra parte,

$$\{q_j, p_l\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \frac{\partial p_k}{\partial p_l} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial p_l} \right) = \delta_{jl}. \quad (\text{X.21c})$$

Di grande utilità sono le cosiddette *parentesi di Poisson*

$$[u, v]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right), \quad (\text{X.22})$$

le quali soddisfano la relazione di antisimmetria

$$[u, v] = -[v, u].$$

Le parentesi di Poisson si possono scrivere in forma complessa

$$[u, v]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -i \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial z_k} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial v}{\partial z_k} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} \right), \quad (\text{X.23})$$

essendo

$$z_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_k = \frac{q_k - ip_k}{\sqrt{2}}.$$

**Proposizione X.6** *Se  $u_1, \dots, u_{2n}$  rappresentano un sistema di  $2n$  funzioni indipendenti tali che ciascuna  $u_l$  sia funzione delle  $2n$  coordinate  $q_1, \dots, q_n$  e  $p_1, \dots, p_n$ , allora*

$$\sum_{k=1}^{2n} \{u_k, u_j\} [u_k, u_l] = \delta_{jl}. \quad (\text{X.24})$$

*Dimostrazione.* Si può scrivere

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n} \{u_k, u_j\} [u_k, u_l] \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial q_r}{\partial u_k} \frac{\partial p_r}{\partial u_j} - \frac{\partial q_r}{\partial u_j} \frac{\partial p_r}{\partial u_k} \right] \left[ \frac{\partial u_k}{\partial q_s} \frac{\partial u_l}{\partial p_s} - \frac{\partial u_l}{\partial q_s} \frac{\partial u_k}{\partial p_s} \right]. \end{aligned}$$

Scrivendo la tripla sommatoria come la somma di quattro termini otteniamo per il primo termine

$$\sum_{r,s=1}^n \frac{\partial p_r}{\partial u_j} \frac{\partial u_l}{\partial p_s} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_s} = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial p_r}{\partial u_j} \frac{\partial u_l}{\partial p_s} \underbrace{\frac{\partial q_r}{\partial q_s}}_{=\delta_{rs}} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial u_l}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial u_j}.$$

Il quarto termine, ottenuto scambiando  $q_r$  e  $p_r$ , è

$$\sum_{r,s=1}^n \frac{\partial q_r}{\partial u_j} \frac{\partial u_l}{\partial p_s} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_s} = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial q_r}{\partial u_j} \frac{\partial u_l}{\partial p_s} \underbrace{\frac{\partial p_r}{\partial q_s}}_{=\delta_{rs}} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial u_l}{\partial q_r} \frac{\partial q_r}{\partial u_j}.$$

La loro somma risulta ad essere uguale a

$$\sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial u_l}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial u_j} + \frac{\partial u_l}{\partial q_r} \frac{\partial q_r}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial u_l}{\partial u_j} = \delta_{jl}.$$

A parte il segno, il secondo termine vale

$$\sum_{r,s=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_s}}_{=0} \frac{\partial p_r}{\partial u_j} \frac{\partial u_l}{\partial q_s} = 0,$$

mentre, trascurando il segno, il terzo termine vale

$$\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_s}}_{=0} \frac{\partial q_r}{\partial u_j} \frac{\partial u_l}{\partial p_s} = 0.$$

La somma dei quattro termine produce la (X.24).  $\square$

**Corollario X.7** *Valgono le seguenti relazioni delle parentesi fondamentali di Poisson:*

$$[p_j, q_l] = -\delta_{jl}, \quad (\text{X.25a})$$

$$[q_l, p_j] = \delta_{jl}, \quad (\text{X.25b})$$

$$[p_j, p_l] = 0, \quad (\text{X.25c})$$

$$[q_j, q_l] = 0. \quad (\text{X.25d})$$

*Dimostrazione.* Se si prendono nella (X.24)  $(u_j, u_l)$  ordinatamente uguale a ciascuna delle seguenti coppie  $(q_j, q_l)$ ,  $(p_j, p_l)$ ,  $(q_j, p_l)$  e  $(p_j, q_l)$ , si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\{q_k, q_j\}[q_k, q_l] + \{p_k, q_j\}[p_k, q_l]) &= \delta_{jl}, \\ \sum_{k=1}^n (\{q_k, p_j\}[q_k, p_l] + \{p_k, p_j\}[p_k, p_l]) &= \delta_{jl}, \\ \sum_{k=1}^n (\{q_k, q_j\}[q_k, p_l] + \{p_k, q_j\}[p_k, p_l]) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n (\{q_k, p_j\}[q_k, q_l] + \{p_k, p_j\}[p_k, q_l]) &= 0, \end{aligned}$$

che, grazie alle uguaglianze (X.21) valide per le parentesi di Lagrange, implicano le rispettive identità (X.25).  $\square$

Il seguente teorema esprime il fatto che le parentesi di Poisson non dipendono dal sistema di coordinate canoniche nel quale sono espresse.

**Teorema X.8** Siano  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  coordinate canoniche dello stesso sistema e  $F$  e  $G$  due funzioni arbitrarie di tali coordinate. Allora

$$[F, G]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = [F, G]_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}}. \quad (\text{X.26})$$

*Dimostrazione.* Si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} [F, G]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \left( \frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left( \frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial Q_k} [F, Q_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial G}{\partial P_k} [F, P_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo  $F \mapsto Q_l$  e  $G \mapsto F$  si ottiene

$$[F, Q_l]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -[Q_l, F]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} [Q_l, Q_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial P_k} [Q_l, P_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right) = - \frac{\partial F}{\partial P_l}.$$

Analogamente, sostituendo  $F \mapsto P_l$  e  $G \mapsto F$  si ottiene

$$[F, P_l]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -[P_l, F]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} [P_l, Q_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial P_k} [P_l, P_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right) = \frac{\partial F}{\partial Q_l}.$$

Di conseguenza,

$$[F, G]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) = [F, G]_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}}, \quad (\text{X.27})$$

che è quanto volevasi dimostrare.  $\square$

Il Teorema X.8 giustifica la scelta di non far comparire i pedici  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  nelle parentesi di Poisson:

$$[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} [u, v]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = [u, v]_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}},$$

qualunque siano le coordinate canoniche. La parentesi di Poisson è una forma bilineare antisimmetrica, poichè ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} [u, u] &= 0, \\ [u + v, w] &= [u, w] + [v, w], \\ [u, v] &= -[v, u]. \end{aligned}$$

Inoltre, dalla (X.27) è immediato che

$$[u, vw] = [u, v]w + v[u, w].$$

Applichiamo le identità

$$[F, q_j] = -\frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad [F, p_j] = \frac{\partial F}{\partial q_j}, \quad (\text{X.28})$$

alla hamiltoniana  $\mathcal{H}$ . Risultano le equazioni di Hamilton

$$[q_j, \mathcal{H}] = \dot{q}_j, \quad (\text{X.29a})$$

$$[p_j, \mathcal{H}] = \dot{p}_j. \quad (\text{X.29b})$$

Di conseguenza, per qualunque funzione  $u = u(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial u}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= [u, \mathcal{H}] + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che rimane valida la seguente equazione di evoluzione

$$\frac{du}{dt} = [u, \mathcal{H}] + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (\text{X.30})$$

Ricordando che  $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$ , si trova anche che:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Abbiamo anche un'altro risultato: *Una quantità che non dipende esplicitamente dal tempo è una costante di moto se e solo se la sua parentesi con l'hamiltoniana si annulla.* In altre parole:

$$\text{Se } \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ allora : } \frac{du}{dt} = 0 \iff [u, \mathcal{H}] = 0.$$

Vale anche il seguente risultato.

**Teorema X.9 (Identità di Jacobi)** *Siano  $u, v, w$  tre funzioni delle variabili  $q_1, \dots, q_n$  e  $p_1, \dots, p_n$ . Allora*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \quad (\text{X.31})$$



*Dimostrazione.* Si calcola facilmente:

$$\begin{aligned}
& [u, [v, w]] + [v, [w, u]] = [u, [v, w]] - [v, [u, w]] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right] - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right] \right] \\
&- \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial v}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right] - \frac{\partial v}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right] \right] \\
&= D_u D_v w - D_v D_u w,
\end{aligned}$$

essendo

$$D_v = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right).$$

Gli operatori differenziali ausiliari  $D_u$  e  $D_v$  hanno la forma

$$D_v = \sum_{r=1}^{2n} \alpha_r \frac{\partial}{\partial \xi_r}, \quad D_u = \sum_{s=1}^{2n} \beta_s \frac{\partial}{\partial \eta_s},$$

dove  $\alpha_r$  e  $\beta_s$  possono essere espresse in  $u$  e  $v$  e loro derivate rispetto alle coordinate  $q_j$  e  $p_l$ . In tal caso

$$\begin{aligned}
D_u D_v w - D_v D_u w &= \sum_{r,s=1}^{2n} \left[ \beta_s \frac{\partial}{\partial \eta_s} \left( \alpha_r \frac{\partial w}{\partial \xi_r} \right) - \alpha_r \frac{\partial}{\partial \xi_r} \left( \beta_s \frac{\partial w}{\partial \eta_s} \right) \right] \\
&= \sum_{r,s=1}^{2n} \left[ \beta_s \alpha_r \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_s \partial \xi_r} - \alpha_r \beta_s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_r \partial \eta_s} \right] + \sum_{r,s=1}^{2n} \left[ \beta_s \frac{\partial \alpha_r}{\partial \eta_s} \frac{\partial w}{\partial \xi_r} - \alpha_r \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi_r} \frac{\partial w}{\partial \eta_s} \right] \\
&= \sum_{r,s=1}^{2n} \left[ \beta_s \frac{\partial \alpha_r}{\partial \eta_s} \frac{\partial w}{\partial \xi_r} - \alpha_r \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi_r} \frac{\partial w}{\partial \eta_s} \right],
\end{aligned}$$

dove  $\xi_r$  e  $\eta_s$  sono, separatamente, le variabili  $q_1, \dots, q_n$  e  $p_1, \dots, p_n$ . In altre parole

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] = \sum_{k=1}^n \left( A_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + B_k \frac{\partial w}{\partial q_k} \right),$$

dove  $A_k$  e  $B_k$  sono funzioni di  $u$  e  $v$  che non dipendono da  $w$ . Nei casi  $w = p_l$  e  $w = q_l$  abbiamo rispettivamente

$$\begin{aligned}
[u, [v, q_l]] + [v, [q_l, u]] &= A_l, \\
[u, [v, p_l]] + [v, [p_l, u]] &= B_l.
\end{aligned}$$

Grazie alle (X.28), quest'ultime equazioni si possono scrivere nella forma

$$A_l = \left[ u, -\frac{\partial v}{\partial p_l} \right] + \left[ v, \frac{\partial u}{\partial p_l} \right] = -\frac{\partial}{\partial p_l} [u, v],$$

$$B_l = \left[ u, \frac{\partial v}{\partial q_l} \right] + \left[ v, -\frac{\partial u}{\partial q_l} \right] = +\frac{\partial}{\partial q_l} [u, v].$$

Quindi

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q_k} [u, v] \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} [u, v] \frac{\partial w}{\partial q_k} \right) = [[u, v], w],$$

che si voleva dimostrare.  $\square$

**Corollario X.10** *Siano  $u$  e  $v$  due variabili che non dipendono esplicitamente dal tempo e che sono costanti del moto. Allora la loro parentesi di Poisson è una costante del moto.*

*Dimostrazione.* Se  $u$  e  $v$  non dipendono esplicitamente dal tempo, anche  $[u, v]$  non dipende esplicitamente dal tempo. Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u, v] &= [[u, v], \mathcal{H}] = -[\mathcal{H}, [u, v]] \\ &\stackrel{(X.31)}{=} [u, [v, \mathcal{H}]] + [v, [\mathcal{H}, u]] \\ &\stackrel{(X.30)}{=} \left[ u, \frac{dv}{dt} \right] - \left[ v, \frac{du}{dt} \right] = 0. \end{aligned}$$

Quindi  $\frac{d}{dt} [u, v] = [[u, v], \mathcal{H}] = 0$ , come si voleva dimostrare.  $\square$

## 7 Equazione di Hamilton-Jacobi

Supponiamo che esista una trasformazione canonica dal sistema nelle vecchie coordinate  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  allo stesso sistema nella nuove coordinate  $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$  e  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$  tale che le nuove coordinate diventano costanti del moto. Indicando con  $\mathcal{K}$  l'hamiltoniana nelle nuove variabili, abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_j} = \dot{Q}_j = 0, \quad -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_j} = \dot{P}_j = 0,$$

dove  $j = 1, \dots, n$ .  $\mathcal{K}$  è legata alla vecchia hamiltoniana  $\mathcal{H}$  e alla funzione generatrice  $\mathcal{F}$  dalla relazione

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t},$$

e quindi  $\mathcal{K}$  si annulla se  $\mathcal{F}$  soddisfa all'equazione

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0. \quad (\text{X.32})$$

Prendendo come funzione generatrice  $\mathcal{F}$  la funzione  $\mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  (cioè prendendo  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ ), per la (X.16) si ha

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Quindi la (X.32) fornisce la cosiddetta *equazione di Hamilton-Jacobi*:

$$\mathcal{H}\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = 0. \quad (\text{X.33})$$

L'equazione (X.33) è un'equazione differenziale alle derivate parziali nelle variabili  $q_1, \dots, q_n, t$  per la funzione generatrice  $\mathcal{F}_2$ . Di solito la soluzione della (X.33) viene indicata con  $\mathcal{S}$  ed è chiamata *funzione principale di Hamilton*.

L'equazione di Hamilton-Jacobi (X.33) è di primo ordine nelle  $n + 1$  variabili  $q_1, \dots, q_n, t$  e quindi cerchiamo una soluzione (abbastanza) generale contenente  $n + 1$  costanti d'integrazione indipendenti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ .<sup>1</sup> Poichè la funzione principale di Hamilton  $\mathcal{S}$  non figura nella (X.33) ma appaiono soltanto le sue derivate parziali di primo ordine, una delle costanti può essere utilizzata per rendersi conto del fatto che con  $\mathcal{S}$  anche  $\mathcal{S} + \alpha$  è soluzione, essendo  $\alpha$  una qualunque costante. Lasciando fuori della discussione tale costante, la soluzione completa della (X.33) avrà la forma

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + \text{cost.}, \quad (\text{X.34})$$

dove le costanti d'integrazione  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sono i nuovi momenti (costanti)  $P_j = \alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Le  $n$  equazioni di trasformazione (X.16) possono ora essere scritte nella forma

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{X.35})$$

essendo  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Le altre  $n$  coordinate nuove seguono dalle equazioni

$$Q_j = \beta_j = \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{X.36})$$

---

<sup>1</sup>La soluzione contiene  $n + 1$  *funzioni* generali indipendenti. Quindi ci limitiamo ad una sottoclasse di soluzioni.

dove le costanti  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  sono ricavabili calcolando il secondo membro della (X.36) al tempo iniziale con i noti valori delle  $q_j$ . Si possono poi invertire le equazioni (X.36) per ricavare

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t).$$

Calcolando la derivata della  $\mathcal{S}$  rispetto a  $t$  otteniamo [usando le (X.32), (X.33) e (X.34)]

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \mathcal{L}.$$

Quindi la funzione principale di Hamilton è una primitiva (rispetto a  $t$ ) della lagrangiana.

**Esempio X.11 (Oscillatore armonico)** Per una costante positiva  $k$ , sia

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2,$$

essendo  $m$  la massa della particella. Sostituendo  $p = (\partial \mathcal{S} / \partial q)$ , si trova l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0.$$

Ponendo

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t,$$

si può eliminare il tempo  $t$  e arrivare all'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha,$$

con la costante  $\alpha > 0$  (essendo  $q \in \mathbb{R}$ ). Quindi

$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}, \quad \mathcal{S} = \sqrt{mk} \left( \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} \right) - \alpha t.$$

Dunque

$$\beta = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t,$$

che implica:

$$t + \beta = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left( q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} \right).$$

Ponendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ , si può invertire quest'ultima equazione:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos[\omega(t + \beta)].$$

Prendendo in considerazione i dati iniziali

$$\alpha = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}kq_0^2, \quad \cos[\omega\beta] = q_0 \left[ q_0^2 + \frac{p_0^2}{km} \right]^{-1/2},$$

e sfruttando il fatto che

$$p = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} = \sqrt{mk} \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2},$$

si ottiene

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{p_0^2}{km}} \cos[\omega(t + \beta)].$$

L'esempio X.11 suggerisce di separare nell'equazione di Hamilton-Jacobi la dipendenza di  $\mathcal{S}$  in  $\mathbf{q}$  da quella in  $t$ , appena  $\mathcal{H}$  non dipenda esplicitamente dal tempo. In tal caso scriviamo

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) - \alpha_1 t$$

e riduciamo la (X.33) all'equazione alle derivate parziali

$$\mathcal{H} \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n} \right) = \alpha_1, \quad (\text{X.37})$$

nella quale non figura più il tempo. Ovviamente la costante d'integrazione  $\alpha_1$  è uguale all'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , che è una costante del moto. La funzione  $W$  si dice *funzione caratteristica di Hamilton*. Poichè la nuova hamiltoniana  $\mathcal{K}$  dipende soltanto da uno dei momenti  $\alpha_j$ , si ha

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha_j} = \delta_{j1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

da cui si ha immediatamente

$$Q_j = \begin{cases} t + \beta_1 \equiv (\partial W / \partial \alpha_1), & j = 1, \\ \beta_j \equiv (\partial W / \partial \alpha_j), & j = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{X.38})$$

La dipendenza della  $W$  segue risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi (X.37). La sua soluzione generale conterrà le  $n - 1$  costanti d'integrazione  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Utilizzando

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

si potranno esprimere  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  in funzione dei valori iniziali delle  $q_j$  e delle  $p_j$ . Infine, risolvendo la (X.38), si possono trovare le vecchie coordinate  $q_j$  in funzione delle  $\alpha_j$ , delle  $\beta_j$  e del tempo. Si noti che in  $n - 1$  delle equazioni (X.38) non figura il tempo. Si può dunque scegliere una delle  $q_j$  come variabile indipendente ed esprimere in funzione di essa le altre coordinate, risolvendo così direttamente il sistema di equazioni indipendenti del tempo e arrivando direttamente alle equazioni della traiettoria.

**Esempio X.12 (Problema di Keplero)** Sia

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2 \phi} \right) - \frac{k}{r},$$

dove  $k = GM_S m = GM\mu$  è una costante positiva e  $\mu = M_S m / (M_S + m)$  è la massa ridotta. Si ottiene subito l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{k}{r} = \alpha_1 = E, \quad (\text{X.39})$$

essendo  $E$  l'energia totale del sistema e  $M = M_S + m$  la massa Sole-più-pianeta. Ponendo

$$W(r, \theta, \phi) = W_r(r) + W_\phi(\phi) + W_\theta(\theta),$$

si può effettuare la separazione delle variabili. Infatti, la (X.39) diventa:<sup>2</sup>

$$\frac{1}{2\mu} \left[ W_r'(r)^2 + \frac{1}{r^2} W_\phi'(\phi)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} W_\theta'(\theta)^2 \right] - \frac{k}{r} = E. \quad (\text{X.40})$$

Ricavando  $W_\theta'(\theta)^2$  dalla (X.40), troviamo

$$W_\theta'(\theta)^2 = 2\mu E r^2 \sin^2 \phi + 2\mu k r \sin^2 \phi - r^2 W_r'(r)^2 \sin^2 \phi - W_\phi'(\phi)^2 \sin^2 \phi,$$

possiamo quindi concludere che

$$W_\theta'(\theta) \equiv \alpha_\theta$$

---

<sup>2</sup>In coordinate sferiche si ha  $x = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$  e  $z = r \cos \phi$ , e quindi  $p_r = \mu \dot{r}$ ,  $p_\phi = \mu r^2 \dot{\phi}$ ,  $p_\theta = \mu r^2 (\sin^2 \phi) \dot{\theta}$  e  $|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi$ .

è costante. Sostituendolo tale risultato nella (X.40), si ottiene

$$\frac{1}{2\mu} \left[ W_r'(r)^2 + \frac{1}{r^2} W_\phi'(\phi)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2 \sin^2 \phi} \right] - \frac{k}{r} = E.$$

Scrivendo

$$W_\phi'(\phi)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \phi} = 2\mu E r^2 + 2\mu k r - r^2 W_r'(r)^2,$$

concludiamo che

$$W_\phi'(\phi)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \phi} \equiv \alpha_\phi^2$$

è costante. Di conseguenza,  $\alpha_\phi \geq \alpha_\theta \geq 0$  e dunque  $\pi - \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$ , essendo  $\sin \phi_0 = (\alpha_\theta / \alpha_\phi)$  per un angolo  $0 \leq \phi_0 \leq (\pi/2)$ . Infine risulta l'equazione differenziale ordinaria

$$W_r'(r)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} = 2\mu \left( E + \frac{k}{r} \right).$$

## 8 Variabili azione-angolo

In molti campi della fisica sono di rilevante importanza i sistemi periodici. In tal caso cambia la procedura per risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi. Invece di utilizzare le costanti  $\alpha_j$ , si utilizza un sistema di  $n$  costanti  $J_j$  opportunamente definite, funzioni indipendenti dalle  $\alpha_j$  e chiamate variabili d'azione.

Consideriamo un sistema con un'hamiltoniana che non dipende esplicitamente dal tempo. Supponiamo che l'equazione di Hamilton-Jacobi per la  $W$  sia separabile relativamente a un sistema di variabili canoniche. Allorchè il sistema si muove, il punto corrispondente descrive, nello spazio delle fasi definito dalle variabili  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , la cosiddetta traiettoria di fase. Si dice che il moto è *periodico* se la proiezione della traiettoria su ogni piano  $(q_j, p_j)$  risulta periodica nel senso di un moto a un solo grado di libertà.<sup>3</sup> Essendo le variabili separabili, i moti corrispondenti a queste proiezioni sono tra loro indipendenti. Le equazioni della trasformazione canonica,

$$p_j = \frac{\partial W_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

ci consente di ricavare ogni  $p_j$  come funzione della corrispondente  $q_j$  e delle  $n$  costanti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ :

$$p_j = p_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{X.41})$$

<sup>3</sup>Nel caso di un solo grado di libertà, con variabili canoniche  $(q, p)$ , ambedue le funzioni  $q$  e  $p$  possono essere periodiche in  $t$  con lo stesso periodo (librazione) o  $p$  è una funzione periodica di  $q$  (rotazione).

La (X.41) rappresenta l'equazione della proiezione della traiettoria di fase sul piano  $(q_j, p_j)$ . Il moto è periodico se la (X.41) descrive un'orbita chiusa oppure una funzione periodica di  $q_j$ . Non è necessario che la frequenza del moto periodico sia la stessa per tutte le coppie  $(q_j, p_j)$ .

Si definisce *variabile d'azione*, corrispondente alla coppia di variabili  $q_j, p_j$ , la grandezza  $J_j$  data da

$$J_j = \oint p_j dq_j, \quad (\text{X.42})$$

dove l'integrazione è estesa a un intero periodo di oscillazione o di rotazione della  $q_j$ , a secondo dei casi. Si può anche scrivere

$$J_j = \oint \frac{\partial W_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_j} dq_j. \quad (\text{X.43})$$

Quindi ogni variabile d'azione risulta funzione solo dalle  $n$  costanti d'integrazione che figurano nella soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Dall'indipendenza delle coppie  $(q_j, p_j)$  si deduce inoltre che le  $J_j$  costituiscono un sistema di  $n$  funzioni indipendenti di  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  e che si prestano quindi a essere utilizzate come nuovi momenti costanti. Esprimendo le  $\alpha_j$  in funzione delle variabili d'azione, si può porre la funzione  $W$  sotto la forma

$$W = W(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n),$$

mentre l'hamiltoniana si presenta come funzione delle sole variabili d'azione:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, \dots, J_n).$$

Se una delle coordinate separabili è ciclica, il suo momento coniugato è costante. L'orbita corrispondente nel piano  $(q_j, p_j)$  dello spazio delle fasi è allora una linea retta orizzontale. Calcolando, nella definizione (X.42), l'integrale da 0 a  $2\pi$ , si ottiene

$$J_j = 2\pi p_j$$

per tutte le variabili cicliche.

Le coordinate generalizzate coniugate alle variabili d'azione  $J_j$ ,

$$w_j = \frac{\partial W}{\partial J_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

si chiamano *variabili angolari*. Le loro equazioni di moto sono allora<sup>4</sup>

$$\dot{w}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_j} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_j(J_1, \dots, J_n), \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{X.44})$$

---

<sup>4</sup>Al posto di  $(q_j, p_j)$  abbiamo  $(J_j, w_j)$ .



dove  $\nu_1, \dots, \nu_n$  sono delle costanti, funzioni delle variabili d'azione. Risolvendo le (X.44) si ottiene

$$w_j = \nu_j t + \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Le costanti  $\nu_1, \dots, \nu_n$  costituiscono le frequenze associate ai moti periodici delle  $q_1, \dots, q_n$ .

**Esempio X.13 (Oscillatore armonico lineare)** Seguendo l'esempio X.11, si ha

$$J = \oint p dq = \oint \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q} dq = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} dq.$$

Sostituendo

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin \theta,$$

si ottiene

$$J = 2\alpha \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2\pi\alpha \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Dunque

$$\alpha = \mathcal{H} = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

**Esempio X.14 (Problema di Keplero)** Seguendo l'esempio X.12, calcoliamo le tre variabili d'azione:

$$J_\theta = \oint p_\theta d\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint W'_\theta(\theta) d\theta = \oint \alpha_\theta d\theta,$$

$$J_\phi = \oint p_\phi d\phi = \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi = \oint W'_\phi(\phi) d\phi = \oint \sqrt{\alpha_\phi^2 - \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \phi}} d\phi,$$

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint W'_r(r) dr = \oint \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu k}{r} - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}} dr.$$

Utilizzando la ciclicità della variabile  $\theta$  si ottiene

$$J_\theta = 2\pi\alpha_\theta = 2\pi p_\theta.$$

Poi, utilizzando l'angolo polare della particella nel piano della sua orbita, si ha per l'energia cinetica:

$$2T = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} + p_\theta \dot{\theta} = p_r \dot{r} + p\dot{\psi},$$

oppure:  $p_\phi d\phi = p d\psi - p_\theta d\theta$ . Di conseguenza,

$$J_\phi = \oint p d\psi - \oint p_\theta d\theta = 2\pi(p - p_\theta) = 2\pi(\alpha_\phi - \alpha_\theta).$$

Infine,

$$J_r = \oint \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu k}{r} - \frac{(J_\phi + J_\theta)^2}{4\pi^2 r^2}} dr.$$

Il calcolo di quest'ultimo integrale ci consente di esprimere l'energia  $E$  nelle tre costanti  $J_r$ ,  $J_\phi$  e  $J_\theta$ . Poichè  $E$  dipende solo da  $J_r$  e dalla somma  $J_\phi + J_\theta$ , le frequenze corrispondenti  $\nu_\phi$  e  $\nu_\theta$  saranno quindi uguali e ciò indica la presenza di una degenerazione. Calcolando i residui si trova

$$J_r = -(J_\phi + J_\theta) + \pi k \sqrt{\frac{2\mu}{-E}},$$

quest'ultima equazione implica

$$E = -\frac{2\pi^2 \mu k^2}{(J_r + J_\phi + J_\theta)^2}.$$

Di conseguenza,

$$\nu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\theta} = \frac{4\pi^2 \mu k^2}{(J_r + J_\phi + J_\theta)^3}, \quad \tau = \frac{1}{\nu} = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}},$$

la terza legge di Keplero.

# Appendice A

## Calcolo Differenziale in Più Variabili

In quest'appendice vengono discusse la derivazione parziale e direzionale, la differenziabilità e i campi vettoriali conservativi e solenoidali.

### 1 Derivate parziali e direzionali

Sia  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione a valori reali definita in un insieme aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ . Per semplicità fissiamo l'attenzione ad  $n = 3$ , ricordando che tutto si può generalizzare a più dimensioni.

Sia  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $D$ . Allora la *derivata parziale* di  $f$  in  $P_0$  rispetto alla variabile  $x$  è il limite (se esiste finito)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}.$$

Analogamente si definiscono  $(\partial f / \partial y)(x_0, y_0, z_0)$  e  $(\partial f / \partial z)(x_0, y_0, z_0)$ .

Sia  $\mathbf{n}$  un versore (cioè,  $\|\mathbf{n}\| = 1$ ). Allora la *derivata direzionale* della funzione  $f$  nel punto  $P_0$  *nella direzione*  $\mathbf{n}$  è definita come il limite (se esiste finito)

$$D_{\mathbf{n}}f(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\mathbf{n}) - f(P_0)}{h}.$$

Allora le derivate direzionali di  $f$  nelle direzioni  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  sono le derivate parziali di  $f$  rispetto ad  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Supponiamo che la funzione  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ammetta tutte le derivate parziali nel punto  $P_0$ . Allora il vettore le cui componenti sono le derivate parziali della  $f$  in  $P_0$  si chiama *gradiente* della funzione  $f$ :

$$\text{grad } f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\vec{k}.$$

Una funzione  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *differenziabile* in  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ , se esiste un **operatore lineare**  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(P_0 + \mathbf{h}) - f(P_0) = L\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0,$$

per ogni incremento  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$  con  $P_0 + \mathbf{h} \in D$ . Il simbolo  $o(\|\mathbf{h}\|)$  significa che il resto è infinitesimo di ordine superiore ad  $\|\mathbf{h}\|$  per  $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ . In altre parole, significa che il resto diviso da  $\|\mathbf{h}\|$  tende a zero per  $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ . L'operatore lineare  $L$  è lineare nella variabile  $\mathbf{h}$  e dipende dal punto  $P_0$ . Dunque  $L\mathbf{h}$  viene rappresentato dal prodotto matriciale della riga  $L$  per la colonna  $\mathbf{h}$ . Si vede subito che

$$L\mathbf{h} = \text{grad } f(P_0) \cdot \mathbf{h}.$$

Dunque la differenziabilità della  $f$  in  $\mathbb{R}^3$  implica l'esistenza delle derivate parziali di  $f$  in  $P_0$ . Il contrario non vale necessariamente. La derivata direzionale di  $f$  in  $P_0$  nella direzione  $\mathbf{n}$  è data da

$$\text{grad } f(P_0) \cdot \mathbf{n}.$$

Data la funzione  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sufficientemente liscia (ad esempio, di classe  $C^1$ ), si può dimostrare che il gradiente di  $f$  in  $P_0$  è un vettore che è ortogonale alla superficie di livello

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = f(P_0)\}.$$

Il *piano tangente* in  $P_0$  a questa superficie di livello passa per  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ed è ortogonale a  $\text{grad } f(P_0)$ , quindi ha l'equazione

$$(\mathbf{x} - P_0) \cdot \text{grad } f(P_0) = 0.$$

In altre parole, la sua equazione è data da

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0.$$

Il gradiente di  $f$  ha il verso rivolto verso la parte dove la funzione  $f$  cresce.

## 2 Nabla

È utile introdurre il *vettore simbolico*  $\nabla$ :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

L'operatore  $\nabla$  opera **formalmente** su una funzione scalare  $f$ . Il gradiente di  $f$  si può scrivere nella forma

$$\nabla f = \text{grad } f.$$

Sia  $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione di classe  $C^1$  con componenti  $F_x, F_y$  e  $F_z$ . Quindi le componenti si definiscono come

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_x(\mathbf{x})\vec{i} + F_y(\mathbf{x})\vec{j} + F_z(\mathbf{x})\vec{k}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Si definisce la *matrice jacobiana*  $J$  della  $\mathbf{F}$  come

$$J\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Allora la *divergenza* della  $\mathbf{F}$  viene definita come

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

quindi la divergenza della  $\mathbf{F}$  è una funzione scalare. Il *rotore* della  $\mathbf{F}$  viene definita come

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Conviene ricordare la regola mnemonica

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Supponiamo che  $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia di classe  $C^2$ . Allora vale il teorema di Schwartz: le derivate parziali delle componenti della  $\mathbf{F}$  di secondo ordine non dipendono dall'ordine di derivazione parziale. In tal caso,

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{F}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\text{rot grad } f = \nabla \wedge \nabla f$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{k} = \vec{0};$$

$$\text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

dove

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

si chiama *operatore di Laplace* o *Laplaciano*.

Ricaviamo ora alcune regole prodotto (per funzioni di classe  $C^1$ ):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= f \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F}, \\ \operatorname{rot}(f\mathbf{F}) &= \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{F} + f \operatorname{rot} \mathbf{F}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}.\end{aligned}$$

**Proposizione A.1** Sia  $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^2$ . Allora

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F},$$

dove  $\Delta \mathbf{F}$  è il vettore con componenti  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$  e  $\Delta F_z$ .

*Dimostrazione.* Sia

$$\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{G} &= \left( \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \right) \vec{i} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \right) \vec{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

Ciò viene scritto nella forma

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{G} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \vec{j} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \vec{k} - \left[ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right] \vec{i} \\ &\quad - \left[ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right] \vec{j} - \left[ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right] \vec{k} \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - [(\Delta F_x) \vec{i} + (\Delta F_y) \vec{j} + (\Delta F_z) \vec{k}],\end{aligned}$$

il che dimostra la proposizione. □

### 3 Potenziali e potenziali vettoriali

**a. Campi vettoriali conservativi e irrotazionali.** Sia  $\mathbf{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$  un campo vettoriale continuo (mecc.: una forza continua). Allora  $\mathbf{F}$  si dice *conservativo* se esiste un cosiddetto *potenziale*  $U$  di classe  $C^1$  tale che

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U.$$

Un campo vettoriale è conservativo se e solo se l'integrale curvilineo

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

non dipende dalla traiettoria che connette il punto 1 al punto 2, ma soltanto dai punti 1 e 2. In meccanica quest'integrale curvilineo rappresenta il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  per lo spostamento da 1 a 2. In particolare, il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è conservativo se e solo se l'integrale curvilineo

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

per ogni traiettoria chiusa. In meccanica quest'integrale curvilineo rappresenta il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  per uno spostamento lungo una traiettoria chiusa.

Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale conservativo di classe  $C^1$ . In tal caso il corrispondente potenziale è una funzione di classe  $C^2$ . Inoltre,

$$\text{rot } \mathbf{F} = -\text{rot grad } U = \vec{0}.$$

In altre parole, un campo vettoriale conservativo di classe  $C^1$  è *irrotazionale*. Il contrario (cioè, ogni campo vettoriale di classe  $C^1$ , che è irrotazionale, è conservativo) vale soltanto nei domini stellati oppure, più generalmente, nei domini semplicemente connessi.<sup>1</sup>

**b. Campi vettoriali con potenziale vettore e campi vettoriali solenoidali.** Sia  $\mathbf{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$  un campo vettoriale continuo. Si dice che il campo vettoriale  $\mathbf{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$  di classe  $C^1$  è un *potenziale vettore* di  $\mathbf{F}$  se

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

---

<sup>1</sup>Un dominio  $D$  si dice *semplicemente connesso* se per ogni funzione continua (curva)  $\varphi : [0, 1] \rightarrow D$  e per ogni punto  $\mathbf{x}_0 \in D$  esiste una funzione continua (omotopia)  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$  tale che  $H(t, 0) = \varphi(t)$  e  $H(t, 1) = \mathbf{x}_0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . In altre parole, se ogni curva in  $D$  può essere deformata in un singolo punto in modo continuo.

Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  ha un potenziale vettore se e solo se il suo flusso attraverso una superficie chiusa  $S$  in  $D$  si annulla, cioè se e solo se

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0,$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale esterno sulla superficie  $S$ .

Se  $\mathbf{F}$  è di classe  $C^1$  e quindi  $\mathbf{A}$  è di classe  $C^2$ , allora

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

In altre parole, ogni campo vettoriale di classe  $C^1$  in possesso di un potenziale vettore è *solenoidale* nel senso che si annulla la sua divergenza. Il contrario (cioè, ogni campo vettoriale solenoidale di classe  $C^1$  ha un potenziale vettore) vale soltanto nei domini aperti  $D$  che hanno la proprietà che il complementare della sua chiusura,  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ , è connesso.<sup>2</sup>

## 4 Moltiplicatori di Lagrange

In questa sezione svolgiamo alcuni esercizi sui moltiplicatori di Lagrange.

**1. Media geometrica vs. media aritmetica.** *Si dimostri che la media geometrica  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  dei numeri positivi  $a_1, \dots, a_n$  non supera la sua media aritmetica  $(a_1 + \dots + a_n)/n$ :*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . Infatti, cerchiamo il massimo della funzione

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

sotto il vincolo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S,$$

essendo  $S$  una costante positiva. Definiamo

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \{S - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\}.$$

Calcolando le sue derivate parziali prime si ha:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{n} (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}-1} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n - \lambda = \frac{(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n x_i} - \lambda,$$

---

<sup>2</sup>In altre parole, si richiede che  $D$  non contenga dei buchi aperti. Si richiede che ogni superficie in  $D$  può essere deformata in modo continuo in un singolo punto.



per  $i = 1, 2, \dots, n$ , e

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = S - (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Azzerando tutte le derivate parziali si ottiene:

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} x_1 = \dots = x_n = \frac{(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n\lambda},$$

mentre  $x_1 + \dots + x_n = S$ . Quindi  $\xi = (S/n)$  e  $\lambda = (1/n)$ . Di conseguenza,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{S}{n}.$$

Ci rimane di mostrare che il punto critico è un massimo. Ciò segue comunque dall'esistenza del massimo della funzione  $F$  sull'insieme compatto

$$\{x_1, \dots, x_n\} : x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n), \ x_1 + x_2 + \dots + x_n = S\}.$$

**2. Distanza da una retta nel piano.** Si calcoli la distanza del punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  dalla retta di equazione  $ax + by = c$ , essendo  $a^2 + b^2 > 0$ . Infatti, calcoliamo il minimo della funzione

$$F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

sotto il vincolo

$$ax + by = c.$$

Definiamo

$$\phi(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda(c - ax - by).$$

Calcolando la sue derivate parziali prime si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 2(x - x_0) - \lambda a, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2(y - y_0) - \lambda b, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} &= c - ax - by. \end{aligned}$$

Azzerando tutte le derivate parziali si ottiene:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\lambda a, \quad y = y_0 + \frac{1}{2}\lambda b, \quad ax + by = c.$$

Quindi

$$\lambda = \frac{2(c - ax_0 - by_0)}{a^2 + b^2}, \quad F_{\max} = \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda b\right)^2 = \frac{(c - ax_0 - by_0)^2}{a^2 + b^2}.$$

Di conseguenza, la distanza,  $\sqrt{F_{\max}}$ , del punto  $(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c$  è data dall'espressione

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**3. Distanza da una retta nello spazio.** Si calcoli la distanza del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  dalla retta che costituisce l'intersezione dei piani di equazione  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ , essendo  $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0$  ( $i = 1, 2$ ). Infatti, calcoliamo il minimo della funzione

$$F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

sotto i due vincoli

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Definiamo

$$\phi(x, y, z, \lambda, \mu) = F(x, y, z) + \lambda\{d_1 - (a_1x + b_1y + c_1z)\} + \mu\{d_2 - (a_2x + b_2y + c_2z)\}.$$

Calcolando la sue derivate parziali prime si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 2(x - x_0) - \lambda a_1 - \mu a_2, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2(y - y_0) - \lambda b_1 - \mu b_2, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 2(z - z_0) - \lambda c_1 - \mu c_2, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} &= d_1 - (a_1x + b_1y + c_1z), \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mu} &= d_2 - (a_2x + b_2y + c_2z). \end{aligned}$$

Azzerando tutte le derivate parziali si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{2}\lambda a_1 + \frac{1}{2}\mu a_2, \\ y &= y_0 + \frac{1}{2}\lambda b_1 + \frac{1}{2}\mu b_2, \\ z &= z_0 + \frac{1}{2}\lambda c_1 + \frac{1}{2}\mu c_2, \\ a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2. \end{aligned}$$

Sostituendo  $(x, y, z)$  nei due vincoli si ottiene il seguente sistema lineare per  $\frac{1}{2}\lambda$  e  $\frac{1}{2}\mu$ :

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - a_1x_0 - b_1y_0 - c_1z_0 \\ d_2 - a_2x_0 - b_2y_0 - c_2z_0 \end{pmatrix}.$$

Introducendo i vettori  $\vec{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $\vec{a}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , e  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , si riscrive il sistema nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \|\vec{a}_1\|^2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \|\vec{a}_2\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{x}_0 \\ d_2 - \vec{a}_2 \cdot \vec{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che il determinante del sistema è dato da:

$$\|\vec{a}_1\|^2\|\vec{a}_2\|^2 - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2 = \|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|^2,$$

il quale si annulla se e solo se i due piani sono paralleli o coincidono. Supponendo che  $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ , applichiamo la regola di Cramer per calcolare i due moltiplicatori di Lagrange:

$$\lambda = 2 \frac{\begin{vmatrix} \|\vec{a}_1\|^2 & d_1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & d_2 - \vec{a}_2 \cdot \vec{x}_0 \end{vmatrix}}{\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|^2}, \quad \mu = 2 \frac{\begin{vmatrix} d_1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{x}_0 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \\ d_2 - \vec{a}_2 \cdot \vec{x}_0 & \|\vec{a}_2\|^2 \end{vmatrix}}{\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|^2}.$$

Ora si osservi che

$$F_{\max} = \left\| \frac{1}{2}\lambda\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\mu\vec{a}_2 \right\|^2.$$

La distanza del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  dalla retta è data dall'espressione

$$\left\| \frac{1}{2}\lambda\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\mu\vec{a}_2 \right\|.$$



# Appendice B

## Pendolo Semplice

**a. Il pendolo semplice senza approssimazioni.** Il pendolo semplice consiste in una massa  $m$  sottoposto ai vincoli

$$\sqrt{x^2 + z^2} = l, \quad y = 0.$$

La variabile  $\theta$  è definita dalle equazioni

$$z = l \cos(\theta), \quad x = l \sin(\theta).$$

L'energia cinetica  $T$  e il potenziale sono date da

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad U = -mgl \cos \theta,$$

dove  $l$  è la lunghezza del pendolo e  $g$  è l'accelerazione gravitazionale. Utilizzando la conservazione dell'energia totale si ha

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = -mgl \cos(\alpha), \quad (\text{B.1})$$

dove  $\theta(t_\alpha) = \alpha$  e  $\dot{\theta}(t_\alpha) = 0$  per un opportuno  $t_\alpha > 0$ . Quindi

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)}.$$

Supponendo che  $\dot{\theta} > 0$ , otteniamo

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)},$$

il che implica

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} t_\alpha.$$

Poichè l'intervallo di tempo da  $t = 0$  a  $t = t_\alpha$  occupa soltanto un quarto del periodo  $p$ , otteniamo

$$p = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)}}.$$

Sostituendo

$$\sin(\tfrac{1}{2}\theta) = \sin(\tfrac{1}{2}\alpha) \sin \phi,$$

otteniamo

$$p = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{1}{2}\alpha) \sin^2(\phi)}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin \tfrac{1}{2}\alpha), \quad (\text{B.2})$$

dove, per  $0 \leq k < 1$ ,

$$K(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2\tau^2)}}$$

è il cosiddetto *integrale ellittico di prima specie*.

Facendo tendere  $\alpha \rightarrow 0^+$  e utilizzando  $K(0) = \arcsin(1) = \frac{1}{2}\pi$ , si trova il limite  $p \approx 2\pi\sqrt{l/g}$ . Un tale limite si ricava anche approssimando l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta),$$

ottenuta derivando la (B.1) rispetto al tempo  $t$ , dall'equazione

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta.$$

Quest'ultima ha come soluzione

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l}) + \dot{\theta}_0 \frac{\sin(t\sqrt{g/l})}{\sqrt{g/l}} = \alpha \cos((t - t_\alpha)\sqrt{g/l}),$$

dove  $\theta_0 = \theta(0)$ ,  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$ ,  $\alpha = \theta(t_\alpha)$  e  $\dot{\theta}(t_\alpha) = 0$ .

**b. Integrale ellittico di prima specie.** Nel 1799 Carl Friedrich Gauss scoprì un metodo per calcolare gli integrali ellittici numericamente. Partendo da due numeri positivi  $a_0$  e  $b_0$  tali che  $0 < b_0 \leq a_0$ , si costruiscono le successioni  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  nel seguente modo:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_n}. \quad (\text{B.3})$$

In tal modo

$$0 < b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \dots \leq a_1 \leq a_0,$$

mentre

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

Sia  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Allora

$$0 \leq b \leq a, \quad a - b = \frac{1}{2} \frac{(a - b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2},$$

il che implica  $a = b$ . In altre parole,

$$M(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

La cosiddetta *media aritmetico-geometrica*  $M(a, b)$  ha le seguenti proprietà:

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b), \quad M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Quindi

$$M(1, b) = M\left(\frac{1}{2}(1+b), \sqrt{b}\right) = \frac{1}{2}(1+b)M\left(1, \frac{2\sqrt{b}}{1+b}\right).$$

**Teorema B.1** Per  $x > 0$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(1, x)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1-x^2) \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} K(\sqrt{1-x^2}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

*Dimostrazione.* Per  $a, b > 0$  definiamo  $T(a, b)$  come

$$T(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)}}.$$

Allora

$$T(a, a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]}} = \frac{1}{a}.$$

Inoltre, sostituendo  $t = b \tan(\theta)$  si ha

$$T(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}.$$

Sostituiamo ora  $u = \frac{1}{2}(t - [ab/t])$ :

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2t}(t + [ab/t])dt, \\ u^2 + [\frac{1}{2}(a+b)]^2 &= (t^2 + a^2)(t^2 + b^2), \\ u^2 + (\sqrt{ab})^2 &= [\frac{1}{2}(t + [ab/t])]^2, \end{aligned}$$

il che conduce all'identità

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{(u^2 + [\frac{1}{2}(a+b)]^2)(u^2 + (\sqrt{ab})^2)}} \\ &= T(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}). \end{aligned}$$

Per  $x > 0$  definiamo  $a_n$  e  $b_n$  ricorsivamente dalla (B.3), dove  $a_0 = x$  e  $b_0 = 1$ . Si verifica facilmente che per ogni  $x > 0$  si ha:

$$\frac{1}{M(1, x)} = T(M(1, x), M(1, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n, b_n) = T(a_0, b_0) = T(1, x),$$

il che implica la (B.4). □

Infine ritorniamo all'espressione (B.2) per il periodo  $p$  del pendolo. Utilizzando la (B.4) esso si scrive nella seguente forma finale:

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{M(1, \cos \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Per  $\alpha \rightarrow 0^+$  ne risulta la solita formula approssimativa

$$p \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



# Appendice C

## Angoli di Eulero

### 1 Definizione degli angoli di Eulero

Per determinare la posizione di un punto rispetto a un'assegnata terna  $OXYZ$  basta conoscere la posizione del punto rispetto alla terna  $Oxyz$  e la posizione di quest'ultima terna rispetto alla terna prefissata  $OXYZ$ . In particolare, le equazioni

$$X = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \quad (\text{C.1a})$$

$$Y = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z, \quad (\text{C.1b})$$

$$Z = \zeta_1 x + \zeta_2 y + \zeta_3 z. \quad (\text{C.1c})$$

mostrano che la posizione della terna  $Oxyz$  rispetto alla terna  $OXYZ$  è nota quando si conoscono i nove coseni direttori  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  dei versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Questi ultimi non sono tutti indipendenti fra loro, ma devono soddisfare le sei relazioni espresse dalle

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 = 1, \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \quad (\text{C.2a})$$

$$\xi_i \xi_h + \eta_i \eta_h + \zeta_i \zeta_h = 0 \quad \text{per } i \neq h = 1, 2, 3. \quad (\text{C.2b})$$

È opportuno introdurre dei parametri che consentono una più agevole (e visuale) identificazione della posizione di  $Oxyz$  rispetto a  $OXYZ$ . Tre parametri che consentono di identificare facilmente l'orientazione di  $Oxyz$  rispetto a  $OXYZ$  sono i cosiddetti *angoli di Eulero*. L'introduzione di tali angoli può essere fatta come segue: Supponiamo che i piani  $xy$  e  $XY$  non coincidano. In tal caso questi piani si intersecheranno lungo una retta che è perpendicolare sia all'asse  $z$  che all'asse  $Z$  (essendo comune a due piani rispettivamente ortogonali all'asse  $z$  e all'asse  $Z$ ) e quindi al piano da questi individuato. La retta ottenuta come intersezione dei piani  $xy$  e  $XY$  e orientata in modo che rispetto ad essa

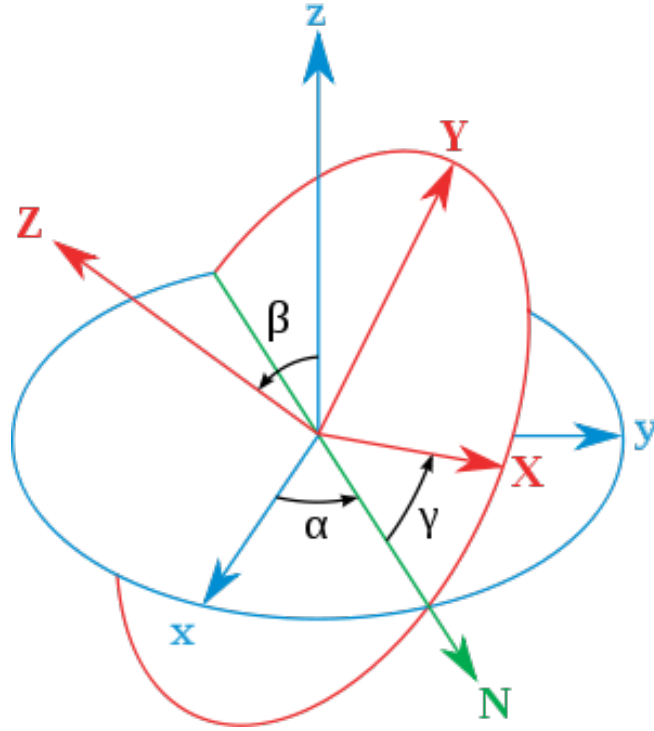


Figura C.1: Angoli di Eulero. Vedi Wikipedia.

appaia destro l'angolo  $\hat{Z}z$  delle due rette orientate  $Z$  e  $z$ , viene detta linea dei nodi e si denota con  $N$ , mentre l'angolo  $\hat{Z}z$  si chiama *angolo di nutazione* e si denota con  $\beta$  (per definizione si ha  $0 < \beta < \pi$ ). Si chiama *angolo di precessione* e si denota con  $\gamma$  l'angolo  $\hat{X}N$  misurato nel verso destro rispetto a  $Z$ ; infine, l'angolo  $\hat{N}x$  misurato nel verso destro rispetto a  $z$  si dice *angolo di rotazione propria* e si indica con  $\alpha$ . I tre angoli  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  definiti in questo modo si chiamano *angoli di Eulero* della terna  $Oxyz$  rispetto alla terna  $OXYZ$  e sono soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{cases} 0 < \beta < \pi, \\ 0 \leq \gamma < 2\pi, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

È altresì facile osservare che, assegnati tre valori arbitrari a  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  in modo che le limitazioni espresse dalla (C.3) siano verificate, resta individuata la posizione della terna  $Oxyz$  rispetto alla terna  $OXYZ$ . Infatti, nel piano  $XY$  l'angolo  $\gamma$  consente di tracciare la linea dei nodi  $N$ . Quindi nel piano per  $O$  perpendicolare alla linea dei nodi, l'asse  $z$  è individuato come quello che, nel verso destro rispetto a  $N$ , forma un angolo  $\beta$  con l'asse  $Z$ . Inoltre nel piano passante per  $O$

e perpendicolare all'asse  $z$ , l'asse  $x$  è localizzato dalla sua anomalia  $\alpha$  rispetto alla linea dei nodi (nel verso destro rispetto all'asse  $z$ ). Infine l'asse  $y$  risulta univocamente individuato come quello che con gli assi  $x$  e  $z$  forma una terna trirettangola destra.

Rimane da considerare il caso in cui i piani  $XY$  e  $xy$  coincidono. In tal caso l'angolo di nutazione  $\beta$  è uguale a  $0$  o a  $\pi$ . In tal caso la linea dei nodi è indeterminata e lo stesso si può dire per gli angoli  $\gamma$  e  $\alpha$ . Rimane invece determinata la somma degli angoli  $\gamma$  e  $\alpha$  che in questo caso sono complanari. Infatti, ovunque si pensi tracciata la linea dei nodi, si ha  $\gamma + \alpha = \hat{X}x$ , e quest'angolo basta a individuare univocamente la terna  $Oxyz$  rispetto alla terna fissa  $OXYZ$ .

Possono sorgere difficoltà legate alla continuità del moto come conseguenza delle limitazioni (C.3). Infatti, può capitare che per rispettare tali limitazioni occorra far saltare bruscamente qualcuno degli angoli di Eulero da un valore estremo all'altro senza che ciò corrisponda a una discontinuità nel moto. Per evitare tali discontinuità artificiali si può rilassare qualcuna delle limitazioni espresse dalle (C.3): in questo modo si perde però la biunivocità nella corrispondenza fra i punti dello spazio e terne di valori  $\beta, \gamma, \alpha$  degli angoli di Eulero.

## 2 Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero

Ci occupiamo di trovare le formule che esprimono i coseni direttori  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  dei versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  in funzione degli angoli di Eulero  $\beta, \gamma, \alpha$ . A tal fine osserviamo che la terna mobile  $Oxyz$  a cui competono tre assegnati angoli di Eulero  $\beta, \gamma$  e  $\alpha$  si ottiene a partire dalla terna fissa  $OXYZ$  eseguendo tre successive rotazioni destre rispetto al rispettivo asse orientato di rotazione. Le rotazioni da eseguire sono le seguenti:

1. La prima rotazione è una rotazione di angolo  $\gamma$  intorno all'asse  $Z$ . In questo modo si ottiene la terna  $OX_1Y_1Z$  essendo l'asse  $X_1$  proprio la linea dei nodi. Le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} X = X_1 \cos \gamma - Y_1 \sin \gamma, \\ Y = X_1 \sin \gamma + Y_1 \cos \gamma, \\ Z = Z. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{pmatrix}.$$

2. La seconda rotazione è una rotazione di angolo  $\beta$  intorno alla linea dei nodi. In questo modo si ottiene la terna  $OX_1y_1z$  essendo l'asse  $y_1$  la retta del piano  $Zz$  tale che  $y_1\hat{z} = \frac{\pi}{2}$  e  $Y_1\hat{y}_1 = \beta$ . In analogia con le (C.4) possiamo scrivere le equazioni di tale rotazione:

$$\begin{cases} X_1 = X_1, \\ Y_1 = y_1 \cos \beta - z \sin \beta, \\ Z = y_1 \sin \beta + z \cos \beta. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix}.$$

3. L'ultima rotazione è una rotazione di angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $z$  che porta la linea dei nodi a sovrapporsi all'asse  $x$  (e l'asse  $y_1$  su  $y$ ). In questo modo si ottiene la terna  $Oxyz$ . Sfruttando le (C.4) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} X_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le (C.5) e (C.6) nelle (C.4) e svolgendo semplici prodotti matriciali si trova:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

dove

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  sono i coseni direttori le cui espressioni sono legate agli angoli di Eulero dalle seguenti espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma, \\ \xi_2 = -\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma, \\ \xi_3 = \sin \beta \sin \gamma, \\ \eta_1 = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma, \\ \eta_2 = -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma, \\ \eta_3 = -\sin \beta \cos \gamma, \\ \zeta_1 = \sin \alpha \sin \beta, \\ \zeta_2 = \cos \alpha \sin \beta, \\ \zeta_3 = \cos \beta. \end{array} \right. \quad (\text{C.8})$$



# Appendice D

## Esercizi

### Cinematica

1. Un treno parte da una stazione con accelerazione costante  $0,125 \text{ m/sec}^2$  fino a raggiungere la velocità di regime di  $90 \text{ km/ora}$ , indi il moto procede uniforme; la stazione da raggiungere dista  $10 \text{ km}$  e prima di arrivarvi il treno viene frenato con una decelerazione costante di  $0,833 \text{ m/sec}^2$ . Determinare lo spazio e il tempo richiesto per la fase di avviamento e quella di frenata, la durata totale del percorso e infine la velocità media.
2. Ammesso, come si dimostrerà in dinamica, che un punto materiale, soggetto solo al suo peso, si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione  $g \sin \alpha$  se obbligato a scendere lungo una retta inclinata di  $\alpha$  rispetto all'orizzonte (meglio la retta di pendio di un piano inclinato di  $\alpha$ ) si dimostri che il tempo necessario per percorrere, partendo dalla quiete, una corda di un cerchio verticale con un estremo nel suo punto più basso  $A$  è indipendente dall'inclinazione della corda (Galileo).
3. Trovare l'inclinazione della retta di più rapida discesa da un punto  $B$  di una parabola (con asse verticale e concavità verso l'alto) al suo fuoco  $F$ .
4. Un punto si muove con accelerazione costante  $a$  e all'istante  $t = \tau$  la sua velocità è  $u$ ,  $d$  lo spazio percorso. Scrivere l'equazione del moto.
5. Due punti mobili su una stessa retta partono dallo stesso luogo, con accelerazioni costanti uguali, con velocità iniziali nulle, l'uno all'istante  $\tau$ , l'altro all'istante  $\tau$ . Dimostrare che la distanza fra i due punti va crescendo linearmente col tempo.
6. Due punti si muovono sulla stessa retta, nello stesso verso e con la stessa accelerazione  $a$ , il primo parte dall'origine con velocità  $v_0$ , l'altro dal punto

distante  $d$  dall'origine e con velocità iniziale nulla. Trovare l'istante e il luogo in cui avviene l'incontro fra i due punti.

7. Un punto si muove di moto naturalmente accelerato con accelerazione  $a$ . All'istante  $\tau$  viene, con un urto, raddoppiata la sua velocità. Scrivere l'equazione del moto per  $t > \tau$ .
8. Determinare l'equazione del moto armonico di pulsazione  $\omega$ , sapendo che la sua ascissa iniziale è  $s_0$ , la sua velocità  $v_0$ .
9. Determinare velocità ed accelerazione del moto rettilineo rappresentato dall'equazione:

$$s = ut + C \cos \omega t - C,$$

dove  $u$  e  $C$  sono costanti.

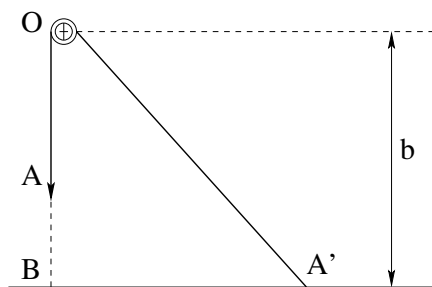
10. Calcolare velocità ed accelerazione del moto rettilineo rappresentato dall'equazione:

$$s = kt \operatorname{sen} \omega t,$$

con  $k$  e  $\omega$  costanti. Studiarne poi le proprietà tracciandone il diagramma orario.

11. Un'asta rigida, lunga 1 si muova in modo che il suo estremo  $A$  percorra, di moto uniforme con velocità  $u$  la retta  $Ox$  e l'altro estremo  $B$  la retta  $Oy$  perpendicolare a  $Ox$ . Trovare l'equazione del moto di  $B$ , la sua velocità e accelerazione.

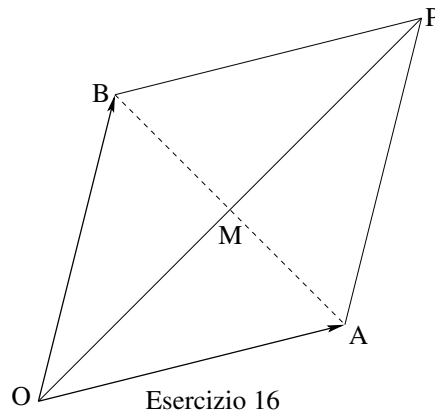
12. Una pallina  $A$  percorre una retta verticale. Essa è attaccata all'estremo di un filo lungo 1 che passa attraverso una piccola carrucola (assimilabile ad un punto  $O$ ) e che ha l'altro estremo  $A'$  che percorre una retta orizzontale con velocità costante  $u$ . La distanza della carrucola dalla retta percorsa da  $A'$  è  $b$ . Trovare l'equazione del moto di  $A$ , la sua velocità e accelerazione.



Esercizio 12



13. L'estremo  $A'$  del filo considerato nell'esercizio precedente è unito, ad un'asta rigida di lunghezza  $m$  che ruota, con velocità costante  $\omega$ , intorno ad un punto  $Q$  sulla retta percorsa da  $A$ . Trovare l'equazione del moto di  $A$  e la sua velocità, supposto  $QO = h$ .
14. Una pallina, schematizzabile con un punto  $P$  scorre su una guida rettilinea  $r$  sospinta da un'asta che ruota uniformemente, in senso orario, intorno a un suo estremo  $Q$  distante  $h$  da  $r$ . Determinare il moto della pallina.
15. Studiare il moto dell'estremo della biella di un sistema manovella-biella, quando la manovella ruota uniformemente con velocità angolare  $\omega$ . Dimostrare che se il quadrato del rapporto manovella-biella è trascurabile rispetto all'unità, il moto è armonico.
16. Un rombo articolato  $OAPB$  imperniato in  $O$  si muove in modo che  $A$  e  $B$  descrivono la circonferenza di raggio  $OA = OB = a$ , con la stessa velocità angolare  $\omega$ , ma in senso opposto. Dimostrare che  $P$  si muove su una retta di moto armonico, con ampiezza  $2a$ .



17. Se  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sono le equazioni parametriche di una curva piana ricavare, valendosi della cinematica, l'espressione del raggio di curvatura e dei coseni direttori della tangente e della normale alla curva stessa.
18. Dato il moto rappresentato dalle equazioni:

$$x = ut, \quad y = C \cos(\omega t + \gamma),$$

con  $u$ ,  $C$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  costanti, determinare la traiettoria del moto, la sua velocità e accelerazione, le componenti tangenziale e centripeta di quest'ultima, e lo spazio in funzione del tempo.

19. Un punto  $P$  percorre una semicirconferenza di raggio  $r$  e centro nell'origine, la sua proiezione sull'asse  $x$  si muove di moto uniforme con velocità  $c$ .<sup>1</sup> Calcolare velocità e accelerazione di  $P$  in funzione dell'angolo  $\varphi$  che la retta  $PO$  forma con l'asse delle  $x$ .
20. Un punto  $P$  si muove sulla parabola  $y = kx^2$ , la sua proiezione sull'asse  $x$  si muove di moto uniforme con velocità  $c$ . Calcolare la velocità e l'accelerazione di  $P$  in funzione di  $t$  e delle sue coordinate. Generalizzare il risultato quando il punto si muove sulla curva  $y = f(x)$ .
21. Il punto  $P$  si muove sulla parabola  $y = kx^2$  e la sua proiezione sull'asse  $x$  si muove di moto armonico, cioè con la legge  $x = C \cos(\omega t + \gamma)$ . Trovare velocità e accelerazione  $P$ .
22. Un punto si muove con velocità costante  $c$  sulla parabola  $y = kx^2$ . Trovare l'accelerazione del punto, in particolare per  $x = 0$ , e le componenti della velocità e accelerazione.
23. Un punto si muove su un cerchio di moto armonico  $s = C \cos(\omega t + \gamma)$ . Calcolare velocità e accelerazione.
24. Una locomotiva percorre un tratto lungo  $2 \text{ km}$  con raggio di curvatura  $0,5 \text{ km}$ , aumenta in quel tratto la sua velocità con accelerazione costante, da  $89$  a  $91 \text{ km}$  all'ora. Trovare l'accelerazione della locomotiva nell'istante finale.
25. Un punto si muove di moto uniforme su una catenaria di equazione:

$$y = \frac{b}{2} (e^{x/b} + e^{-x/b}) - b$$

( $b$  costante). Scrivere le equazioni cartesiane del moto del punto.

26. Calcolare le componenti sugli assi della velocità e dell'accelerazione nel moto dell'esercizio precedente.
27. Se il punto  $A$  di contatto col suolo della ruota anteriore di una bicicletta percorre una retta, trovare la traiettoria del punto di contatto  $P$  della ruota posteriore.
28. Un punto  $Q$  parte dall'origine e si muove sull'asse  $y$  di moto uniforme con velocità  $v$ . Un punto  $P$  parte da un punto  $P_0$  dell'asse  $x$  di ascissa  $b$  e si muove con velocità  $u$  costante in modulo, ma sempre diretta verso  $Q$  (problema di inseguimento). Trovare la traiettoria di  $P$ .

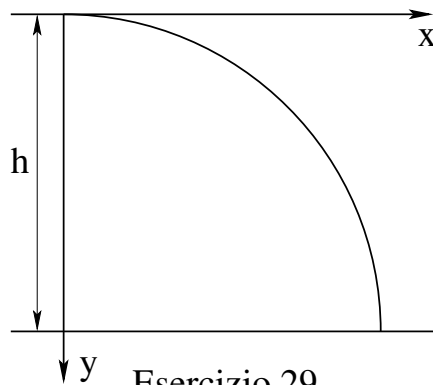
---

<sup>1</sup>Ovviamente il moto di  $P$  è il moto dell'intersezione con la semicirconferenza di una retta che si muove, con traslazione uniforme di velocità  $c$ , rimanendo parallela all'asse  $y$ .

29. In dinamica si dimostra che una bomba, lanciata da un aeroplano in moto (in direzione orizzontale) con velocità  $v_0$ , si muove, se si trascura la resistenza dell'aria, secondo le equazioni:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità ed essendo il sistema di assi  $x$  e  $y$  con origine nel punto dove si trova l'aeroplano al momento in cui lascia cadere la bomba, l'asse  $x$  orizzontale nella direzione del moto dell'aereo, l'asse  $y$  verticale e diretto verso il basso. Se  $h$  è l'altezza dell'aereo dal suolo, trovare a quale distanza, in direzione orizzontale dall'aereo stesso, cade la bomba.



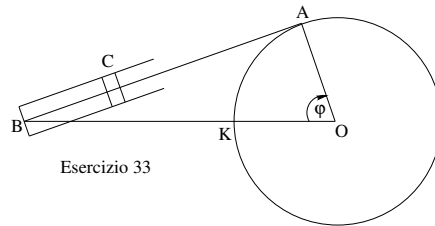
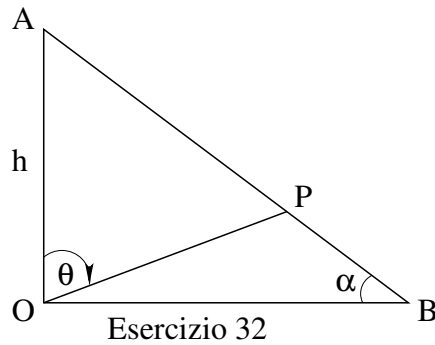
Esercizio 29

30. Un punto  $P$  si muove sullo spirale logaritmico di equazione, in coordinate polari  $r = C e^{\mu\theta}$  ( $C$  e  $\mu$  costanti) con velocità angolare  $\omega$  costante rispetto all'origine. Trovare le componenti della velocità e accelerazione del moto in coordinate polari in funzione di  $r$  e  $\theta$  e generalizzare la questione supponendo che la traiettoria del punto abbia equazione  $r = f(\theta)$ .
31. Un punto si muove con velocità areolare costante e uguale a  $c/2$  sulla traiettoria di equazione (in coordinate polari):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu\theta},$$

dove  $p$ ,  $e$ ,  $\nu$  sono costanti. Trovare l'accelerazione del moto.

32. Un punto si muove di moto naturalmente accelerato su un piano  $AB$  inclinato con inclinazione  $\alpha$ . Trovare la velocità areale e angolare, rispetto alla proiezione  $O$  di  $A$  sull'orizzontale per  $B$ .



33. Nel meccanismo rappresentato dalla figura il cilindro  $BC$  è girevole intorno al perno  $B$ , la manovella  $OA$ , lunga  $r$ , si muove intorno ad  $O$  in senso destrogiro con velocità angolare costante  $\omega$ . Determinare la velocità  $v$  dello stantuffo  $C$ , e la velocità angolare  $Q$  del cilindro.
34. Un punto si muove di moto elicoidale uniforme con velocità  $v$  su un'elica cilindrica di raggio  $r$  e passo  $p$ . Trovare l'accelerazione e il raggio di curvatura dell'elica.
35. Dimostrare che il moto rappresentato dalle equazioni

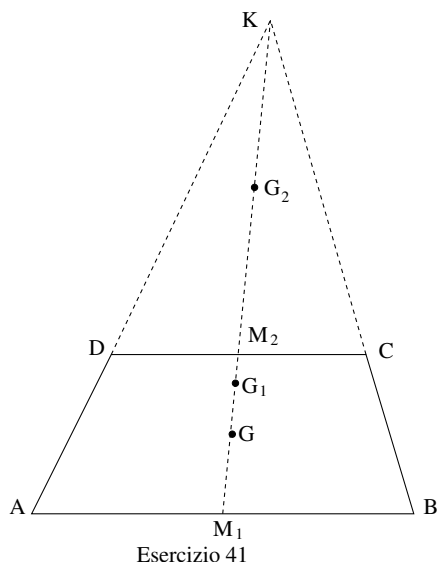
$$x = \frac{1}{2}r \sin 2\omega t, \quad y = r \sin^2 \omega t, \quad z = r \cos \omega t,$$

ha per traiettoria la finestra di Viviani<sup>2</sup> e calcolarne velocità e accelerazione.

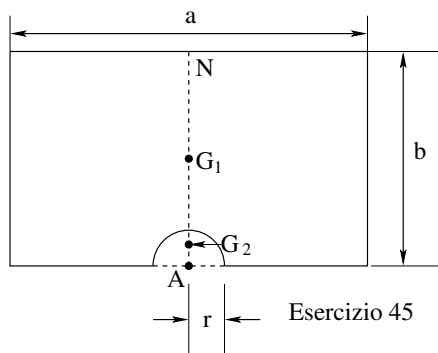
### Momenti

34. Dimostrare che il baricentro di tre masse puntiformi poste nei vertici di un triangolo e proporzionali alle lunghezze dei lati opposti si trova nel centro del cerchio inscritto al triangolo.
35. Trovare il baricentro di un triangolo sotto l'ipotesi che la massa sia concentrata nei lati in proporzione alle loro lunghezze e uniformemente.
41. Determinare il baricentro di un trapezio di basi  $b_1$  e  $b_2$  e di altezza  $h$ .

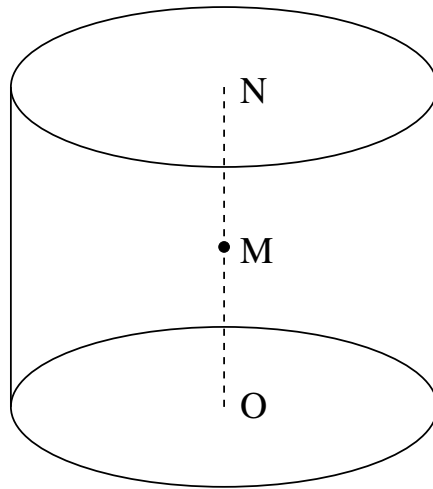
<sup>2</sup>L'intersezione della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  con il cilindro  $x^2 + (y - \frac{1}{2}r)^2 = \frac{1}{4}r^2$ .



43. Trovare il baricentro di un settore circolare di raggio  $R$  e di angolo di apertura  $\alpha$ .
44. Determinare il baricentro di un settore di corona circolare di angolo di apertura  $\alpha$  a raggio  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_1 > R_2 > 0$ ).
45. Determinare il baricentro di un arco in muratura, schematicamente rappresentato dalla regione compresa tra un rettangolo di lati  $a$  e  $b$  e un semicerchio di raggio  $r$  ( $r < \frac{1}{2}a$ ,  $r < b$ ); il centro del cerchio si trova sul punto di mezzo  $A$  del lato del rettangolo lungo  $a$ .



46. Determinare il baricentro di una scatola senza coperchio, a forma cilindrica, raggio di base  $r$ , altezza  $h$ , con spessore così piccolo da poterla assimilare alla sua superficie esterna.
47. Determinare il baricentro di una scatola cubica di spigola  $a$ , senza coperchio.



### Esercizio 46

48. Sia  $f(z)$  ( $a \leq z \leq b$ ) una funzione continua e positiva. Trovare il baricentro del solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z)\}.$$

51. Determinare il baricentro del segmento di parabola di equazione:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}\},$$

essendo  $a, p$  costanti positive.<sup>3</sup>

52. Determinare il baricentro dell'arco di catenaria di equazione:

$$y = \frac{b}{2} (e^{x/b} + e^{-x/b}) - b$$

compreso tra i punti di ascissa  $-a$  e  $a$ .

53. Trovare il baricentro dell'elica cilindrica di equazione:

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = c\theta,$$

essendo  $a, c$  costanti positive e  $\theta$  compresa tra  $0$  e  $2\pi/p$ .

54. Trovare il baricentro di una semisfera di raggio  $R$ .

55. Trovare il baricentro della zona sferica di equazione:

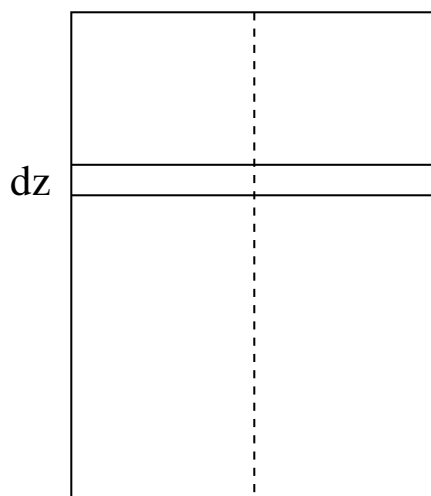
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\},$$

essendo  $h \in (0, R)$ .

---

<sup>3</sup>Il risultato è stato ottenuto prima da Archimede.

56. Trovare il baricentro di una colonna di area a forma di cilindro circolare, di altezza  $h$  tale che la sua base sia nel piano  $xy$  e la  $z$  secondo l'asse del cilindro, qualora la densità dell'area vari con la legge  $\rho = \rho_0 e^{-kz}$ , dove  $\rho_0$  è la densità per  $z = 0$  e  $k$  una costante positiva.



### Esercizio 56

#### Cinematica

101. È dato il moto piano definito dalle equazioni:

$$x(t) = t \cos(t), \quad y(t) = t \sin(t).$$

Si chiede: a) l'equazione cartesiana della traiettoria, b) la legge oraria, c) discutere il moto.

102. È dato il moto di equazioni:

$$x(t) = 2 + 3 \cos(\omega t), \quad y = 3 + 2 \sin(\omega t), \quad z = \cos(\omega t).$$

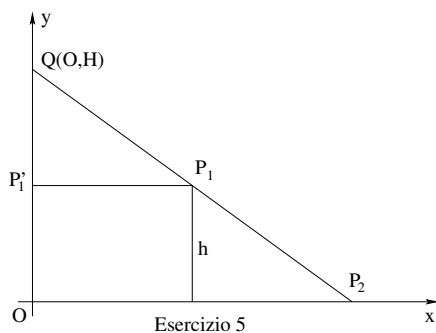
Si chiede: a) dimostrare che il moto è centrale e determinarne il centro, b) scrivere l'equazione del piano del moto.

103. Un punto  $P$  si muove con velocità assegnata:

$$\vec{v}(t) = (3 \sin(t), 2 \cos(t), 0).$$

Si chiede di determinare: a) gli istanti di arresto e quando il moto è accelerato o ritardato, b) l'accelerazione scalare, c) il moto nell'ipotesi che inizialmente (per  $t = 0$ ) sia:  $\vec{v}_0 = (0, 2, 0)$ ,  $P_0 = (-3, 0, 0)$ .

104. Un'automobile, che viaggia ad una certa velocità  $v_0$ , inizia a frenare e si arresta dopo un tempo  $t_1$ . Supposto che, mentre frenava, l'autoveicolo si sia mosso di moto uniformemente accelerato, determinare la lunghezza del cammino percorso durante la frenata stessa.
105. Si consideri una lampada situata in un punto  $\Omega$  posto alla quota  $H$  sopra un suolo piano orizzontale. Sia  $h$  ( $0 < h < H$ ) l'altezza di una persona che si allontana dalla lampada. Supponiamo che sia noto il moto della persona. Si chiede di determinare il moto del punto  $P_2$  estremità dell'ombra.



106. Il moto è dato da:

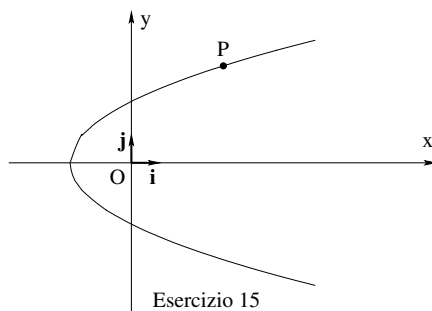
$$x(t) = 6t - 3t^2, \quad y(t) = 8t - 4t^2.$$

Determinare l'equazione della traiettoria, la velocità e l'accelerazione del punto.

107. Un punto  $P$  percorre con un moto uniformemente accelerato una circonferenza di raggio  $R$  partendo da fermo. Dopo aver percorso un arco lungo  $s_1$  esso ha acquistato una velocità  $\dot{s}_1$ . Trovare la velocità e l'accelerazione di  $P$  nella posizione  $s_1/2$ .
108. Un punto  $P$  descrive la sua traiettoria con accelerazione scalare assegnata  $\ddot{s}(t)$ . Si sa che all'istante  $t = t_1$  la sua velocità è  $\dot{s}_1$  e che  $s_1$  è la distanza percorsa. Si chiede di scrivere l'equazione del moto.
109. Si supponga che un sasso, gettato in un pozzo senza velocità iniziale, si muova con accelerazione costante e che il rumore, dovuto all'urto col fondo, si propaghi con velocità costante. Detta  $v_0$  la grandezza della velocità del suono, si chiama  $t_1$  il tempo intercorso tra l'istante in cui si lascia cadere il sasso e quello in cui si ode il rumore. Calcolare la profondità del pozzo.



110. Siano dati  $n$  moti armonici su una traiettoria riferita all'ascissa curvilinea  $s$ . Essi presentino tutti il medesimo centro (l'origine delle ascisse) e la medesima pulsazione  $\omega$ . Si chiede di studiare il moto composto.
111. Si consideri il riferimento cartesiano ortogonale e levogiro  $Oxyz$  e tre moti armonici di uguale periodo sui tre assi coordinati. Studiare il moto composto.
112. Nel piano  $Oxy$  si consideri un punto  $P$  mobile di moto uniformemente accelerato su una circonferenza di centro  $O$ . Determinare la velocità angolare e la velocità areolare rispetto al centro.
113. Riferiamo lo spazio al sistema cartesiano levogiro  $Oxyz$  e supponiamo che due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , si muovano ciascuno di moto rettilineo ed uniforme. Si chiede l'istante in cui la distanza tra i due punti è minima.
114. Si consideri una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R$ . Due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , si muovono su di essa partendo dallo stesso punto  $A$ , ma con velocità angolari costanti  $\omega_1$  e  $\omega_2$  rispettivamente. Si chiede di determinare gli istanti e le posizioni in cui  $P_1$  e  $P_2$  sono sovrapposti.
115. Un punto si muove su una parabola di equazione  $y^2 = hx + k$  con accelerazione  $\vec{a} = (a, 0)$  e con le condizioni iniziali  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . Si chiede: a) determinare il moto, b) le condizioni sui dati perché il problema abbia soluzione, c) la velocità areale di  $P$  rispetto all'origine degli assi.

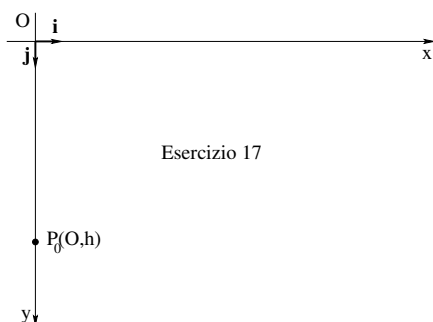


116. Le equazioni del moto di un punto  $P$  sono:

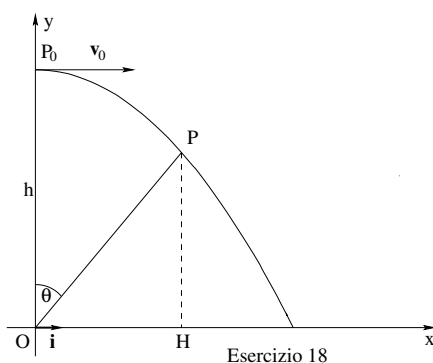
$$x(t) = \frac{1}{2}kt - \frac{1}{4}\sin(2kt), \quad y(t) = \frac{1}{2}\sin^2(kt), \quad z(t) = \sin(kt),$$

con  $k$  costante positiva. Determinare: a) la velocità e l'accelerazione vettoriali e scalari del punto  $P$ , b) il raggio di curvatura e la legge oraria del moto di  $P$ .

117. Un osservatore in  $O$  vede passare un punto materiale  $P$ , che si muove lungo l'asse  $y$  sotto l'azione della gravità, agli istanti  $t_1$ , verso l'alto, e  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), verso il basso. Si chiedono la quota dalla quale parte e la velocità iniziale.

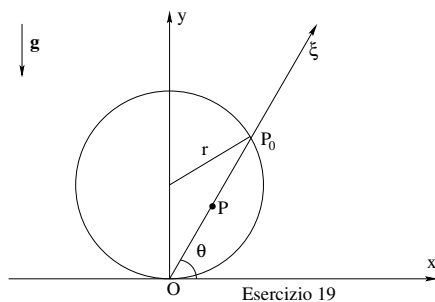


118. È dato un punto materiale  $P$  che cade sotto l'azione della gravità, da una quota  $h$  con velocità iniziale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$  (essendo  $v_0 > 0$  e  $\vec{i} = (1, 0)$ ). Si chiede: a) le equazioni del moto di  $P$ , b) l'istante in cui  $P$  tocca il suolo, c) la velocità areolare di  $P$  rispetto all'origine  $O$ .

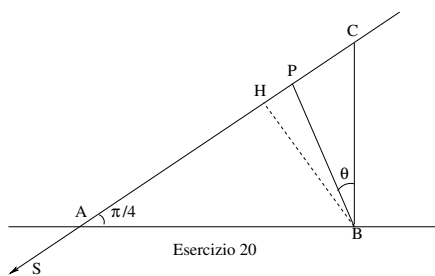


119. È dato un punto materiale  $P$  che si muove, sotto l'azione della gravità, lungo una guida rettilinea  $\xi$  a partire, con velocità iniziale nulla, dall'intersezione della guida con una circonferenza disegnata come in figura. Si chiede per quale valore dell'inclinazione  $\theta$  della guida è massimo il tempo impiegato da  $P$  per raggiungere  $O$ .
120. Un punto materiale  $P$  cade per gravità lungo un piano inclinato di  $\pi/4$  sull'orizzontale, con le condizioni iniziali:

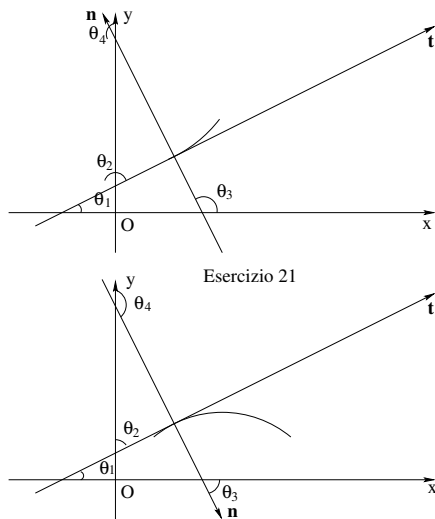
$$P_0 \equiv C, \quad \vec{v}_0 = \vec{0}.$$



Detta  $B$  la proiezione di  $C$  sul suolo,  $\theta$  l'angolo tra  $BC$  e  $BP$ ,  $a$  la lunghezza del piano inclinato, si chiede: a) la legge oraria del moto, b) la velocità areale di  $P$  rispetto a  $B$ , c) la funzione  $\theta(t)$ .



121. Sia data una curva piana di equazioni parametriche:  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$ . Trovare i coseni direttori della tangente e della normale principale alla curva e determinare il raggio di curvatura.





# Bibliografia

- [1] Sergio Bressan e Antonio Grioli, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 2002.
- [2] Carlo Cercignani, *Spazio, Tempo, Movimento*, Zanichelli, Bologna, 1976.
- [3] Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [4] Giorgio Ferrarese, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume Primo, Pitagora Editrice, Bologna, 1980.
- [5] Giovanni Frosali e Ettore Minguzzi, *Meccanica Razionale per Ingegneria*, Esculapio, 2011.
- [6] Herbert Goldstein, *Meccanica Classica*, Zanichelli, Bologna, 1971.
- [7] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko, *Meccanica Classica*, Seconda Edizione, Zanichelli, Bologna, 2005.
- [8] Dario Graffi, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Quarta Ed., Riccardo Patron, Bologna, 1970.
- [9] Giuseppe Grioli, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1996.
- [10] L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Fisica Teorica. I. Meccanica*, Editori Riuniti, University Press, 2009.
- [11] Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume Primo, Volume Secondo Parte Prima, Volume Secondo Parte Seconda, Zanichelli, Bologna, 1974.
- [12] Silvio Nocilla, *Meccanica Razionale*, Levrotto & Bella, Torino, 1982.
- [13] John R. Taylor, *Meccanica Classica*, Zanichelli, Bologna, 2005.

- [14] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*, Fourth Edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1947.