# Calcolo delle Variazioni e Equazioni di Eulero-Lagrange

In questo capitolo discuteremo il calcolo delle variazioni e la sua applicazione alla formulazione lagrangiana delle equazioni di moto sia per un sistema non vincolato sia per un sistema soggetto a vincoli olonomi. Infine, deriveremo da un'opportuna lagrangiana le equazioni di moto di una particella soggetta alla forza elettromagnetica.

## 1 Calcolo delle Variazioni

Nella sua forma più semplice il calcolo delle variazioni consiste nel minimizzare il cosiddetto integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[y, \dot{y}, t]\, dt \tag{1}$$

al variare di tutte le funzioni $y = y(t)$ ai valori prefissati $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$. Essenzialmente si cerca un cammino $y = y(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ che collega i due punti $(t_1, y_1)$ e $(t_2, y_2)$ e che minimizza l'integrale d'azione $S$. Uno degli esempi più semplici è il seguente: Fissati nel piano due punti, quale è il cammino più breve che li congiunge? Per poter dare una risposta a tale domanda (dimostrando rigorosamente che tale cammino è il segmento di retta per i due punti dati) occorre trovare la funzione $y(t)$ che minimizza l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (\dot{y})^2}\, dt. \tag{2}$$

essendo $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$.

Supponendo che la $f$ sia di classe $C^1$ nelle tre variabili $y$, $\dot{y}$ e $t$, consideriamo i due cammini $y = y(t)$ e $Y(t) = y(t) + \alpha\eta(t)$ passanti per i punti

$(t_1, y_1)$ e $(t_2, y_2)$, dove $\alpha$ è un parametro. Quindi $y(t_1) = Y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = Y(t_2) = y_2$ e dunque

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0. \tag{3}$$

Calcolando la derivata dell'integrale d'azione

$$S = S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f(Y, \dot{Y}, t)\, dt$$

nella (1) rispetto alla variabile $\alpha$ (rispetto alla curva $Y(t)$) otteniamo, utilizzando l'integrazione per parti e le relazioni (3),

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} - \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt + \left[ \eta \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \eta \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt, \end{aligned}$$

dove la $\eta = \eta(t)$ è una funzione arbitraria di classe $C^1$ che verifica la (3). Di conseguenza, $S'(\alpha) = 0$ se e solo se il cammino $y = y(t)$ è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \tag{4}$$

Tornando all'esempio (2), sostituiamo $f(y, \dot{y}, t) = \sqrt{1 + (\dot{y})^2}$ nell'equazione di Eulero-Lagrange (4). Poichè la $f$ non dipende da $y$, risulta che

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}$$

è costante, cioè $\dot{y}$ è costante. In altre parole, la soluzione che minimizza l'integrale d'azione, è il segmento che collega i punti $y_1$ e $y_2$, cioè

$$y(t) = \frac{(t_2 - t)y_1 + (t - t_1)y_2}{t_2 - t_1}.$$

**Esempio 1.1 (La brachistocrona)** *Dati due punti $P_1$ e $P_2$, con il primo punto posto a una quota superiore a quella del secondo punto, quale deve essere la forma che dobbiamo dare a uno scivolo privo di attrito affinché uno slittino lasciato scivolare dal punto $P_1$ raggiunga il punto $P_2$ nel minor tempo possibile? Il tempo di percorrenza da $P_1$ a $P_2$ è*

$$tempo(P_1 \mapsto P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

*in cui la velocità alla quota generica $y$ vale $v = \sqrt{2gy}$.*[1] *Poichè*

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(y))^2 + 1}\, dy,$$

*dove $x = x(y)$ è la funzione incognita e $(dx/dy) = x'(y)$, risulta*

$$\text{tempo}(P_1 \mapsto P_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}}\, dy,$$

*essendo zero la quota in $P_1$ e $-y_2$ la quota in $P_2$. L'equazione di Eulero-Lagrange è la seguente:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}} = \frac{d}{dy} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}},$$

*e, osservando che il primo membro non dipende da $x$, questa equazione si può scrivere come:*

$$\frac{x'(y)}{\sqrt{x'(y)^2 + 1}} = cost. = \frac{y}{2a},$$

*dove la costante è stata chiamata $1/2a$ per motivi di convenienza. Poichè $x(y)$ è una funzione crescente, risulta*

$$x'(y) = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

[1] Iniziando con velocità uguale a zero abbiamo per l'accelerazione, velocità e distanza percorsa al tempo $t$: $g$, $gt$ e $s = \frac{1}{2}gt^2$. Quindi $t = \sqrt{2s/g}$ e $v = \sqrt{2gs}$.

*Infine, utilizzando la sostituzione* $y = a(1 - \cos\theta)$ $(0 < \theta < \pi)$, *si trova*

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \sqrt{\frac{y}{2a - y}}\, dy = \int_0^\theta \tan(\tfrac{1}{2}\hat{\theta})\, a \sin\hat{\theta}\, d\hat{\theta} \\ &= \int_0^\theta \frac{\sin(\frac{1}{2}\hat{\theta})}{\cos(\frac{1}{2}\hat{\theta})} 2a \sin(\tfrac{1}{2}\hat{\theta}) \cos(\tfrac{1}{2}\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\ &= 2a \int_0^\theta \sin^2(\tfrac{1}{2}\hat{\theta})\, d\hat{\theta} = a \int_0^\theta [1 - \cos\hat{\theta}]\, d\hat{\theta} \\ &= a(\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

*Quindi il cammino consiste nella curva rappresentata parametricamente da*

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta), \\ y &= a(1 - \cos\theta), \end{aligned}$$

*dove* $0 \leq \theta \leq a$. *Tali equazioni costituiscono la parametrizzazione di una cicloide.*

**Esempio 1.2 (Superfici di rotazione)** *Consideriamo il solido di rotazione*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z),\ z_1 \leq z \leq z_2\},$$

*essendo* $g = g(z)$ *una funzione positiva di classe* $C^1$. *Allora il volume e l'area della superficie tonda (l'area del bordo senza i dischi contenuti nei piani* $z = z_1$ *e* $z = z_2$*) sono date dalle espressioni*

$$\begin{aligned} \mathit{Volume} &= \pi \int_{z_1}^{z_2} g(z)^2\, dz, \\ \mathit{Area} &= 2\pi \int_{z_1}^{z_2} g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2}\, dz. \end{aligned}$$

*Supponiamo ora che* $g(z_1) = g_1$ *e* $g(z_2) = g_2$. *Minimizzando il volume si trova l'equazione di Eulero-Lagrange*

$$2\pi g = 0,$$

*che non possiede alcuna soluzione soddisfacente le condizioni* $g(z_1) = g_1$ *e* $g(z_2) = g_2$ *per* $g_1^2 + g_2^2 > 0$. *Minimizzando l'area tonda si trova l'equazione* *differenziale (di Eulero-Lagrange)*

$$2\pi\sqrt{1+(g')^2} = 2\pi\frac{d}{dz}\left(g\frac{g'}{\sqrt{1+(g')^2}}\right),$$

*oppure*

$$\sqrt{1+(g')^2} = g'\frac{g'}{\sqrt{1+(g')^2}} + g\frac{1}{[1+(g')^2]^{3/2}}g'',$$

*oppure*

$$1+(g')^2 = gg'',$$

*un'equazione differenziale non facilmente risolubile.*

Complichiamoci ora la vita minimizzando l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[y_1,\ldots,y_N,\dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_N,t]\,dt, \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_N)$ è un cammino in $\mathbb{R}^N$ che collega i due punti $\boldsymbol{y}^1 = (y_1^1,\ldots,y_N^1)$ e $\boldsymbol{y}^2 = (y_1^2,\ldots,y_N^2)$. Supponiamo che la $f$ sia di classe $C^1$ nelle $2N+1$ variabili $y_1,\ldots,y_N$, $\dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_N$ e $t$ e perturbiamo il cammino $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{\eta}, \\ \boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_N), \\ \boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_N), \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{y}(t_1) = \boldsymbol{Y}(t_1) = \boldsymbol{y}^1$ e $\boldsymbol{y}(t_2) = \boldsymbol{Y}(t_2) = \boldsymbol{y}^2$. Quindi

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(t_2) = 0. \tag{6}$$

Calcolando la derivata dell'integrale d'azione $S = S(\alpha)$ nella (1) rispetto alla variabile $\alpha$ otteniamo, utilizzando l'integrazione per parti e la relazione (6)

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^N\left(\eta_j\frac{\partial f}{\partial y_j} + \dot{\eta}_j\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j}\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^N\left(\eta_j\frac{\partial f}{\partial y_j} - \eta_j\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j}\right)dt + \sum_{j=1}^N\left[\eta_j\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j}\right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^N\eta_j\left(\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j}\right)dt, \end{aligned}$$

dove la $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ è una funzione arbitraria di classe $C^1$ che verifica la (6). Di conseguenza, $S'(\alpha) = 0$ se e solo se il cammino $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ è soluzione delle $N$ equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

# 2 Equazioni di Lagrange

Avendo a disposizione i metodi del calcolo delle variazioni, possiamo intraprendere lo studio della formulazione della meccanica che Joseph Lagrange (1736-1813) (nome di battesimo Giuseppe Lodovico Lagrangia) pubblicò nel 1788 [Mécanique Analytique]. Il vantaggio principale delle equazioni lagrangiane è il fatto che esse mantengono la stessa forma in ogni sistema di coordinate. Inoltre la formulazione lagrangiana permette di eliminare le reazioni vincolari. In questo modo si semplifica notevolmente la maggior parte dei problemi in quanto le reazioni vincolari sono generalmente incognite.

Consideriamo il caso particolare più semplice: una singola particella sotto l'effetto di una forza conservativa. In tal caso l'energia cinetica della particella vale

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

essendo $m$ la sua massa. L'energia potenziale è $U = U(x, y, z)$. La lagrangiana è definita come

$$\mathcal{L} = T - U,$$

quindi come *differenza* dell'energia cinetica e di quella potenziale. Cerchiamo ora di minimizzare l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\, dt.$$

La traiettoria $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ che minimizza un tale integrale d'azione deve soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}},$$

che possono anche scriversi come:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}.$$

Tenuto conto dell'espressione dell'energia cinetica si trova

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial y} = m\ddot{y}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial z} = m\ddot{z},$$

ovvero in forma vettoriale:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla U,$$

che coincide con la seconda legge di Newton per una forza conservativa. In altre parole, la formulazione lagrangiana è equivalente alla seconda legge di Newton.

Abbiamo trovato il seguente **Principio di Hamilton**: *Il moto effettivo di una particella dal punto $P_1$ al punto $P_2$ nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t_1$ e $t_2$ è tale che l'integrale di azione*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$$

*assume su di esso un valore stazionario.*

La generalizzazione delle idee precedenti al caso di un sistema costituito da $N$ particelle non vincolate è banale. In tal caso abbiamo

$$\mathcal{L} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j |\dot{\boldsymbol{r}}_j|^2}_{=\text{energia cinetica}} - \underbrace{U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}_{\text{energia potenziale}}.$$

Il principio di Hamilton ha la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \ddot{x}_j, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} = m_j \ddot{y}_j, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} = m_j \ddot{z}_j,$$

per $j = 1, 2, \ldots, N$. Abbiamo trovato $N$ copie della seconda legge di Newton:

$$m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = -\nabla_{\boldsymbol{r}_j} U, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

# 3 Principio di Hamilton: Sistemi Vincolati

La potenza dell'impostazione lagrangiana si rivela sopratutto nella possibilità di trattare sistemi vincolati. In tal caso basta esprimere la lagrangiana nel numero minimo di coordinate indipendenti e enunciare le equazioni di Eulero-Lagrange.

Si consideri un sistema arbitrario di $N$ particelle occupanti le posizioni $\boldsymbol{r}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. I parametri $q_1, \ldots, q_n$ si dicono *coordinate generalizzate* (*o lagrangiane*) del sistema se e solo se ogni vettore posizione $\boldsymbol{r}_j$ si può esprimere in funzione delle $q_1, \ldots, q_n$ ed eventualmente del tempo $t$:

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_j(q_1, \ldots, q_n, t), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

e se, viceversa, ogni $q_l$ si può esprimere in funzione delle $\boldsymbol{r}_j$ ed eventualmente del tempo $t$:

$$q_l = q_l(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t), \qquad l = 1, \ldots, n.$$

Inoltre si richiede che il numero $n$ delle coordinate generalizzate sia il minimo numero intero che consente di descrivere il sistema in questo modo. Nello spazio tridimensionale il numero $n$ delle coordinate generalizzate di un sistema di $N$ particelle non può superare $3N$. Per i sistemi vincolati questo numero è sempre minore, a volte anche molto minore.

Il *grado di libertà* di un sistema è il numero di coordinate che possono essere fatte variare indipendentemente in un piccolo spostamento. In altre parole è il numero delle direzioni indipendenti in cui il sistema può muoversi a partire da una configurazione iniziale data. Un sistema di $N$ particelle nello spazio a tre dimensioni si dice *libero* se il grado di libertà è uguale a $3N$ e *vincolato* se è strettamente minore di $3N$.

I sistemi per cui il grado di libertà è uguale al numero minimo $n$ delle sue coordinate lagrangiane si dicono anche *olonomi*. Un sistema olonomo è quindi un sistema con $n$ gradi di libertà che può essere descritto da $n$ coordinate generalizzate $q_1, \ldots, q_n$. In questo corso non ci occuperemo dei sistemi anolonomi.

Discutiamo ora due esempi dal punto di vista lagrangiano.

**Esempio 3.1 (Pendolo semplice)** *Un piombino di massa $m$ è fissato a un'estremità di un'asta priva di massa, a sua volta fissata all'origine $O$ e libera di ruotare senza attrito nel piano $xz$. Il piombino è vincolato dall'asta in modo tale che la distanza $l = \sqrt{x^2 + z^2}$ rimane costante. La posizione del piombino è data da*

$$x = l \sin\theta, \qquad z = l \cos\theta,$$

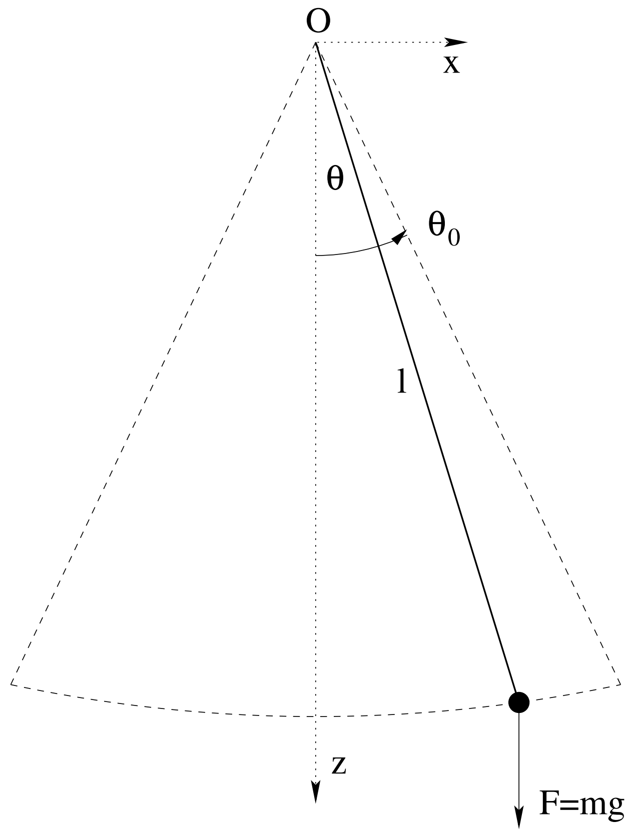


Figura 1: Il pendolo semplice.

*essendo $\theta$ l'angolo tra l'asta e il verticale. L'energia cinetica $T$ e l'energia potenziale $U$ hanno la seguente forma:*

$$T = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \qquad U = mgl(1 - \cos\theta),$$

*essendo $g$ l'accelerazione gravitazionale. Quindi*

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta),$$

*e l'equazione di Eulero-Lagrange è:*

$$-mgl \sin\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \ddot{\theta},$$

*che si può scrivere più semplicemente come*

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta.$$

*Conclusione: Abbiamo un singolo grado di libertà e una singola coordinata generalizzata, $\theta$, per cui $\boldsymbol{r} = (l \sin\theta, 0, l\cos\theta)$ e $\theta = \arctan(x/z)$.*

**Esempio 3.2 (Problema dei due corpi)** *La forza che un corpo esercita sull'altro è attraente, diretta lungo il segmento congiungente e dipende soltanto dalla loro distanza $r$. Utilizzando il sistema di riferimento in cui il baricentro delle due masse si trova nell'origine, abbiamo*

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r),$$

*essendo $\mu$ la massa ridotta e $(r, \theta)$ le coordinate polari nel piano del moto. Abbiamo le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}), \\ \mu r \dot{\theta}^2 - U'(r) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}. \end{aligned}$$

*La prima equazione di Eulero-Lagrange conduce alla costante di moto $L = \mu r^2 \dot{\theta}$, il momento angolare. Sostituendo $\dot{\theta} = L/\mu r^2$, otteniamo dalla seconda equazione di Eulero-Lagrange*

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -U'(r).$$

*Nel caso della forza gravitazionale tra il Sole e un pianeta abbiamo*

$$U(r) = -\frac{GM\mu}{r},$$

*essendo $G$ la costante gravitazionale e $M$ la massa totale. Conclusione: Abbiamo due gradi di libertà e due coordinate generalizzate, $r$ e $\theta$, per cui $\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan(y/x)$.*

Deriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso di una singola particella vincolata. Per ragioni di semplicità supponiamo che la particella sia vincolata a muoversi mantenendosi sempre su una superficie data. In tal caso la particella ha due gradi di libertà e il suo moto si può descrivere con due coordinate generalizzate indipendenti $q_1$ e $q_2$.

Le forze che possono agire sulla particella sono di due tipi. Il primo tipo comprende le reazioni vincolari (che in generale non sono conservative): indicheremo con $\boldsymbol{F}_v$ la risultante delle forze vincolari agenti sulla particella, nel nostro caso normale alla superficie. Il secondo tipo comprende tutte le forze rimanenti agenti sulla particella. La loro risultante è supposta conservativa:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r}, t),$$

dove il potenziale $U$ può dipendere dal tempo $t$. La forza totale sulla particella è $\boldsymbol{F}_{\text{tot}} = \boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{F}$.

Al solito la lagrangiana è definita come

$$\mathcal{L} = T - U,$$

dove l'energia potenziale è dovuta alle sole forze non vincolari. Vedremo che la formulazione lagrangiana permetterà di eliminare le forze vincolari dalle incognite del problema.

Indicheremo con $\boldsymbol{r}(t)$ la traiettoria effettiva della particella, essendo $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$ e $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2)$ le posizioni iniziale e finale della particella, ambedue supposte prefissate. Indichiamo con $\boldsymbol{R}(t)$ un qualunque moto variato passante per gli stessi punti. Conviene scrivere

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ è un vettore infinitesimale che congiunge i punti $\boldsymbol{r}(t)$ del moto effettivo con quelli $\boldsymbol{R}(t)$ nel moto variato. Assumeremo che entrambi le traiettorie $\boldsymbol{r}(t)$ e $\boldsymbol{R}(t)$ appartengano alla superficie vincolare. Poichè entrambi le traiettorie $\boldsymbol{r}(t)$ e $\boldsymbol{R}(t)$ congiungono gli stessi due punti iniziale e finale, si ha $\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) = 0$.

Indichiamo con $S$ l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\boldsymbol{R}, \dot{\boldsymbol{R}}, t)\, dt$$

calcolato lungo un qualunque cammino $\boldsymbol{R}(t)$ sulla superficie vincolare e indichiamo con $S_0$ il valore che esso assume lungo il moto effettivo $\boldsymbol{r}(t)$. Studiamo l'andamento della differenza

$$\delta S = S - S_0$$

se $|\boldsymbol{\varepsilon}| \to 0$. La differenza $\delta S$ è l'integrale della differenza tra le lagrangiane calcolate lungo i due moti:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{R}, \dot{\boldsymbol{R}}, t) - \mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t).$$

Poichè

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \tfrac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - U(\boldsymbol{r}, t), \qquad \mathcal{L}(\boldsymbol{R}, \dot{\boldsymbol{R}}, t) = \tfrac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{R}}|^2 - U(\boldsymbol{R}, t),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}m(|\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2 - |\dot{\boldsymbol{r}}|^2) - [U(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}, t) - U(\boldsymbol{r}, t)] \\ &= m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2), \end{aligned}$$

dove $O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2)$ contiene la somma di tre termini che, nel dividere da $|\boldsymbol{\varepsilon}|^2$, $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2$ e $|\boldsymbol{\varepsilon}|\,|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|$, rispettativamente, rimangono limitate se $|\boldsymbol{\varepsilon}|+|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|$ tende a zero. Dunque

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U]\, dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U]\, dt + [m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}]_{t=t_1}^{t_2} + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot [m\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla U]\, dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2), \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato l'integrazione per parti e tenuto conto che $\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) = 0$. Poichè $\boldsymbol{F}_{\text{tot}} = \boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F} = -\nabla U$, risulta

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{F}_v\, dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2).$$

Tranne un termine di tipo $O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2)$, il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}$ appartiene al piano tangente alla superficie, mentre la forza vincolare $\boldsymbol{F}_v$ è ortogonale alla superficie. Quindi

$$\delta S = O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2),$$

e l'integrale d'azione è stazionario lungo il moto effettivo.

Abbiamo dimostrato, in modo non troppo rigoroso, la validità del principio di Hamilton, ossia che l'integrale d'azione è stazionario lungo il moto che la particella effettivamente compie. Nella dimostrazione non sono ammessi tutti gli spostamenti ma soltanto quelli tra due moti appartenenti alla superficie. Questo fatto significa che non sussistono le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto alle tre coordinate cartesiane, ma solo rispetto alle coordinate generalizzate. Nel nostro caso ($n = 2$ vincoli e $n = 2$ coordinate generalizzate $q_1$ e $q_2$) possiamo scrivere l'integrale d'azione in funzione di $q_1$ e $q_2$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)\, dt$$

e questo deve essere stazionario per *ogni* variazione di $q_1$ e $q_2$ rispetto al moto effettivo $[q_1(t), q_2(t)]$. Si verificano le equazioni de Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = 0.$$

È abbastanza semplice generalizzare la derivazione del principio di Hamilton ad un sistema vincolato di $N$ particelle. *Un sistema olonomo con $n$ gradi di libertà (e quindi $n$ coordinate generalizzate $q_1, \ldots, q_n$), soggetto a forze non vincolari il cui risultante è derivabile da un'energia potenziale $U(q_1, \ldots, q_n, t)$, è completamente determinato dalle $n$ equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} = 0, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

**Esempio 3.3 (Moto su una superficie cilindrica)** *Si consideri una particella di massa $m$ vincolata a muoversi senza attrito sulla superficie cilindrica $x^2 + y^2 = R^2$ sotto l'effetto della forza centrale $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$, essendo $k$ una costante positiva. Utilizzando le coordinate cilindriche $(\rho, \theta, z)$, dove $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, l'energia cinetica $T$ e quella potenziale $U$ valgono*

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2), \qquad U = \tfrac{1}{2}kr^2 = \tfrac{1}{2}k(\rho^2 + z^2).$$

*Quindi la lagrangiana vale*

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \tfrac{1}{2}k(R^2 + z^2),$$

*essendo la particella vincolata a muoversi sulla superficie $\rho = R$. Scegliamo ora le coordinate generalizzate $z$ e $\theta$. Risultano le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &\implies \qquad -kz = m\ddot{z}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &\implies \frac{d}{dt}mR^2\dot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

*Le soluzioni sono del tipo $z = A\cos(\omega t - \delta)$ e $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$, essendo $\omega = \sqrt{k/m}$ e $mR^2\omega_0$ il momento angolare attorno all'asse $z$.*

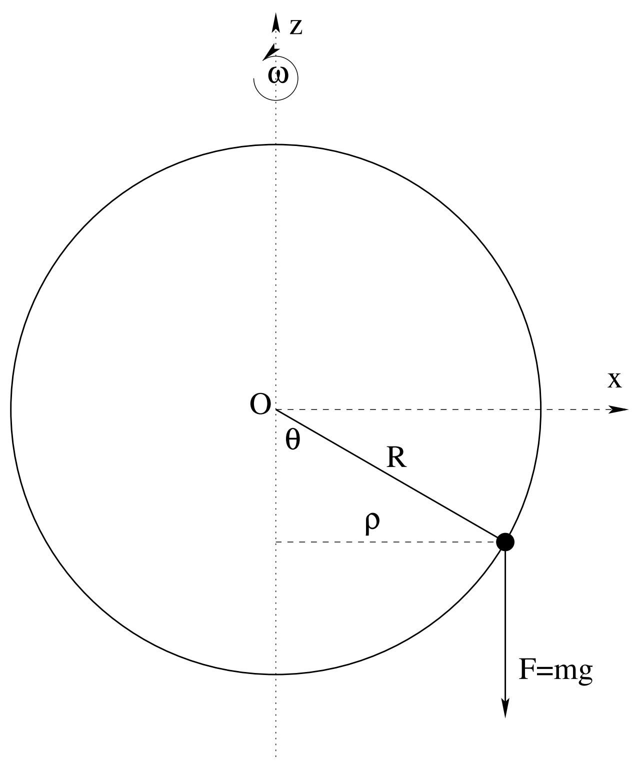


Figura 2: La biglia su una guida rotante.

**Esempio 3.4 (Biglia su una guida rotante)** *Una biglia di massa $m$ è vincolata a una guida costituita da un filo di ferro circolare di raggio $R$. La guida appartiene a un piano verticale ed è fatta ruotare attorno al suo diametro verticale con velocità angolare $\omega$. La posizione della biglia sulla guida è determinata dall'angolo $\theta$ misurato a partire della verticale. La lagrangiana è*

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgR(1 - \cos\theta),$$

*a cui corrisponde l'equazione di Eulero-Lagrange*

$$mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta = mR^2\ddot{\theta}.$$

*Dividendo per $mR^2$, otteniamo l'equazione del moto*

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta.$$

*Moltiplicando per $2\dot\theta$ e integrando otteniamo*

$$\dot\theta^2 = \dot\theta_0^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2(1-\cos 2\theta) - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta),$$

*dove la costante di integrazione $\dot\theta_0$ verifica $|\dot\theta_0| \geq \sqrt{2g/R}$. Ne segue*

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm\frac{1}{\sqrt{\dot\theta_0^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2(1-\cos 2\theta) - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}},$$

*e il calcolo della primitiva $t(\theta)$ conduce ad un cosiddetto integrale ellittico (non esprimibile analiticamente).*

# 4 Momenti generalizzati

In un sistema con $n$ coordinate generalizzate $q_i$ ($i = 1, \ldots, n$) le quantità $F_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{L}/\partial q_i$ si dicono *forze generalizzate* e le quantità $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{L}/\partial\dot q_i$ *quantità di moto generalizzate* o *momenti generalizzati*. Ciò consente di riformulare le $n$ equazioni di Eulero-Lagrange come fossero $n$ componenti della seconda legge di Newton:

$$F_i = \frac{d}{dt}p_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

In particolare, se la lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende da una certa coordinata $q_i$, allora $F_i = (\partial\mathcal{L}/\partial q_i) = 0$ e la quantità di moto generalizzata $p_i$ si conserva. Tali coordinate generalizzate si dicono *ignorabili* o *cicliche*.

Un caso interessante è il problema del proiettile soggetto solamente alla forza gravitazionale. La sua energia potenziale è $U = mgz$, e la sua lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot x, \dot y, \dot z, t) = \tfrac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - mgz.$$

La forza generalizzata è proprio quella usuale. La quantità di moto generalizzata è quella usuale. Poichè $\mathcal{L}$ non dipende da $x$ e $y$, si conservano le quantità di moto $p_x$ e $p_y$.

Per motivi di efficienza scegliamo le coordinate generalizzate in modo che la lagrangiana dipende dal minor numero di coordinate generalizzate $q_i$, per poter derivate il maggior numero di leggi di conservazione per le quantità di moto generalizzate.

Calcoliamo la derivata della lagrangiana rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n,t) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=\dot p_i}\dot q_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\ddot q_i\right\}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\{\dot p_i\dot q_i+p_i\ddot q_i\}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\\ &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(p_i\dot q_i)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Nel caso in cui la lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamento dal tempo, cioè nel caso in cui $(\partial\mathcal{L}/\partial t)=0$, si può concludere che la cosiddetta *hamiltoniana*

$$\mathcal{H}\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-\mathcal{L}$$

è una quantità conservata.

Dimostriamo ora che l'hamiltoniana $\mathcal{H}$ coincide con l'energia totale del sistema. Poichè $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\dots,q_n)$, $i=1,\dots,N$, si ottiene l'identità

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot q_j.$$

Perciò

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2=\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}A_{jk}\dot q_j\dot q_k,$$

essendo

$$A_{jk}=A_{jk}(q_1,\dots,q_n)=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}.$$

Dunque, utilizzando il fatto che $A_{jk}=A_{kj}$,

$$\begin{aligned}p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}&=\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{jj}\dot q_j^2+\sum_{j<k}A_{jk}\dot q_j\dot q_k\right)\\ &=A_{ii}\dot q_i+\tfrac{1}{2}\sum_{k>i}A_{ik}\dot q_k+\tfrac{1}{2}\sum_{j<i}A_{ji}\dot q_j\end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} A_{il}\dot{q}_l.$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} A_{il}\dot{q}_l\right)\dot{q}_i = \sum_{i,l=1}^{n} A_{il}\dot{q}_i\dot{q}_l = 2T.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_1\dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - [T-U] = T+U,$$

che è l'energia totale.

# 5 Lagrangiana per la Forza Magnetica

Finora abbiamo introdotto la formulazione lagrangiana esclusivamente per i sistemi il cui risultante delle forze non vincolari è conservativo. Ponendo $\mathcal{L} = T - U$, si è poi passati alle equazioni di Eulero-Lagrange, considerate un sistema completo e minimale (in termini del numero delle equazioni) di equazioni che descrivono il moto del sistema. Ciò non ci impedisce di introdurre la lagrangiana come qualsiasi funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

tale che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange descrivono completamente e in modo minimale il moto del sistema, anche se non esistesse il potenziale $U$.

Un esempio significativo è il seguente: Si consideri una particella di massa $m$ e carica elettrica $q$ in moto in un campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e magnetico $\boldsymbol{B}$. Sulla particella agisce la forza (non conservativa) di Lorentz

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right),$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità della particella e $c$ è la velocità della luce. La seconda legge di Newton assume la forma

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{B}\right). \qquad (9)$$

Possiamo trovare, in modo non unico,[2] il potenziale elettrico $V(\boldsymbol{r}, t)$ e quello magnetico $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ tali che

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}.$$

Definiamo la funzione lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) &= \tfrac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - q\left(V - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - qV + \frac{q}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z).\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &\Longrightarrow -q\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{q}{c}\left\{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x\right), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &\Longrightarrow -q\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{q}{c}\left\{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right\} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{y} + \frac{q}{c}A_y\right), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &\Longrightarrow -q\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{q}{c}\left\{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right\} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{z} + \frac{q}{c}A_z\right).
\end{aligned}$$

Queste tre equazioni conducono alle seguenti:

$$\begin{aligned}
-q\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{q}{c}\left[\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right] &= m\ddot{x} + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right], \\
-q\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{q}{c}\left[\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right] &= m\ddot{y} + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_y}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{x}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right], \\
-q\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{q}{c}\left[\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right] &= m\ddot{z} + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_z}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_z}{\partial y} + \dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right].
\end{aligned}$$

Queste ultime sono equivalenti a:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -q\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{q}{c}\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right), \\
m\ddot{y} &= -q\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{q}{c}\dot{x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \\
m\ddot{z} &= -q\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{q}{c}\dot{y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

[2] I campi elettrico $\boldsymbol{E}$ e magnetico $\boldsymbol{B}$ non cambiamo sotto le trasformazioni $V \mapsto V + \text{cost.}$ e $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \nabla\phi$ per qualunque $\phi$ che non dipende da $t$.

oppure:

$$m\ddot{x} = -q\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left[\dot{\boldsymbol{r}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{A})\right]_x,$$
$$m\ddot{y} = -q\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left[\dot{\boldsymbol{r}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{A})\right]_y,$$
$$m\ddot{z} = -q\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left[\dot{\boldsymbol{r}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{A})\right]_z,$$

o, in forma vettoriale,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -q\left(\nabla V + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{A})],$$

la quale implica la (9).

Si consideri il caso particolare in cui $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ è costante e $V \equiv 0$. In tal caso si scelga

$$\boldsymbol{A} = \tfrac{1}{2}B(-y, x, 0) = \tfrac{1}{2}Br\hat{\boldsymbol{e}}_\theta,$$

essendo $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j}$ il versore tangenziale. Utilizzando le coordinate cilindriche, risulta facilmente

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}, \qquad |\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2,$$
$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} = \tfrac{1}{2}Br(\dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \tfrac{1}{2}Br^2\dot{\theta},$$

essendo $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ e $\boldsymbol{k}$ ortogonali tra loro. Di conseguenza,

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2c}r^2\dot{\theta},$$

in cui risultano cicliche le variabili $\theta$ e $z$. Quindi le quantità di moto generalizzate

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + \frac{qB}{2c}r^2, \qquad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

vengono conservate. Ci rimane una singola equazione di Eulero-Lagrange non banale:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Longrightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{qB}{c}r\dot{\theta},$$

oppure:

$$m\ddot{r} = mr\left(\frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc}\right)^2 + \frac{qB}{c}r\left(\frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc}\right) = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{q^2B^2r}{4mc^2}.$$

Moltiplicando ambedue le parti da $2\dot{r}/m$ e calcolando la primitiva, risulta per un'opportuna costante positiva $\gamma$:

$$\dot{r}^2 = \gamma^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} - \frac{q^2 B^2 r^2}{4m^2 c^2}.$$

Scegliendo $\gamma > 0$ tale che il secondo membro si annulla per $r = r_0$, si ottiene il moto lungo l'elica $r = r_0$, $\dot{\theta} =$ cost. e $\dot{z} =$ cost. Uno dei moti consentiti dal sistema lagrangiana è l'elica attorno al campo magnetico costante $\boldsymbol{B}$.

# 6 Moltiplicatori di Lagrange

Finora abbiamo discusso la formulazione lagrangiana di un sistema olonomo vincolato sempre nello stesso modo, utilizzando i vincoli per arrivare ad un minor numero di coordinate generalizzate. Una tale riduzione del numero delle variabili non è sempre facile da eseguire. In certi casi potrebbe essere opportuno utilizzare un sistema con più variabili, sfruttando alcuni vincoli esplicitamente.

Consideriamo, per esempio, un sistema con soltanto tre coordinate cartesiane $x$, $y$, $z$, legate da un'equazione del vincolo del tipo

$$f(x, y, z) = 0.$$

Al posto della lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ si consideri la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda(t) f(x, y, z),$$

essendo $\lambda(t)$ un cosiddetto *moltiplicatore di Lagrange*. Al posto delle solite equazioni di Eulero-Lagrange, abbiamo le seguenti equazioni modificate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &= 0,
\end{aligned}$$

più il vincolo $f(x, y, z) = 0$.

Consideriamo il caso di una singola particella soggetta ad una forza conservativa. La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z),$$

e le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}&=m\ddot{x},\\
-\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}&=m\ddot{y},\\
-\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}&=m\ddot{z},
\end{aligned}$$

o, in forma vettoriale,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-\nabla U+\lambda\nabla f.$$

Quindi la forza vincolare vale $\boldsymbol{F}_v=\lambda\nabla f$ e risulta essere ortogonale alla superficie di equazione $f(x,y,z)=0$.

Nel caso di due vincoli, $f(x,y,z)=0$ e $g(x,y,z)=0$, si derivano le equazioni di Eulero-Lagrange dalla lagrangiana ampiata

$$\mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)+\lambda(t)f(x,y,z)+\mu(t)g(x,y,z),$$

essendo $\lambda$ e $\mu$ due moltiplicatori di Lagrange.

**Esempio 6.1 (Pendolo semplice, usando i moltiplicatori)** *Si consideri la lagrangiana (confronta con l'Esempio 3.1)*

$$\mathcal{L}=T-V=\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz,$$

*sotto i vincoli $f(x,y,z)=x^2+z^2-l^2=0$ e $g(x,y,z)=y=0$. Partendo dalla lagrangiana ampiata*

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz+\lambda(x^2+z^2-l^2)+\mu y,$$

*otteniamo*

$$\begin{aligned}
2\lambda x&=m\ddot{x},\\
\mu&=m\ddot{y},\\
-mg+2\lambda z&=m\ddot{z},
\end{aligned}$$

*più i vincoli $x^2+z^2=l^2$ e $y=0$. Il vincolo $y=0$ ci consente di eliminare l'equazione per $y$ e di arrivare al sistema di tre equazioni*

$$2\lambda x=m\ddot{x},\qquad -mg+2\lambda z=m\ddot{z},\qquad x^2+z^2=l^2.$$

*Moltiplicando la prima equazione per $\dot{x}$, la seconda per $\dot{z}$ e calcolando la somma si ottiene*

$$2\lambda(x\dot{x} + z\dot{z}) = m[\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z} + g\dot{z}],$$

*e quindi*

$$\lambda(\underbrace{x^2 + z^2}_{=l^2}) = \underbrace{\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}_{=T} + \underbrace{mgz}_{=U} + cost.$$

*Allora la costante vale $\lambda l^2 - \mathcal{H}$, essendo $\mathcal{H}$ l'energia totale del sistema.*

**Esempio 6.2 (Macchina di Atwood)** *Si consideri una macchina di Atwood formata da due masse, $m_1$ e $m_2$, collegate da un filo privo di massa e inestendibile che passa per una puleggia, priva di attrito. Essendo la lunghezza del filo, $l$, fissa, la massa $m_1$ si trova al di sotto di una distanza $x$ da un opportuno livello di riferimento e la massa $m_2$ al di sotto di una distanza $y$ da questo livello, mentre $x + y = cost$. Allora la lagrangiana ampiata è*

$$\mathcal{L} = \underbrace{\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{y}^2}_{=T} + (\underbrace{m_1 gx + m_2 gy}_{=-U}) + \lambda(x + y - L),$$

*dove $L = l - \pi R$ (essendo $R$ il raggio della puleggia). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono le seguenti:*

$$\begin{aligned} m_1 g + \lambda &= m_1\ddot{x}, \\ m_2 g + \lambda &= m_2\ddot{y}, \end{aligned}$$

*accompagnate dal vincolo $x+y = L$. Calcolando la somma delle due equazioni di Eulero-Lagrange e sfruttando il fatto che $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$, otteniamo*

$$0 = \ddot{x} + \ddot{y} = \frac{m_1 g + \lambda}{m_1} + \frac{m_2 g + \lambda}{m_2},$$

*quindi $\lambda = -2gm_1m_2/(m_1 + m_2)$. Di conseguenza,*

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \qquad \ddot{y} = \frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2}g.$$

*Integrando due volte, troviamo le soluzioni*

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \tfrac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2, \qquad y(t) = L - x_0 - \dot{x}_0 t - \tfrac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2.$$

*Alternativamente, eliminando la variabile $y$, $y = L - x$, si può partire dalla lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

*e arrivare all'equazione di Eulero-Lagrange*

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{x},$$

*che conduce alla stessa soluzione $x(t)$ già trovata. La $y(t)$ si trova poi dall'equazione $y(t) = L - x(t)$.*

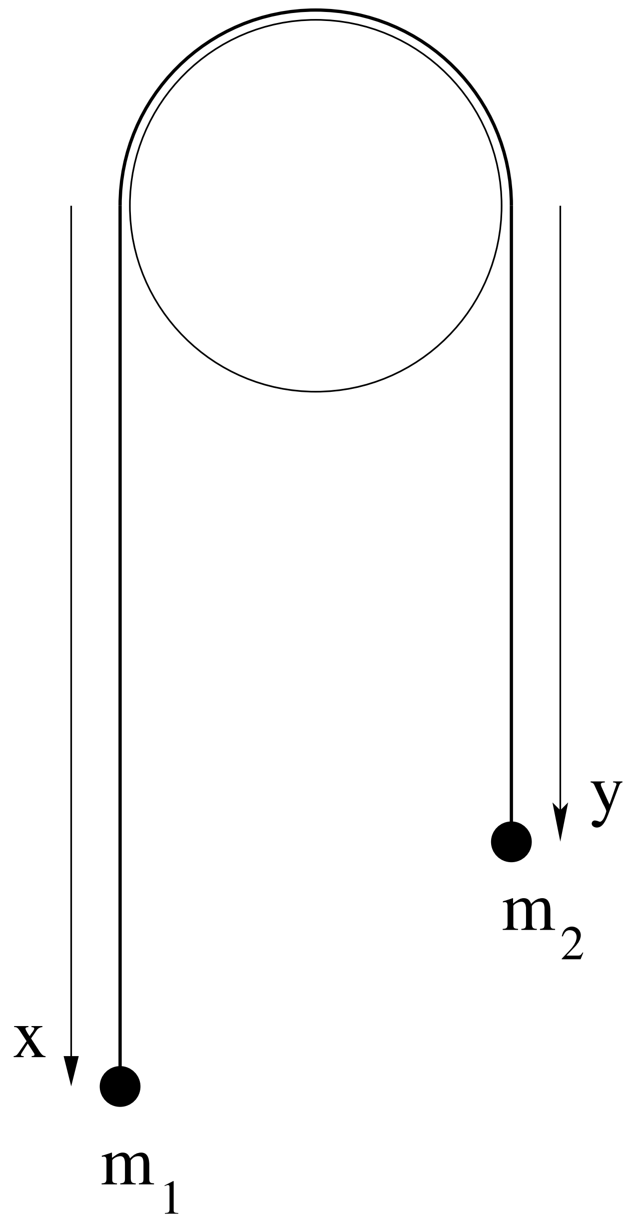


Figura 3: Macchina di Atwood.