Forze Centrali e Problema dei Due Corpi

In questo capitolo studiamo il moto di un punto materiale sottoposto ad una forza centrale. Uno dei risultati più importanti che verrà presentato è la derivazione delle tre leggi di Keplero. Come è noto tali leggi descrivono l'orbita di un pianeta nel sistema solare.

1 Cinematica

Consideriamo ora un moto $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ per cui l'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{r}}$ è collineare al moto, cioè

$$\boldsymbol{r} \wedge \ddot{\boldsymbol{r}} = 0. \tag{1}$$

In tal caso

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}}_{=0} + \boldsymbol{r} \wedge \ddot{\boldsymbol{r}} = 0.$$

Di conseguenza $\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}$ è un vettore costante. Nel caso in cui il vettore $\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}$ si annulli, abbiamo la collinearità dei vettori $\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ e $\ddot{\boldsymbol{r}}$ e il moto è rettilineo. Nel caso contrario i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\dot{\boldsymbol{r}}$ appartengono al piano per l'origine ortogonale al vettore costante $\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}$, quindi il moto è piano.

Utilizzando la seconda legge di Newton, si vede che l'ipotesi (1) implica

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = 0, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ è la forza che agisce sulla particella di massa m. Ciò implica che il momento angolare

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p} \tag{3}$$

è costante, dove $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ è la quantità di moto. Il moto è rettilineo se $\boldsymbol{L} = 0$, mentre risulta essere ristretto al piano per l'origine ortogonale ad $\boldsymbol{L}$ se $\boldsymbol{L} \neq 0$.

Scegliendo le coordinate (x, y, z) tali che $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{j} = 0$ e $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{k} > 0$, adottiamo le coordinate cilindriche (r, θ, z) tali che

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z.$$

Introducendo il versore radiale $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ e quello tangenziale $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_r &= \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}, \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\frac{y}{r}\boldsymbol{i} + \frac{x}{r}\boldsymbol{j} = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j},
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \tfrac{d}{dt}(r\cos\theta) = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\
\dot{y} &= \tfrac{d}{dt}(r\sin\theta) = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \\
\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r &= -(\sin\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{j} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \\
\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta &= -(\cos\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{i} - (\sin\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{j} = -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_r.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \tfrac{d}{dt}(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta) = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r(\dot{\theta})^2\cos\theta, \\
\ddot{y} &= \tfrac{d}{dt}(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r(\dot{\theta})^2\sin\theta,
\end{aligned}$$

mentre $\ddot{z} = 0$. Di conseguenza, essendo $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \tag{4a}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2]\hat{\boldsymbol{e}}_r + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\hat{\boldsymbol{e}}_\theta. \tag{4b}$$

Calcoliamo ora il momento angolare. Si ha

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= m(\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) \\
&= mr\hat{\boldsymbol{e}}_r \wedge (\dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta) = mr^2\dot{\theta}(\hat{\boldsymbol{e}}_r \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_\theta) \\
&= mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} = 2m\dot{A}\boldsymbol{k},
\end{aligned}$$

dove $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ è la velocità areale. Quindi $L = |\boldsymbol{L}| = 2m|\dot{A}|$ è il momento angolare.

2 Baricentro e Forze Centrali

Si considerino due oggetti di massa M_S e m (assimilabili, ad esempio, al Sole ed un pianeta che ruota intorno ad esso), che immagineremo di schematizzare con due punti materiali, le cui posizioni rispetto all'origine O di un sistema di riferimento inerziale sono individuate dai due vettori posizione $\boldsymbol{r}_1$ (per il pianeta) e $\boldsymbol{r}_2$ (per il Sole). Le sole forze agenti sul sistema dei due corpi sono quelle di mutua interazione $\boldsymbol{F}_{12}$ e $\boldsymbol{F}_{21}$, che supporremo essere dirette lungo il segmento tra i due corpi e di avere risultante zero.

Introduciamo le nuove variabili

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \qquad \boldsymbol{R} = \frac{m\boldsymbol{r}_1 + M_S\boldsymbol{r}_2}{m + M_S},$$

dove $\boldsymbol{r}$ è la posizione relativa del pianeta rispetto al Sole e $\boldsymbol{R}$ è la posizione del centro di massa dei due corpi. Siccome

$$\boldsymbol{R} = \frac{m}{m + M_S}\boldsymbol{r}_1 + \frac{M_S}{m + M_S}\boldsymbol{r}_2$$

è una combinazione lineare convessa (cioè, aventi per coefficienti numeri compresi tra 0 e 1 la cui somma è 1) delle posizioni $\boldsymbol{r}_1$ del pianeta e $\boldsymbol{r}_2$ del Sole, la posizione del centro di massa $\boldsymbol{R}$ appartiene al segmento congiungente dei due corpi. Le posizioni $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ si esprimono nelle nuove coordinate nel seguente modo:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{M_S}{m + M_S}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{m}{m + M_S}\boldsymbol{r}.$$

Rispetto alle nuove coordinate l'energia cinetica totale si esprime come

$$\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 + \tfrac{1}{2}M_S|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}m\left|\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{M_S}{m + M_S}\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2 + \tfrac{1}{2}M_S\left|\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m}{m + M_S}\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(m + M_S)|\dot{\boldsymbol{R}}|^2 + \tfrac{1}{2}\frac{mM_S}{m + M_S}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}M|\dot{\boldsymbol{R}}|^2 + \tfrac{1}{2}\mu|\dot{\boldsymbol{r}}|^2,
\end{aligned}$$

essendo

$$M = m + M_S, \qquad \mu = \frac{mM_S}{m + M_S}.$$

La quantità M rappresenta la massa totale (massa del Sole più massa del pianeta) del sistema, mentre μ è la cosiddetta massa ridotta. Nel caso in cui $m \ll M_S$, abbiamo $\mu < m$ e $(m - \mu) \ll M_S$, che giustifica il termine massa ridotta.

Una tale trasformazione si applica anche al momento angolare. Infatti, siano $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ la quantità di moto del pianeta e del Sole. Allora

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2 \wedge \boldsymbol{p}_2 = m(\boldsymbol{r}_1 \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_1) + M_S(\boldsymbol{r}_2 \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_2) \\
&= m\left(\left[\boldsymbol{R} + \frac{M_S}{m+M_S}\boldsymbol{r}\right] \wedge \left[\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{M_S}{m+M_S}\dot{\boldsymbol{r}}\right]\right) \\
&\quad + M_S\left(\left[\boldsymbol{R} - \frac{m}{m+M_S}\boldsymbol{r}\right] \wedge \left[\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m}{m+M_S}\dot{\boldsymbol{r}}\right]\right) \\
&= (m+M_S)(\boldsymbol{R} \wedge \dot{\boldsymbol{R}}) + \frac{mM_S^2 + M_S m^2}{(m+M_S)^2}(\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) \\
&= (m+M_S)(\boldsymbol{R} \wedge \dot{\boldsymbol{R}}) + \frac{mM_S}{m+M_S}(\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) \\
&= M(\boldsymbol{R} \wedge \dot{\boldsymbol{R}}) + \mu(\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) \\
&= \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p},
\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{P}$ è la quantità di moto del baricentro e $\boldsymbol{p}$ è quella del moto relativo al baricentro.

La risultante delle forze, $\boldsymbol{F}_{\text{est.}}$, si trasforma nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{est.}} &= m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + M_S\ddot{\boldsymbol{r}}_2 \\
&= m\left(\ddot{\boldsymbol{R}} + \frac{M_S}{m+M_S}\ddot{\boldsymbol{r}}\right) + M_S\left(\ddot{\boldsymbol{R}} - \frac{m}{m+M_S}\ddot{\boldsymbol{r}}\right) \\
&= (m+M_S)\ddot{\boldsymbol{R}} = M\ddot{\boldsymbol{R}}.
\end{aligned}$$

Quindi la risultante delle forze causa un'accelerazione del baricentro.

Nello studio del problema dei due corpi facciamo l'ipotesi che il loro baricentro sia fermo:

$$\dot{\boldsymbol{R}} = 0.$$

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento sul baricentro, l'energia cinetica sarà $T = \frac{1}{2}\mu|\dot{\boldsymbol{r}}|^2$ ed il momento angolare sarà $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$, dove $\boldsymbol{p} = \mu\dot{\boldsymbol{r}}$. Supponiamo inoltre che le forze agenti tra i due corpi, $\boldsymbol{F}_{12}$ e $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$, dipendano soltanto dalla distanza tra loro, cioè da $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$. In altre parole, la forza $\boldsymbol{F}_{12}$, che il Sole esercita sul pianeta, dipende soltanto da r:

$$\boldsymbol{F}_{12} = f(r)\hat{\boldsymbol{e}}_r,$$

essendo la $f(r)$ una funzione continua di r e $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ il versore radiale (cioè, proveniente dal baricentro).

Sia $U(r)$ una primitiva della $-f(r)$: $f(r) = -U'(r)$. Allora $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e

$$\begin{aligned}
\nabla U(r) &= \frac{\partial}{\partial x}U(r)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}U(r)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}U(r)\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial U}{\partial r}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\right\} \\
&= U'(r)\left\{\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right\} \\
&= -f(r)\hat{\boldsymbol{e}}_r = -\boldsymbol{F}_{12},
\end{aligned}$$

dove $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ è il versore radiale (con componenti x/r, y/r e z/r). In altre parole, la forza, che il Sole esercita sul pianeta, è conservativa.

3 Forza Gravitazionale

Secondo la teoria della gravitazione di Newton, due corpi esercitano una forza gravitazionale uno sull'altro che è proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra essi. In altre parole,

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{GM_S m}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r,$$

dove G è una costante universale (determinata sperimentalmente per la prima volta da Henry Cavendish nel 1797-98). Siccome

$$M_S m = \mu(m + M_S) = \mu M,$$

abbiamo anche

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{G\mu M}{r^2} = -\nabla U(r),$$

dove

$$U(r) = -\frac{G\mu M}{r}.$$

Per trovare l'orbita del pianeta intorno al Sole, applichiamo la seconda legge di Newton nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\mu[\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] = -U'(r),$$

dove $\mu r\dot{\theta}^2$ è la forza centrifuga. Siccome la velocità areale $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = (L/2\mu)$ per L il momento angolare, si ha

$$\mu r(\dot{\theta})^2 = \mu r \left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 = \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

Infine arriviamo all'equazione differenziale

$$\mu\ddot{r} = -\frac{G\mu M}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3}. \tag{5}$$

Per risolvere la (5) introduciamo la nuova funzione $u = (1/r)$ e convertiamo le derivate rispetto al tempo in derivate rispetto a θ:

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta} = \frac{Lu^2}{\mu}\frac{d}{d\theta}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{d}{dt}r = \frac{d}{dt}\frac{1}{u} = \frac{Lu^2}{\mu}\frac{d(1/u)}{d\theta} = -\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta},\\ \ddot{r} &= \frac{Lu^2}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{L^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}.\end{aligned}$$

Sostituendo tali espressioni per r e $\ddot{r}$ nella (5) otteniamo

$$-\frac{L^2u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -G\mu Mu^2 + \frac{L^2}{\mu}u^3.$$

Oppure:

$$u''(\theta) + u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{L^2}. \tag{6}$$

La soluzione generale è la seguente:

$$u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{L^2}\left(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)\right),$$

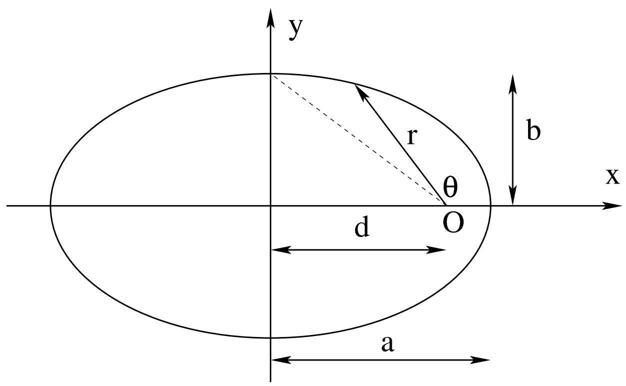

Figura 1: Orbita di un pianeta nel sistema solare.

dove ε e θ_0 sono costanti arbitrarie. Di conseguenza

$$r(\theta) = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \tag{7}$$

Introducendo le coordinate x e y tali che l'asse x positivo ha la stessa direzione della semiretta di angolo polare θ_0 (cioè, $x = r\cos(\theta - \theta_0)$ e $y = r\sin(\theta - \theta_0)$), risulta

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x = r + \varepsilon x = r[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)] = \frac{L^2}{G\mu^2 M}.$$

Eliminando la radice quadrata arriviamo all'equazione quadratica

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{L^2}{G\mu^2 M}\right)^2 - 2\varepsilon \frac{L^2}{G\mu^2 M} x + \varepsilon^2 x^2. \tag{8}$$

Si presentano quattro casi:

a. $\varepsilon = 0$: $r(\theta) = [L^2/G\mu^2 M]$ è costante. Il moto è una circonferenza attorno al baricentro del Sole e del pianeta.

b. $0 < \varepsilon < 1$: Si ha

$$(1 - \varepsilon^2) \left(x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{L^2}{G\mu^2 M}\right)^2 \frac{1}{1 - \varepsilon^2},$$

oppure:

$$\frac{\left(x-\dfrac{\varepsilon L^2}{G\mu^2M(1-\varepsilon^2)}\right)^2}{\left(\dfrac{L^2}{G\mu^2M(1-\varepsilon^2)}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{L^2}{G\mu^2M\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2}=1,$$

cioè un ellisse con semiassi

$$a=\frac{L^2}{G\mu^2M(1-\varepsilon^2)},\qquad b=\frac{L^2}{G\mu^2M\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

semidistanza dei fuochi $d=\varepsilon L^2/G\mu^2M\sqrt{1-\varepsilon^2}$ e l'eccentricità $(d/a)=\varepsilon$, mentre il baricentro è uno dei fuochi.

c. $\varepsilon=1$: In tal caso

$$y^2=\frac{L^2}{G\mu^2M}\left\{\frac{L^2}{G\mu^2M}-2x\right\},$$

una parabola con il baricentro nel fuoco.

d. $\varepsilon>1$: In tal caso

$$\frac{\left(x-\dfrac{\varepsilon L^2}{G\mu^2M(\varepsilon^2-1)}\right)^2}{\left(\dfrac{L^2}{G\mu^2M(\varepsilon^2-1)}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{L^2}{G\mu^2M\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2}=1,$$

un'iperbole con semiassi

$$a=\frac{L^2}{G\mu^2M(\varepsilon^2-1)},\qquad b=\frac{L^2}{G\mu^2M\sqrt{\varepsilon^2-1}},$$

semidistanza dei fuochi $d=\varepsilon L^2/G\mu^2M\sqrt{\varepsilon^2-1}$ e l'eccentricità $(d/a)=\varepsilon$, mentre il baricentro è uno dei fuochi.

e. Per $\varepsilon<0$ abbiamo le stesse coniche, poiche' la transformazione $(x,\varepsilon)\mapsto(-x,-\varepsilon)$ converte la (8) in se stessa.

Torniamo al caso $0 < \varepsilon < 1$. Il periodo del moto è

$$\tau = \frac{\pi ab}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{L/2\mu} = \frac{2\pi ab\mu}{L}.$$

Poichè $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$,

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{L^2} \\ &= a^3 \frac{4\pi^2 \mu^2 (1-\varepsilon^2)}{L^2} \frac{L^2}{G\mu^2 M(1-\varepsilon^2)} = a^3 \frac{4\pi^2}{GM}.\end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi che $m \ll M_S$ (cioè che $M \simeq M_S$ e $\mu \simeq m$) risultano le tre leggi di Keplero [Astronomia Nova, 1609]:

1. **Prima legge di Keplero**: Le orbite dei pianeti sono ellissi con il Sole che occupa uno dei fuochi. In realtà, le orbite dei pianeti sono ellissi con il baricentro del Sole e del pianeta che occupa uno dei fuochi.

2. **Seconda legge di Keplero**: La velocità areale $\dot{A}$ è costante:

$$\dot{A} = \frac{L}{2\mu}.$$

3. **Terza legge di Keplero**: Il rapporto tra il quadrato del periodo τ e il cubo del semiasse maggiore a è una costante che non dipende dal pianeta:

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \simeq \frac{4\pi^2}{GM_S}.$$