

# MECCANICA 1

## COMPLEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

**Vettori applicati:** Momento (polare) di un vettore applicato rispetto ad un punto. Momento (assiale) di un vettore applicato rispetto ad una retta orientata (asse). Sistemi di vettori applicati: risultante e momento risultante polare ed assiale. Alcuni semplici sistemi di vettori applicati: coppia, vettori applicati ad un punto, vettori paralleli, vettori complanari. Teorema di Varignon. Modo di variare del momento al variare del polo: teorema di trasposizione. Decomposizione del momento polare di un sistema (a risultante non nullo) nel suo componente parallelo al risultante e nel componente ortogonale. Teorema di esistenza ed unicità dell'asse centrale: momento minimo. Trinomio invariante. Decomposizione canonica del momento polare di un sistema di vettori applicati. Nozione di riducibilità per un sistema di vettori applicati. Sistemi di vettori applicati paralleli e sistemi piani. Centro di un sistema di vettori applicati paralleli.

Condizione necessaria e sufficiente perché un vettore abbia modulo costante. Condizione necessaria e sufficiente perché un vettore abbia direzione invariabile.

**Proprietà differenziali di una curva:** Versore della tangente. Curvatura e normale principale. Triangolo principale o di Frenet. Prima formula di Frenet. Applicazione all'elica circolare.

## NOZIONI FONDAMENTALI DI CINEMATICA CLASSICA

### Richiami di Cinematica classica del punto

Spazio, tempo e movimento nella concezione newtoniana (Newton). Spazio e tempo secondo Einstein. Carattere "relativo" dello spazio e carattere "assoluto" del tempo nella meccanica classica (Landau). Assiomi della cinematica classica: nozione assoluta di simultaneità e di distanza spaziale.

Elementi essenziali del moto. Equazioni cartesiane del moto di un punto. Equazione oraria e suo diagramma. Concetti cinematici inerenti alla legge temporale del moto senza riguardo alla forma della traiettoria: velocità scalare e accelerazione scalare. Moto in relazione allo spazio ambiente: velocità vettoriale e accelerazione vettoriale. Accelerazione tangenziale e normale.

### Moti piani

Moti piani in coordinate polari: velocità radiale e trasversa. Velocità areolare scalare e vettoriale. Accelerazione radiale e trasversa nei moti piani. Moti centrali. Formula di Binet. Moti kepleriani. Composizione di moti simultanei: moto elicoidale uniforme.

### Cinematica classica dei sistemi rigidi (discreti e continui)

Sistemi discreti e sistemi continui. Nozione di corpo rigido. Prima impostazione col sussidio di assi solidali. Seconda impostazione direttamente desunta dalla invariabilità delle mutue distanze: prima proprietà caratteristica dei moti rigidi. Formule di Poisson e velocità angolare. Formula fondamentale della Cinematica dei moti rigidi. Atto di moto: linee di flusso e linee di corrente.

Teorema di Mozzi: asse istantaneo di moto e asse istantaneo di rotazione. Accelerazione dei punti di un corpo rigido.

**Moti rigidi particolari:** moti traslatori, moti rotatori, moti rigidi sferici (o con un punto fisso), moti rigidi con asse invariabile e moti elicoidali, moti rototraslatori, moti rigidi piani.

### **Moti relativi**

Derivata assoluta e derivata relativa di una funzione vettoriale. Moto di un punto rispetto a due riferimenti mobili tra loro: velocità ed accelerazione assoluta, relativa e di trascinamento. Teorema dei moti relativi. Teorema di Coriolis. Moti di trascinamento particolari: moti traslatori rettilinei uniformi e moti rotatori uniformi. Moti rigidi relativi. Moto reciproco.

### **Generalità sulla cinematica dei sistemi**

Vincoli e gradi di libertà. Sistemi liberi e vincolati: Vincoli e loro classificazione. Vincoli di posizione e vincoli olonomi. Coordinate generalizzate (o lagrangiane) e gradi di libertà. Le velocità e le accelerazioni lagrangiane. Coordinate lagrangiane sovrabbondanti. Vincoli di mobilità e vincoli anolonomi. Sistemi olonomi ed anolonomi. Spostamenti elementari: spostamenti possibili, spostamenti effettivi, spostamenti virtuali. Cenno sui vincoli unilaterali.

## **QUADRO GENERALE DELLA DINAMICA CLASSICA DEI SISTEMI**

### **MECCANICA NEWTONIANA**

#### **Richiami di Dinamica del punto**

Concetto di punto materiale o particella. Richiamo degli assiomi della Meccanica Classica di una particella: leggi di Galileo-Newton. Omogeneità ed isotropia dello spazio ed omogeneità del tempo (Landau). Riferimenti inerziali o galileiani (Landau). Principio galileiano di relatività. Principio di reciprocità del moto. Trasformazione di Galileo. Legge classica di propagazione delle interazioni. Principio deterministico di Newton-Laplace. Rappresentazione matematica delle forze naturali: forze posizionali e forze dipendenti dalla sola velocità. Forze effettive o reali. Impostazione generale del problema dinamico. Riferimenti non inerziali e forze apparenti: Meccanica relativa. Potenza e lavoro. Forze conservative: potenziale ed energia potenziale. Vincoli e loro reazioni. Postulato di liberazione dei vincoli. Reazioni vincolari per vincoli lisci e vincoli scabri. Leggi empiriche dell'attrito statico e dinamico. Teoremi dinamici fondamentali: della quantità di moto del momento angolare e dell'energia cinetica. Integrali primi e leggi di conservazione. Meccanica del punto vincolato.

#### **Una prima applicazione: Moti unidimensionali**

Moto di un punto su traiettoria prestabilita. Analisi qualitativa del moto dovuto ad una forza posizionale: discussione di Weierstrass consentita dall'integrale dell'energia. Il pendolo semplice. Piano delle fasi, equilibrio.

## **Una seconda applicazione: Moti bidimensionali**

### **Moto di un punto materiale in un campo centrale**

Generalità, integrali primi. Sostituibilità degli integrali primi alle equazioni del moto. Equazione differenziale dell'orbita. Orbite circolari e loro stabilità.

### **Nozioni elementari di Meccanica Celeste: il problema dei due corpi.**

Legge della gravitazione universale. Riduzione del problema a quello di un solo corpo soggetto a forze centrali: problema ristretto. Interpretazione dinamica delle leggi di Kepler. Problema diretto di Newton. Orbite circolari. Orbite degeneri. Orbite generali. Classificazione delle orbite. Criterio discriminativo della specie dell'orbita: classificazione delle orbite. Legami fra i caratteri geometrici della traiettoria e le costanti del moto. Moti kepleriani. Legge del tempo nel moto kepleriano: equazione del Kepler. Cenno al problema dei tre corpi.

### **Moto di un punto su superficie prestabilita**

Caso di una superficie di rotazione: Teorema di Clairaut. Discussione del moto attraverso gli integrali primi dell'energia e dell'impulso. Moti spontanei e geodetiche.

### **Meccanica dei sistemi: Geometria delle masse**

Schema particellare e schema continuo. Momenti statici e centro di Massa: Baricentro. Proprietà di ubicazione dei baricentri. Momento d'inerzia assiale, planare e polare. Prodotti d'inerzia. Modo di variare del momento d'inerzia rispetto ad assi paralleli: il teorema di trasposizione di Huygens. Modo di variare del momento d'inerzia rispetto ad assi concorrenti in un punto. Ellissoide d'inerzia. Tensore d'inerzia, suoi autovalori e riduzione agli assi principali.

### **Grandezze cinetiche fondamentali**

Energia cinetica di un sistema discreto o continuo: teorema di Koenig. Energia cinetica di un sistema rigido: solido con un asse fisso e solido con un punto fisso. Energia cinetica di un sistema olonomo in coordinate lagrangiane.

Quantità di moto di un sistema discreto o continuo. Moto relativo al baricentro. Momento delle quantità di moto (o momento angolare) di un sistema discreto o continuo. Quantità di moto e momento angolare di un solido: solido con un punto fisso. Momento assiale delle quantità di moto di un solido girevole attorno ad un asse fisso.

### **Grandezze dinamiche fondamentali**

Sollecitazioni e loro leggi. Potenza e lavoro. Sollecitazioni conservative: potenziale ed energia potenziale. Lavoro elementare delle forze interne. Espressione della potenza e del lavoro nel caso rigido: solido libero, solido con un asse fisso, solido con un punto fisso. Lavoro elementare per un sistema olonomo: componenti lagrangiane delle forze. Lavoro virtuale ed identità notevoli. Variazione della potenza e del lavoro in un cambiamento del riferimento.

## **Equazioni cardinali della Dinamica dei Sistemi: Teoremi generali**

Generalità sulla dinamica di un sistema. Forze interne ed esterne ad un sistema materiale. Equazioni Cardinali della Meccanica dei Sistemi. Carattere assoluto della potenza delle forze interne. Teoremi fondamentali (di bilancio): della quantità di moto e del moto del baricentro, del momento angolare, dell'energia cinetica. Integrali primi e leggi di conservazione.

## **I CONCETTI DI BASE DELLA MECCANICA ANALITICA**

### **Introduzione**

Il punto di vista della Meccanica Analitica. L'approccio variazionale alla Meccanica. Le procedure di Eulero e Lagrange. La procedura di Hamilton. Il calcolo delle variazioni. Confronto fra le trattazioni vettoriale e variazionale della Meccanica.

## **MECCANICA LAGRANGIANA**

**Principio dei lavori virtuali. Relazione ed equazione simbolica della dinamica (Principio di d'Alembert).** Moti variati sincroni. **Equazioni di Lagrange** dedotte dall'equazione simbolica della dinamica.. Teorema e integrale dell'energia. Funzione lagrangiana. Potenziali ordinari di 1a e 2a specie; potenziali generalizzati di 1a e 2a specie. Lagrangiana di una carica in un campo elettromagnetico

# MECCANICA 2

## MECCANICA ANALITICA

### **Principi variazionali: formulazione lagrangiana**

Principi differenziali e principi integrali della Meccanica. L'approccio variazionale alla Meccanica.

Cenni di calcolo delle variazioni. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. Equazioni di Lagrange dedotte dal principio variazionale di Hamilton (per sistemi olonomi non conservativi) e viceversa. Estensione del principio dell'Hamilton ai sistemi lagrangiani generali: equazioni di Eulero-Lagrange.

Moti variati asincroni. Principio variazionale dell'Hölder (Maupertuis) o dell'azione stazionaria e principio di minima azione. Caso di un sistema olonomo scleronomo sottoposto a sollecitazione conservativa. Interpretazione geometrica del principio dell'azione stazionaria: metrica di Jacobi. Moti spontanei e geodetiche. Applicazione all'Ottica geometrica: principio di Fermat.

### **Sistemi lagrangiani generali**

Momenti cinetici. Integrali primi dei momenti e coordinate cicliche. Integrale primo dell'energia. Teoremi di conservazione e proprietà di simmetria. Teorema della variazione dell'energia totale. Forze dissipative e giroscopiche. Termini giroscopici (o girostatici). Ignorazione di coordinate. Invarianza delle equazioni di Lagrange per trasformazioni puntuali di coordinate. Il tempo come variabile ciclica. Concetto di varietà differenziabile e di varietà riemanniana. Spazio delle configurazioni di un sistema olonomo scleronomo e sua struttura riemanniana. La forma esplicita delle equazioni di Lagrange.

### **Dinamica del corpo rigido**

Equazioni cardinali. Moto di un solido con un asse fisso. Pendolo composto. Teorema di Huygens.

### **Complementi di cinematica del corpo rigido:**

Angoli di Eulero ed equazioni cinematiche di Eulero. Moti rigidi intorno ad un punto fisso, coni del Poincaré e precessioni regolari. Precessioni dirette e precessioni retrograde. Precessione regolare della Terra e precessione degli equinozi.

### **Equazioni dinamiche di Eulero.**

Moto di un solido libero intorno al baricentro. solidi a struttura giroscopica rispetto ad un loro punto e giroscopi. Tensore d'inerzia. Equazioni di Eulero per un solido a struttura giroscopica. Moto alla Poincaré: equazioni del moto. Integrali primi. Sulla integrazione delle equazioni del moto alla Poincaré. Rappresentazione geometrica dell'andamento del moto secondo il Poincaré. Rotazioni permanenti. Significato dei momenti di deviazione. Carattere precessionale del moto alla Poincaré di un solido a struttura giroscopica rispetto al punto fisso. Rotatore simmetrico pesante con un punto fisso.

## **Fondamenti di Statica Analitica.**

Posizioni di equilibrio e Statica. Principio dei lavori virtuali e Condizione generale di equilibrio. Relazione ed equazione simbolica della Statica.

**Statica dei sistemi olonomi:** Condizioni di equilibrio in coordinate lagrangiane.

## **Posizioni di equilibrio e Stabilità**

Definizione di configurazione di equilibrio per un sistema materiale, in particolare per un sistema olonomo. Stabilità ed instabilità secondo Liapunov. Il teorema di Lagrange-Dirichlet sulla stabilità. Teorema d'instabilità di Liapunov.

## **Piccole oscillazioni**

Piccole oscillazioni di un sistema conservativo ad uno o due gradi di libertà attorno ad una configurazione di equilibrio stabile. Caso generale: equazione agli autovalori e riduzione agli assi principali. Frequenze di vibrazione libera e coordinate normali.

# **MECCANICA HAMILTONIANA**

## **Le equazioni canoniche di Hamilton.**

Forma hamiltoniana dei sistemi lagrangiani: Trasformazione di Legendre e teorema di Donkin. Coordinate cicliche e teoremi di conservazione. Coordinate cicliche e metodo di Routh. Espressione esplicita della funzione hamiltoniana nel caso dinamico. Esempi. Teoremi di conservazione e significato fisico dell'hamiltoniana. Spazio delle fasi e sua struttura simplettica.

## **Principi variazionali: formulazione hamiltoniana**

Deduzione delle equazioni di Hamilton da un principio variazionale: principio di Helmholtz. Principio di minima azione.

## **Trasformazioni canoniche**

Definizione. La 1-forma di Poincarè-Cartan. Condizione sufficiente ad assicurare la natura canonica di una trasformazione (Condizione di canonicità di Lie). Teorema della funzione generatrice. Trasformazioni completamente canoniche. Esempi di trasformazioni canoniche. Forma esplicita delle condizioni di completa canonicità: parentesi di Poisson.

## **Integrali di un sistema differenziale ordinario del primo ordine**

Operatori differenziali lineari e loro commutatori. Integrali e invarianti di un sistema differenziale ordinario del primo ordine ed equazione alle derivate parziali che li definisce. Integrali e invarianti di un sistema canonico. Algebra di Lie delle parentesi di Poisson. 1° e 2° Teorema di Poisson. Le

parentesi di Poisson come invarianti canonici. Le equazioni canoniche nella notazione delle parentesi di Poisson. Relazioni invarianti. Lemma di Jacobi sulle relazioni involutorie. Applicazione ai sistemi canonici.

### **Teoria di Hamilton-Jacobi**

Problema dell'integrabilità dei sistemi hamiltoniani e metodi di integrazione. Integrabilità per quadrature. Completa integrabilità. Sistemi integrabili. L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione principale di Hamilton: Teorema di Jacobi. Il problema dell'oscillatore armonico come esempio del metodo di Hamilton-Jacobi. L'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica di Hamilton. Integrale generale nel caso dinamico. Caso di una funzione caratteristica indipendente dal tempo: impostazione simmetrica del Poincaré ed impostazione di Jacobi.

### **Riduzioni del rango conseguenti dalla conoscenza di integrali primi**

Generalità. Riduzione del rango dei sistemi canonici conseguente all'esistenza di coordinate ignorabili. Riduzione del rango consentita dall'integrale dell'energia. Teorema fondamentale di Liouville sull'integrabilità per quadrature. Corollari del teorema di Liouville per sistemi canonici a funzione caratteristica indipendente dal tempo.

### **Integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili**

Caso di integrabilità del Liouville: integrale generale e andamento del moto. Caso di integrabilità dello Stäckel: integrale generale e andamento del moto. Separazione delle variabili per l'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi: Teorema di Levi-Civita.

Casi di integrazione per separazione delle variabili che non rientrano in quello di Stäckel: casi di Thiry, di Landau, di Gantmacher. Applicazione al problema delle geodetiche di una varietà riemanniana o pseudoriemanniana. Applicazione al problema di due corpi. Variabili azione-angolo e loro proprietà. Variabili azione-angolo per sistemi completamente separabili. Il problema di Keplero nello schema delle variabili azione-angolo. Teoria di Hamilton-Jacobi, Ottica geometrica e Meccanica ondulatoria.

### **Libri consigliati**

- 1) Herbert GOLDSTEIN, Charles POOLE, John SAFKO, *Meccanica Classica*, Zanichelli - Bologna (2005) seconda edizione italiana condotta sulla terza edizione americana (ottimo libro, molto apprezzato dai fisici ed adottato, per più di 50 anni, in molte Università sia americane che europee).
- 2) John R. TAYLOR, *Meccanica Classica*, Zanichelli - Bologna (2006). Testo didatticamente molto efficace e chiaro, con diversi esercizi svolti e discussi nei dettagli; la trattazione è ad un livello più elementare di quella del Goldstein e può essere perciò molto apprezzata dallo studente.

### **Testi di consultazione**

- 1) L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Fisica Teorica 1, Meccanica*, Editori Riuniti, Roma (1976) (La trattazione è molto sintetica ma chiara ed efficace; è il primo volume del magistrale trattato di fisica teorica in 10 volumi, del grande fisico russo Lev Davidovic

Landau (premio nobel per la fisica), e del suo collaboratore Evgheni Lifschitz. Ogni studente di fisica e matematica dovrebbe conoscere, almeno in parte, questo trattato!

- 2) Tullio LEVI-CIVITA e Ugo AMALDI, ***Lezioni di Meccanica Razionale***, vol. I, vol. II (prima parte), vol. II (seconda parte), Zanichelli - Bologna (ristampa del 1974), (trattato classico molto esteso, estremamente chiaro e lucido, fortemente raccomandato all'attenzione degli studenti per tutti gli argomenti di base della Meccanica Classica).
- 3) Antonio FASANO, Stefano MARMI, ***Meccanica Analitica***, Bollati Boringhieri - Torino (2002).
- 4) Giuseppe GRIOLI ***Lezioni di Meccanica Razionale***, Libreria Internazionale Cortina - Padova (2002);

#### Testi di esercizi

1. Sergio BRESSAN, Antonio GRIOLI, ***Esercizi di Meccanica Razionale***, Libreria Internazionale Cortina - Padova (2003);
2. Dario GRAFFI, ***Esercizi di Meccanica Razionale***, Casa Editrice Pàtron – Bologna (1970).