$$0 = \frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{b}+\vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}\cdot\vec{b}+\vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds};$$

$\frac{d\vec{b}}{ds}$ è perciò perpendicolare anche a $\vec{t}$, quindi è parallela a $\vec{n}$. Ciò posto, si definisce curvatura di torsione $\frac{1}{\tau}$ il limite del rapporto $\frac{\Delta\beta}{\Delta s}$ per $\Delta s \longrightarrow 0$ qualora $\Delta\beta$ sia l'angolo fra $\vec{b}(s)$ e $\vec{b}(s+\Delta s)$, e si attribuisce a $\frac{1}{\tau}$ segno positivo o negativo a seconda che $\frac{d\vec{b}}{ds}$ ha lo stesso verso o verso contrario a $\vec{n}$. Allora, ragionando come a proposito del calcolo di $\frac{d\vec{t}}{ds}$ (I-29), si trova

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\vec{n}. \tag{15}$$

Essendo poi

$$\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t},$$

derivando e ricordando (14) e (15) si ha

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds}\times\vec{t}+\vec{b}\times\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\tau}\vec{n}\times\vec{t}+\frac{1}{\rho}\vec{b}\times\vec{n} = -\frac{1}{\rho}\vec{t}-\frac{1}{\tau}\vec{b}. \tag{16}$$

Le (14), (15) e (16) sono le formule cercate, dette anche formule di Frenet o di Serret.

CAPITOLO II

Sulla cinematica del punto

1 - *Un treno parte da una stazione con accelerazione costante* 0,125 m/sec² *fino a raggiungere la velocità di regime di* 90 km/ora, *indi il moto procede uniforme; la stazione da raggiungere dista* 10 km *e prima di arrivarvi il treno viene frenato con una decelerazione costante di* 0,833 m/sec².

Determinare lo spazio e il tempo richiesto per la fase di avviamento e quella di frenata, la durata totale del percorso e infine la velocità media.

Durante l'avviamento il moto è naturalmente accelerato. Posta l'origine del tempo nell'istante di partenza quella dello spazio nel luogo di partenza valgono le formule di C-I 8 (ora $v_0 = s_0 = 0$):

$$v = at \tag{1}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

e si ha che il tempo necessario t_1 per raggiungere la velocità di regime si ottiene dalla (1) sostituendovi l'accelerazione di avviamento e la velocità di regime, quest'ultima espressa in metri al secondo (per usare un unico sistema di unità di misura) è 90 km/ora $= \frac{90000}{3600}$ m/sec $=$ $= 25$ m/sec. Quindi, ricordando il valore di a:

$$25 = 0,125\, t_1$$

$$t_1 = \frac{25}{0,125} = 200 \text{ sec.}$$

Per ciò lo spazio s_1 percorso fino a raggiungere la velocità di regime vale, per la (2):

$$s_1 = \frac{1}{2}\,0{,}125 \times (200)^2\,\mathrm{m} = 2500\ \mathrm{m}.$$

Calcoliamo ora il tempo necessario per la frenata. Il moto è ora uniformemente ritardato e, come adesso conviene, poniamo l'origine del tempo nell'istante in cui comincia la frenata e quella dello spazio nel luogo corrispondente a questo istante. Si ha (C I-8):

$$v = v_0 - at, \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2.$$

Naturalmente a è l'accelerazione ritardatrice, v_0 la velocità iniziale che coincide con quella di regime. Il treno sarà fermo nell'istante t' per cui $v = 0$, cioè:

$$v_0 - at' = 0, \qquad t' = \frac{v_0}{a} = \frac{25}{0{,}833}\ \mathrm{sec} = 30\ \mathrm{sec},$$

e dopo aver percorso lo spazio s' tale che:

$$s' = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0 t'}{2} = 375\ \mathrm{m}.$$

Lo spazio totale percorso durante l'avviamento e la frenatura vale $2500 + 375$ m = 2875 m, si percorre perciò con la velocità di regime un cammino di 7,125 km uguale a 7125 m, impiegando 285 secondi.

In definitiva il treno impiega $285 + 200 + 30 = 515$ sec. per percorrere l'intero cammino e quindi la sua velocità media vale: $\dfrac{10\,000}{515}$ m/sec $= \dfrac{10 \times 3600}{515}$ km/ora $\cong 70$ km/ora.

***

2. - *Ammesso, come si dimostrerà in dinamica, che un punto materiale, soggetto solo al suo peso, si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione g, se scende lungo la verticale, con accelerazione g sen α se obbligato a scendere lungo una retta inclinata di α rispetto all'orizzonte (meglio la retta di pendio di un piano inclinato di α) si dimostri che il tempo necessario per percorrere, partendo dalla quiete, una corda di un cerchio verticale con un estremo nel suo punto più basso A è indipendente dall'inclinazione della corda (GALILEO).*

Poiché il punto parte dalla quiete il suo moto è naturalmente accelerato, quindi se c è la lunghezza della

corda (di cui l'altro estremo è B) e t il tempo impiegato a percorrerla, si avrà che:

$$c = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}\,t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{2c}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}$$

Ma, indicato con D (fig. 11) l'altro estremo del diametro passante per A e posto uguale a d la sua lunghezza, poiché $c = d\,\mathrm{sen}\,\alpha$, si ha

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}},$$

quindi il tempo di caduta è indipendente dall'inclinazione α della corda.

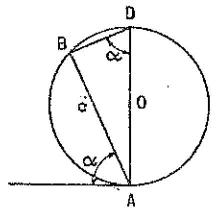

Fig. 11

***

3. - *Trovare l'inclinazione della retta di più rapida discesa da un punto B di una parabola (con asse verticale e concavità rivolta verso l'alto) al suo fuoco F.*

In un sistema di coordinate polari ρ e θ con origine nel fuoco, asse polare l'asse della parabola orientato verso l'alto, per l'equazione della predetta curva si ha

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}, \tag{3}$$

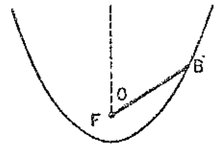

Fig. 12

dove p è il parametro della parabola (figura 12). Poiché BF è inclinato rispetto all'orizzonte di $\frac{\pi}{2} - \theta$, per quanto si è detto nell'esercizio precedente, il tempo t necessario per percorrere BF vale (ora ρ e θ sono le coordinate di B soddisfacenti la (3), θ deve essere compresa fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ perché B deve essere più alto di F)

$$t = \sqrt{\frac{2\rho}{g\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2p}{g\,(\cos\theta - \cos^2\theta)}}\,;$$

t sarà minima quando

$$f(\theta) = \cos\theta - \cos^2\theta$$

sarà massima, cioè per quel valore di θ per cui è

$$f'(\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta\,(1 - 2\cos\theta) = 0$$

cioè per

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3},$$

perché solo per questi valori

$$f''(\theta) = -\cos\theta + 2\cos 2\theta$$

è negativa, quindi l'inclinazione, rispetto all'orizzonte della retta di minima discesa è $\frac{\pi}{6}$.

***

4\. - *Un punto si muove con accelerazione costante* a *e all'istante* $t = \tau$ *la sua velocità è* u, d *lo spazio percorso. Scrivere l'equazione del moto.*

Il moto è uniformemente accelerato, sono però incognite velocità iniziale e spazio iniziale che si potrebbe ricavare con le condizioni per $t = \tau$. È più facile però procedere nel seguente modo.

Si ponga $t' = t - \tau$, allora per il tempo indicato con t', u e d sono rispettivamente velocità e spazio iniziale. Quindi:

$$(4) \qquad s = \frac{1}{2}at'^2 + ut' + d = \frac{1}{2}a(t-\tau)^2 + u(t-\tau) + d.$$

È questa l'equazione cercata.

Questo risultato si può confermare osservando che il moto rappresentato dalla (4) ha accelerazione costante (come si comprova subito derivando s due volte) e che per $t = \tau$ si ha: $s = d$, $v = u$.

Il metodo di questo esercizio si applica a qualsiasi altro moto anche non uniformemente accelerato.

***

5\. - *Due punti mobili su una stessa retta partono dallo stesso luogo, con accelerazioni costanti uguali, con velocità iniziali nulle, l'uno all'istante iniziale, l'altro all'istante* τ. *Dimostrare che la distanza fra i due punti va crescendo linearmente col tempo.*

Posto l'origine al punto di partenza avremo che il moto del primo punto è naturalmente accelerato, con spazio iniziale nullo, rappresentato dall'equazione:

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2;$$

per il secondo moto si ha spazio e velocità nulla all'istante $t = \tau$; si può perciò applicare la formula del numero precedente e si ha $(u = d = 0)$:

$$s_2 = \frac{1}{2}a(t-\tau)^2.$$

La distanza h fra i due punti è (per $t > \tau$):

$$h = s_1 - s_2 = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-\tau)^2 = a\tau t - \frac{a\tau^2}{2}$$

perciò h cresce linearmente col tempo.

***

6\. - *Due punti si muovono sulla stessa retta, nello stesso verso e con la stessa accelerazione* a, *il primo parte dall'origine con velocità iniziale* v_0, *l'altro dal punto distante* d *dall'origine e con velocità iniziale nulla. Trovare l'istante e il luogo in cui avviene l'incontro fra i due punti.*

Indicando con s_1 e s_2 lo spazio percorso rispettivamente dal primo e secondo punto, si ha

$$s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \qquad s_2 = d + \frac{1}{2}at^2,$$

perché per il primo moto è nullo lo spazio iniziale, nel secondo vale d. L'incontro avviene all'istante t' in cui s_1 è uguale a s_2 e cioè

$$v_0 t' + \frac{1}{2}at'^2 = d + \frac{1}{2}at'^2, \qquad t' = \frac{d}{v_0},$$

e l'ascissa del punto d'incontro è:

$$s_1 = v_0\frac{d}{v_0} + \frac{1}{2}a\frac{d^2}{v_0^2} = d + \frac{1}{2}a\frac{d^2}{v_0^2}.$$

***

7\. - *Un punto si muove di moto naturalmente accelerato con accelerazione* a. *All'istante* τ *viene, con un urto, raddoppiata la sua velocità. Scrivere l'equazione del moto per* $t > \tau$.

All'istante τ, dopo l'urto, la velocità (che prima dell'urto era $a\tau$) diventa $2a\tau$, l'ascissa del punto è

$s_0 + \frac{1}{2}a\tau^2$. Allora per il risultato dell'es. 4 si ha:

$$s = \frac{1}{2}a(t-\tau)^2 + 2a\tau(t-\tau) + s_0 + \frac{1}{2}a\tau^2 = \frac{1}{2}at^2 + a\tau t - a\tau^2 + s_0.$$

***

8. - *Determinare l'equazione del moto armonico di pulsazione* ω, *sapendo che la sua ascissa iniziale è* s_0, *la sua velocità iniziale* v_0.

Sia (C-I 9):

$$s = C\cos(\omega t + \gamma).$$

Occorre determinare C e γ. Si avrà:

$$s_0 = C\cos\gamma$$
$$v_0 = -\omega C\,\mathrm{sen}\,\gamma.$$

Quadrando e sommando queste due equazioni dopo aver diviso la seconda per ω si ha

$$C = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + s_0^2} \tag{5}$$

$$\cos\gamma = \frac{s_0}{C} = \frac{s_0\omega}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 s_0^2}}, \qquad \mathrm{sen}\,\gamma = \frac{-v_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 s_0^2}}. \tag{6}$$

Se s_0 e v_0 fossero i valori delle velocità e dello spazio all'istante $t = \tau$ si avrebbe:

$$s = C\cos[\omega(t-\tau) + \gamma]$$

con i valori di C e γ definiti da (5) e (6).

***

9. - *Determinare velocità ed accelerazione del moto rettilineo rappresentato dall'equazione:*

$$s = ut + C\cos\omega t - C,$$

dove u *e* C *sono costanti.*

La velocità v e l'accelerazione a valgono:

$$v = \frac{ds}{dt} = u - \omega C\,\mathrm{sen}\,\omega t, \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 C\cos\omega t.$$

Si ha anche:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2(s - ut + C),$$

cioè il moto soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = \omega^2 ut - \omega^2 C.$$

Questo ed altri moti verranno studiati più innanzi.

***

10. - *Calcolare velocità ed accelerazione del moto rettilineo rappresentato dall'equazione:*

$$s = kt\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

con k *e* ω *costanti. Studiarne poi le proprietà tracciandone il diagramma orario.*

Si ha:

$$v = \frac{ds}{dt} = k\omega t\cos\omega t + k\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 2k\omega\cos\omega t - k\omega^2 t\,\mathrm{sen}\,\omega t.$$

Per comprendere la natura di questo moto tracciamo il suo diagramma orario (fig. 13). Poiché s è il prodotto della funzione lineare kt per la sinusoide $\mathrm{sen}\,\omega t$ tracciamo le rette kt e $-kt$ e la sinusoide $\mathrm{sen}\,\omega t$; per ottenere il diagramma in discorso bisognerà per ogni ascissa t, moltiplicare la corrispondente ordinata nella sinusoide $\mathrm{sen}\,\omega t$ e della retta kt; si otterrà una curva che deve toccare alternativamente le due rette kt e $-kt$ (negli istanti in cui $\mathrm{sen}\,\omega t$ vale 1 o -1). Il diagramma orario potrebbe intendersi come una sinusoide di ampiezza variabile. Il punto compie perciò oscillazioni intorno all'origine con ampiezza sempre crescente.

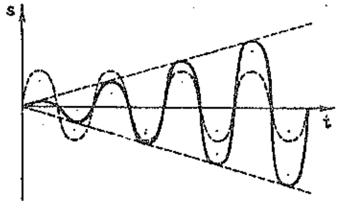

Fig. 13

***

11. - *Un'asta rigida, lunga* l *si muove in modo che il suo estremo A percorra, di moto uniforme con velocità* u

la retta Ox e l'altro estremo B *la retta* Oy *perpendicolare a* Ox. *Trovare l'equazione del moto di* B, *la sua velocità e accelerazione.*

Sia (fig. 14) $OA = x$, $OB = y$; poiché A si muove di moto uniforme rettilineo si potrà scrivere (scelto l'istante iniziale in modo che per $t = 0$ sia $x = 0$, cioè sia nullo lo spazio iniziale; C-I 4) $x = ut$, quindi:

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - u^2 t^2};$$

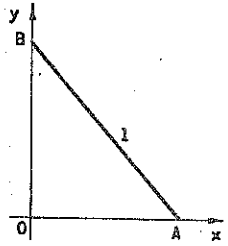

Fig. 14

questa è l'equazione del moto di B in cui lo spazio coincide con y. La velocità e l'accelerazione di B valgono:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{-u^2 t}{\sqrt{l^2 - u^2 t^2}} = \frac{-u \cdot ut}{\sqrt{l^2 - u^2 t^2}} = -u \frac{x}{y} \quad (^1)$$

$$a = \frac{-u^2 \sqrt{l^2 - u^2 t^2} - \dfrac{u^4 t^2}{\sqrt{l^2 - u^2 t^2}}}{l^2 - u^2 t^2} = \frac{-u^2 l^2}{(\sqrt{l^2 - u^2 t^2})^3}.$$

***

12. – *Una pallina* A *(fig. 15) percorre una retta verticale. Essa è attaccata all'estremo di un filo lungo* l *che passa attraverso una piccola carrucola (assimilabile ad un punto* O*) e che ha l'altro estremo* A' *che percorre una retta orizzontale con velocità costante* u. *La distanza della carrucola dalla retta percorsa da* A' *è* b. *Trovare l'equazione del moto di* A, *la sua velocità e accelerazione.*

Indichiamo con r la retta percorsa da A', poniamo nella proiezione B di O sulla retta r, la sua origine. Poiché A' si muove di moto uniforme, se s_0 è lo spazio iniziale (la r si suppone orientata come la velocità u) si ha

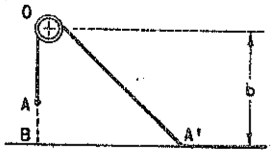

Fig. 15

$$BA' = s_0 + ut.$$

Allora, poiché OB vale b:

---

(1) Questo risultato verrà confermato più innanzi per altra via.

$$OA' = \sqrt{BA'^2 + OB^2} = \sqrt{(s_0 + ut)^2 + b^2},$$

perciò, indicando con s lo spazio percorso da A, qualora O sia l'origine della retta OA, orientata verso il basso, si avrà

$$s = l - \sqrt{(s_0 + ut)^2 + b^2}$$

e perciò:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{u(s_0 + ut)}{\sqrt{(s_0 + ut)^2 + b^2}}.$$

Derivando ancora si trova l'accelerazione di A.

***

13. – *L'estremo* A' *del filo considerato nell'esercizio precedente è unito ad un'asta rigida di lunghezza* m *che ruota, con velocità angolare costante* ω, *intorno ad un punto* Q *sulla retta percorsa da* A. *Trovare l'equazione del moto di* A *e la sua velocità, supposto* QO = h.

Supponiamo (fig. 16) che QA' ruoti nel senso orario, sia θ l'angolo $\widehat{A'QO}$, si scelga l'origine dei tempi in modo che per $t = 0$ sia $\theta = 0$, quindi (C I-13, form. 51 - si ricordi $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e nel nostro caso $\theta_0 = 0$), $\theta = \omega t$:

$$OA' = \sqrt{m^2 + h^2 - 2hm\cos\theta}$$
$$= \sqrt{m^2 + h^2 - 2hm\cos\omega t}.$$

Perciò:

$$s = l - \sqrt{m^2 + h^2 - 2hm\cos\omega t}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-hm\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t}{\sqrt{m^2 + h^2 - 2hm\cos\omega t}}.$$

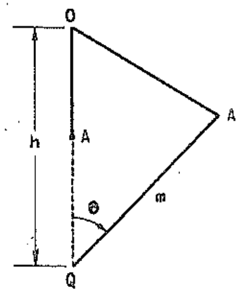

Fig. 16

***

14. – *Una pallina, schematizzabile con un punto* P *scorre su una guida rettilinea* r *sospinta da un'asta che ruota uniformemente, in senso orario, intorno a un suo estremo* Q *distante* h *da* r. *Determinare il moto della pallina.*

Detta O (fig. 17) la proiezione di Q sulla r; l'angolo θ uguale a $\widehat{PQO}$ vale ωt sicché, stabilito su r un sistema di ascisse con origine O e orientate come il moto di P, si ha per lo spazio percorso s:

$$s = h \tan\theta = h \tan\omega t.$$

Quindi velocità e accelerazione di P valgono:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\cos^2\omega t}, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2h\omega^2 \operatorname{sen}\omega t}{\cos^3\omega t}.$$

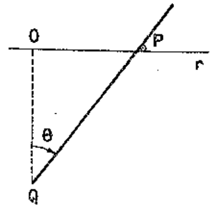

Fig. 17

***

15 - *Studiare il moto dell'estremo della biella di un sistema manovella-biella, quando la manovella ruota uniformemente con velocità angolare* ω. *Dimostrare che se il quadrato del rapporto manovella-biella è trascurabile rispetto all'unità, il moto è armonico.*

Il sistema manovella-biella (fig. 18) è, schematicamente formato da due aste OT e TP collegate in T. OT ruota intorno ad O e P è obbligato a percorrere una retta OA. Sia m la lunghezza della manovella OT, b la lunghezza della biella, α l'angolo $\widehat{TOA}$ di cui ruota la biella uguale a ωt (perché supponiamo che per $t=0$, OT stia su OA).

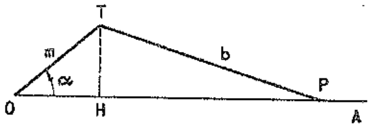

Fig. 18

Poniamo $x = OP$, sia H la proiezione di T su OP; si avrà

$$x = OH + HP = OT\cos\alpha + \sqrt{TP^2 - TH^2}$$

$$x = m\cos\omega t + \sqrt{b^2 - m^2 \operatorname{sen}^2\omega t}.$$

Questa è l'equazione del moto cercato; derivandola una e due volte si calcola, rispettivamente, velocità e accelerazione.

Poiché

$$\sqrt{b^2 - m^2\operatorname{sen}^2\omega t} = b\sqrt{1 - \left(\frac{m\operatorname{sen}\omega t}{b}\right)^2}$$

trascurando i termini dell'ordine di $\left(\frac{m}{b}\right)^2$ [1] si ha que-

[1] in pratica $\frac{b}{m}$ è circa $\frac{1}{7}$ sicché trascurare $\left(\frac{b}{m}\right)^2$ significa trascurare termini dell'ordine di $\frac{1}{49}$.

sto radicale sensibilmente uguale a b, quindi:

$$x = m\cos\omega t + b,$$

cioè il moto di P è armonico intorno al punto di ascissa b.

***

16 - *Un rombo articolato OAPB imperniato in O si muove in modo che A e B descrivono la circonferenza di raggio* $OA = OB = a$, *con la stessa velocità angolare* ω, *ma in senso opposto. Dimostrare che P si muove su una retta di moto armonico, con ampiezza* 2a *(fig. 19).*

Si osservi intanto che la traiettoria di P è la retta OP_0, se P_0 è la posizione iniziale di P. Infatti P deve trovarsi sulla bisettrice di BOA e poiché BOP_0 e P_0OA aumentano in tempi uguali di quantità uguali (le due rette percorrono angoli uguali in senso opposto avendo velocità angolare uguale e di verso contrario) tale bisettrice rimane fissa, sicché il moto di P è rettilineo. Inoltre detto M il punto d'intersezione delle diagonali, del rombo si ha

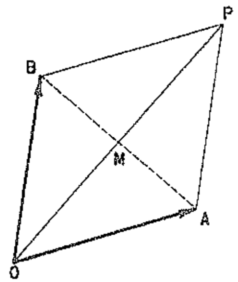

Fig. 19

$$OP = 2OM,$$

e poiché OA percorre un cerchio di raggio a (a è il lato del rombo) di moto uniforme, M sua proiezione su un diametro si muoverà (C I-13) di moto armonico di ampiezza a. Quindi il moto di P è armonico con ampiezza 2a, pulsazione ω, periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

Da questo esercizio si ha che componendo due moti circolari con la stessa velocità angolare, ma in senso opposto, ne risulta un moto armonico.

***

17 - *Se* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *sono le equazioni parametriche di una curva piana ricavare, valendosi della cinematica, l'espressione del raggio di curvatura e dei coseni direttori della tangente e della normale alla curva stessa.*

Se identifichiamo il parametro t col tempo, le equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, rappresentano le equazioni cartesiane del moto di un punto P. Essendo $x'(t)$, $y'(t)$, le componenti (C I-5) della velocità che ha per direzione la tangente alla curva, e $\sqrt{x'^2+y'^2}$ il suo modulo, avremo che i coseni degli angoli α e β che la tangente, ossia la velocità, forma con gli assi sono:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

È da notare che questi sono i coseni direttori di $\vec{v}$ che coincidono con quelli di $\vec{t}$ se il moto è diretto $\left(\frac{ds}{dt}>0\right)$ cioè se il verso positivo della curva coincide con quello in cui si sposta P al crescere di t. Nel caso contrario i coseni direttori sono ancora dati dalle relazioni soprascritte, ma con il segno cambiato.

I coseni degli angoli γ e δ che la normale forma con gli assi x e y sono, come appare dalla fig. 20, $\cos\gamma = \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta$, $\cos\delta = \cos\alpha$, quindi:

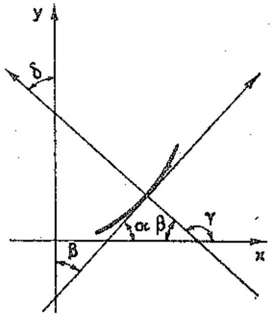

Fig. 20

$$\cos\gamma = \frac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad \cos\delta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Queste formule valgono, a rigore, se la normale si ottiene da t ruotandola in senso antiorario; se il vettore $\vec{n}$, diretto verso il centro di curvatura, ha verso opposto a questa normale esse vanno cambiate di segno.

Per determinare il raggio di curvatura ρ calcoliamo il modulo a della componente dell'accelerazione lungo la normale della curva uguale anche a $\frac{v^2}{\rho}$ (C I-7). Poiché:

$$a = |x''(t)\cos\gamma + y''(t)\cos\delta| = \frac{|x''y' - x'x''|}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

e:

$$v^2 = x'^2 + y'^2$$

si conclude:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|x''y' - x'y''|}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}$$

Infine

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2+y'^2}, \qquad s = \int_0^t \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt + s_0.$$

Nel caso in cui la curva sia data in forma ordinaria $y = f(x)$ ci si riconduce, come è noto, al caso precedente, ponendo $x=t$, $y=f(t)$, quindi:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \qquad \cos\beta = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

$$\cos\gamma = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \qquad \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+f'^2(x)}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{|f''(x)|}{(\sqrt{1+f'^2(x)})^3},$$

formule ben note dalla geometria.

***

18. - *Dato il moto rappresentato dalle equazioni:*

$$x = ut, \qquad y = C\cos(\omega t+\gamma),$$

con u, C, ω, γ costanti, determinare la traiettoria del moto, la sua velocità e accelerazione, le componenti tangenziale e centripeta di quest'ultima, e lo spazio in funzione del tempo.

Eliminando t si ha:

$$y = C\cos\left(\frac{\omega}{u}x+\gamma\right),$$

cioè la traiettoria del moto è una sinusoide. La velocità ha per componenti sugli assi:

$$x'(t) = u, \qquad y'(t) = -\omega C\,\mathrm{sen}(\omega t+\gamma).$$

Il suo modulo vale perciò

$$v = \sqrt{u^2 + C^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\gamma)}.$$

Essendo:

$$x'' = 0, \qquad y'' = -\omega^2 C\cos(\omega t+\gamma)$$

la accelerazione è tutta diretta secondo l'asse delle y. La sua componente tangenziale vale (supposto per brevità $\gamma = 0$):

$$y'' \cos\beta = \frac{y'\,y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{\omega^3 C^2 \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t}{\sqrt{u^2+\omega^2 C^2 \mathrm{sen}^2\,\omega t}}$$

La componente centripeta, che è sempre positiva, è data dal valore assoluto della componente di a normale alla curva, cioè:

$$|y'' \cos\delta| = \frac{|y''x'|}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{|uC\omega^2 \cos\omega t|}{\sqrt{u^2+C^2\omega^2 \mathrm{sen}^2\,\omega t}}.$$

Infine si ha:

$$s = \int_0^t \sqrt{u^2+C^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega t}\,dt + s_0.$$

L'integrale però, salvo casi particolari, non si sa eseguire in termini finiti perché è ellittico.

***

19 - *Un punto P percorre una semicirconferenza di raggio r e centro nell'origine, la sua proiezione sull'asse x si muove di moto uniforme con velocità c* [1]. *Calcolare velocità e accelerazione di P in funzione dell'angolo φ che la retta PO forma con l'asse delle x.*

Essendo:

$$x = ct, \qquad y = \sqrt{r^2-x^2},$$

si ha subito (fig. 21) come equazioni del moto:

$$x = ct, \qquad y = \sqrt{r^2-c^2t^2}.$$

Da queste, col metodo dell'esercizio precedente, si può trovare velocità e accelerazione in funzione del tempo. Se si vuole esprimere però queste grandezze in funzione delle coordinate x, y, di P e di φ si osservi che, essendo $v\,\mathrm{sen}\,\varphi$ la proiezione di $\vec{v}$ lungo l'asse x si avrà:

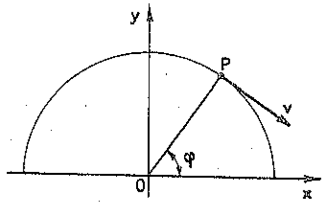

Fig. 21

$$v\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{dx}{dt} = c,$$

quindi:

$$v = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\varphi}.$$

---

[1] Ovviamente il moto di P è il moto dell'intersezione con la semicirconferenza di una retta che si muove, con traslazione uniforme di velocità c, rimanendo parallela all'asse y.

La proiezione di v lungo l'asse y, v_y vale:

$$v_y = -\frac{c}{\mathrm{sen}\,\varphi}\cos\varphi = -c\cot\varphi.$$

Poiché $a_x = 0$ si ha che $\vec{a}$ è diretta secondo l'asse y e vale $a_y j$. Si ha così:

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y = \frac{c}{\mathrm{sen}^2\,\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ora, essendo:

$$\varphi = \arccos\frac{x}{r} = \arccos\frac{ct}{r}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2t^2}{r^2}}}\,\frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{r^2-c^2t^2}} = \frac{c}{y} = \frac{c}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi},$$

quindi:

$$a_y = \frac{c^2}{r\,\mathrm{sen}^3\,\varphi}.$$

***

20 - *Un punto P si muove sulla parabola* $y = kx^2$, *la sua proiezione sull'asse x si muove di moto uniforme con velocità c. Calcolare la velocità e l'accelerazione di P in funzione di t e delle sue coordinate. Generalizzare il risultato quando il punto si muove sulla curva* $y = f(x)$.

Poiché $x = ct$ [1], $y = kc^2t^2$, si hanno così le equazioni cartesiane del moto che derivate una e due volte danno velocità e accelerazione in funzione del tempo. Per ottenere però più rapidamente queste grandezze e in funzione di x e y basta osservare che:

$$v_x = c, \qquad v_y = 2kx\frac{dx}{dt} = 2kcx,$$

$$a_x = 0, \qquad a_y = 2kc\frac{dx}{dt} = 2kc^2.$$

Nel caso in cui il punto si muova sulla curva $y = f(x)$ si ha:

$$v_x = c, \qquad v_y = f'(x)\frac{dx}{dt} = cf'(x)$$

$$a_x = 0, \qquad a_y = c^2 f''(x),$$

---

[1] Supponiamo che all'istante $t = 0$ il punto sia nell'origine.

e le equazioni del moto sono:

$$x = ct + c_0, \qquad y = f(ct + x_0).$$

***

21. - *Il punto* P *si muove sulla parabola* $y = kx^2$ *e la sua proiezione sull'asse* x *si muove di moto armonico, cioè con la legge* $x = C\cos(\omega t + \gamma)$. *Trovare velocità e accelerazione di* P.

Le equazioni parametriche del moto sono:

$$x = C\cos(\omega t+\gamma), \qquad y = kC^2\cos^2(\omega t+\gamma) = \frac{kC^2}{2} + \frac{kC^2}{2}\cos(2\omega t+2\gamma)$$

quindi:

$$v_x = -\omega C\,\mathrm{sen}(\omega t+\gamma), \qquad v_y = -kC^2\omega\,\mathrm{sen}(2\omega t+2\gamma)$$

$$a_x = -\omega^2 C\cos(\omega t+\gamma), \qquad a_y = -2kC^2\omega^2\cos(2\omega t+2\gamma).$$

In modo analogo si tratta il caso in cui il punto P si muove sulla curva $y = f(x)$, perché le equazioni cartesiane sono:

$$x = C\cos(\omega t+\gamma), \qquad y = f(C\cos(\omega t+\gamma)).$$

***

22. - *Un punto si muove con velocità costante* c *sulla parabola* $y = kx^2$. - *Trovare l'accelerazione del punto, in particolare per* $x = 0$, *e le componenti della velocità e accelerazione.*

L'accelerazione a è tutta centripeta e vale $\frac{v^2}{\rho}$. Nel nostro caso (cfr. es. 17):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2k}{(1+4k^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quindi:

$$a = \frac{2kc^2}{(1+4k^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e per $x = 0$ si ha:

$$a = 2kc^2.$$

Per le componenti della velocità ricordando le formule di $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ (es. 17) si ha:

$$v_x = c\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{1+4k^2x^2}}, \qquad v_y = \frac{2kcx}{\sqrt{1+4k^2x^2}};$$

si ha poi, ricordando le formule di $\cos\gamma$, $\cos\delta$ dello stesso esercizio:

$$a_x = a\cos\gamma = -\frac{4k^2c^2x}{(1+4k^2x^2)^2}, \qquad a_y = a\cos\delta = \frac{2kc^2}{(1+4k^2x^2)^2}.$$

***

23. - *Un punto si muove su un cerchio di moto armonico* $s = C\cos(\omega t+\gamma)$. *Calcolare velocità e accelerazione.*

Sia (fig. 22) O il centro del cerchio, O_1 l'origine degli archi sul cerchio, la velocità sarà:

$$\frac{ds}{dt} = -C\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\gamma)$$

e avrà la direzione della tangente $\vec{t}$ al cerchio. L'accelerazione avrà due componenti, la tangenziale uguale a:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 C\,\mathrm{sen}(\omega t+\gamma),$$

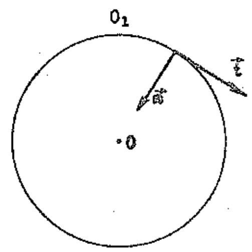

Fig. 22

e la centripeta, diretta lungo il raggio verso il centro cioè come $\vec{n}$, uguale in modulo a:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2C^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\gamma)}{R}$$

dove R è, ovviamente, il raggio del cerchio.

***

24. - *Una locomotiva percorre un tratto curvo lungo* 2 km *con raggio di curvatura* 0,5 km, *aumenta in quel tratto la sua velocità con accelerazione costante, da* 89 *a* 91 km *all'ora. Trovare l'accelerazione della locomotiva nell'istante finale.*

Essendo il moto naturalmente accelerato, indicando con a l'accelerazione tangenziale, prendendo come istante iniziale quello in cui il treno comincia il tratto curvo, con t il tempo necessario per percorrere questo tratto, si ha:

$$91 = 89 + a_t t$$

$$2 = \frac{1}{2} a_t t^2 + 89\, t,$$

da cui, ricavando $a_t t$ dalla prima e sostituendo nella seconda:

$$a_t t = 2, \qquad 2 = t + 89\, t, \qquad t = \frac{2}{90} \text{ ora} = \frac{1}{45} \text{ ora}$$

$$a_t = 90 \frac{\text{km}}{\text{ora}^2} = \frac{90\,000}{(3600)^2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Poiché il moto è curvilineo, l'accelerazione centripeta è diversa da zero e vale:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{91^2}{0{,}5} \frac{\text{km}}{\text{ora}^2} = 17\,962 \frac{\text{km}}{\text{ora}^2}.$$

***

25. - *Un punto si muove di moto uniforme su una catenaria di equazione:*

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) - b$$

(b *costante*). *Scrivere le equazioni cartesiane del moto del punto.*

Se il moto è uniforme e c è la sua velocità:

$$s = ct.$$

Cerchiamo di procurarci x in funzione di s. Essendo:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{e^{2\frac{x}{b}} + e^{-2\frac{x}{b}} - 2}{4}}\, dx = \frac{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}{2}\, dx = \frac{y+b}{b}\, dx.$$

Integrando e supposto l'origine degli archi nel punto di ascissa zero si ha:

$$s = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right),$$

da cui si può ricavare x in funzione di s.

A questo scopo si ponga, provvisoriamente, $e^{\frac{x}{b}} = u$, quindi:

$$s = \frac{b}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

$$bu^2 - 2su - b = 0$$

$$u = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + b^2}}{b}.$$

Poiché u è un numero positivo occorre scegliere la radice positiva dell'equazione di secondo grado ora risolta.

Si ha così:

$$e^{\frac{x}{b}} = \frac{s + \sqrt{s^2 + b^2}}{b}, \qquad e^{-\frac{x}{b}} = \frac{b}{s + \sqrt{s^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{s^2 + b^2} - s}{b},$$

quindi:

$$x = b \log \frac{s + \sqrt{s^2 + b^2}}{b} = b \log \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 + b^2}}{b}$$

$$y = \sqrt{s^2 + b^2} - b = \sqrt{c^2 t^2 + b^2} - b.$$

***

26. - *Calcolare le componenti sugli assi della velocità e dell'accelerazione nel moto dell'esercizio precedente.*

Le componenti della velocità sono:

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{2c}{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}} = \frac{bc}{y+b}, \qquad v_y = \frac{c\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c\,\frac{e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}}{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}$$

L'accelerazione, tutta centripeta, vale, in valore assoluto:

$$a = \frac{c^2 y''}{\left(\sqrt{1 + y'^2}\right)^3} = \frac{4c^2}{b} \frac{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}{\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right)^3} = \frac{c^2 b}{(y+b)^2},$$

perciò:

$$a_x = \frac{-c^2 y' b^2}{(y+b)^3}, \qquad a_y = \frac{c^2 b^2}{(y+b)^3}.$$

***

27. - *Se il punto* A *di contatto col suolo della ruota anteriore di una bicicletta percorre una retta, trovare la traiettoria del punto di contatto* P *della ruota posteriore.*

Si faccia coincidere con l'asse x la traiettoria di A e supponiamo, per fissare le idee, che P non si trovi inizialmente sull'asse x. Ora la distanza l di P da A (fig. 23) rimane costante, inoltre la direzione della velocità di P è sempre diretta come PA e orientata da P verso A; infatti questa velocità si trova nel piano della ruota posteriore, piano che passa per A. Dette x e y le coordinate di P, $y=y(x)$ l'equazione della sua traiettoria, si ha allora che $\frac{dy}{dx}$ uguale alla tangente dell'angolo fra v e la parte positiva dell'asse x vale $-\frac{y}{\sqrt{l^2-y^2}}$.

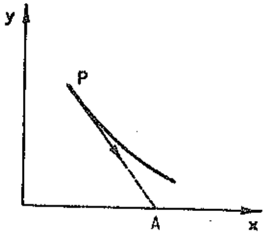

Fig. 23

Si ha così:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{l^2-y^2}},$$

equazione valida anche se $y=0$ cioè se P è sulla retta percorsa da A. Separando le variabili si ha:

$$dx = -\frac{\sqrt{l^2-y^2}}{y}\,dy$$

e integrando:

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{l^2-y^2}}{1-\sqrt{l^2-y^2}} - \sqrt{l^2-y^2}+C,$$

dove C è una costante che si determina con le condizioni $y=a$ per $x=0$ $(a<l)$. Si ha allora:

$$C = -\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{l^2-a^2}}{1-\sqrt{l^2-a^2}} + \sqrt{l^2-a^2},$$

quindi:

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{(1+\sqrt{l^2-y^2})\,(1-\sqrt{l^2-a^2})}{(1-\sqrt{l^2-y^2})\,(1+\sqrt{l^2-a^2})} - \sqrt{l^2-y^2}+\sqrt{l^2-a^2}.$$

Questa è l'equazione cercata in coordinate x, y. Essa è una curva chiamata *trattrice*. È facile vedere che se $y\to 0$, $x\to\infty$, quindi solo a distanza infinita P giunge sulla retta che percorre A. Se inizialmente P è sull'asse x, cioè

per $a=0$, $y=0$, la soluzione di (1) soddisfacente a queste condizioni è $y=0$, cioè P percorre la stessa retta di A, come è ovvio.

***

28. - *Un punto Q parte dall'origine e si muove sull'asse y di moto uniforme con velocità v. Un punto P parte da un punto P_0 dell'asse x di ascissa b e si muove con velocità u costante in modulo, ma sempre diretta verso Q (problema di inseguimento). Trovare la traiettoria di P.*

Dette x e y le coordinate di P, posto $\widehat{PQO}$ uguale ad α, essendo OQ uguale a vt, si ha (figura 24):

$$\cot\alpha = \frac{vt-y}{x},$$

e detto β l'angolo che la tangente in P forma con l'asse x:

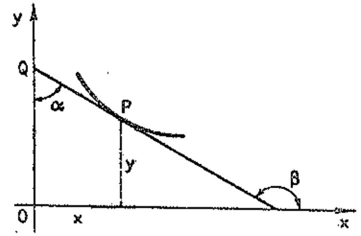

Fig. 24

$$\operatorname{tg}\beta = -\cot\alpha = \frac{dy}{dx};$$

quindi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{vt-y}{x}.$$

Si ha poi, se s è l'arco sulla traiettoria di P, con origine in P_0:

$$s = ut, \qquad t = \frac{s}{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v}{u}\frac{s}{x}+\frac{y}{x},$$

da cui:

$$x\frac{dy}{dx} = -\frac{v}{u}s+y,$$

e derivando:

$$\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{v}{u}\frac{ds}{dx}+\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{v}{u}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Posto:

$$u_1 = \frac{dy}{dx}, \qquad m = \frac{v}{u},$$

si ha, integrando:

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{m}{x}\sqrt{1+u_1^2}, \qquad \frac{du_1}{\sqrt{1+u_1^2}} = -\frac{m\,dx}{x},$$

$$\log\left(u_1 + \sqrt{1+u_1^2}\right) = -m\log x + \log c,$$

dove c è una costante di integrazione. Quindi:

$$u_1 + \sqrt{1+u_1^2} = \frac{c}{x^m},$$

ed essendo:

$$\sqrt{1+u_1^2} - u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}+u_1} = \frac{1}{c}x^m,$$

si ottiene:

$$u_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x^m} - \frac{x^m}{c}\right)$$

Integrando ancora, se $m \neq 1$:

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{c}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{x^{m+1}}{c(m+1)}\right) + a,$$

invece se $m = 1$:

$$y = \frac{1}{2}\left(c\log x - \frac{1}{c}\frac{x^2}{2}\right) + a,$$

dove a è una costante che, assieme a c, si determina con la condizione che, per $t=0$, la curva passi per il punto P_0 di coordinate b e 0 e in questo punto sia $\frac{dy}{dx}=0$, perché la velocità di P è diretta, per $t=0$, verso O. Si ha:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{(m-1)\,b^{m-1}} + \frac{b^{m+1}}{c\,(m+1)}\right) + a = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b^m} - \frac{b^m}{c}\right) = 0,$$

da cui:

$$c^2 = b^{2m}, \qquad c = -b^m;$$

c va preso col segno $-$, perché per $x>0$, y deve essere positivo, perché il moto del punto avviene nel primo quadrante. Quindi:

$$a = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{m-1} + \frac{b}{m+1}\right) = -\frac{m}{m^2-1}\,b.$$

Se $m<1$, $v<u$, si ha che, per $x \to 0$, y rimane finita e assume il valore a, cioè la curva taglia l'asse delle y nel punto $y=a$ dove incontra Q.

Se $m \geqslant 1$ per $x \to 0$, $y \to \infty$ cioè Q non raggiunge P in un tempo finito.

***

29. – *In dinamica si dimostra che una bomba, lanciata da un aeroplano in moto (in direzione orizzontale) con velocità v_0, si muove, se si trascura la resistenza dell'aria, secondo le equazioni:*

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2,$$

dove g è l'accelerazione di gravità ed essendo il sistema di assi x e y con origine nel punto dove si trova l'aeroplano al momento in cui lascia cadere la bomba, l'asse x orizzontale nella direzione del moto dell'aereo, l'asse y verticale e diretto verso il basso. Se h è l'altezza dell'aereo dal suolo, trovare a quale distanza, in direzione orizzontale dall'aereo stesso, cade la bomba (fig. 25).

Eliminando t dalle due equazioni, si ha la traiettoria del proiettile, cioè:

$$t = \frac{x}{v_0}, \qquad y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}.$$

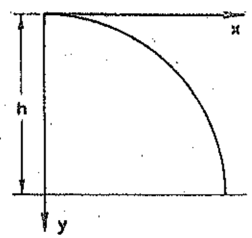

Fig. 25

La bomba raggiungerà il suolo quando $y=h$, cioè per quel valore x_1 di x tale che:

$$\frac{1}{2}g\frac{x_1^2}{v_0^2} = h,$$

ossia:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2v_0^2h}{g}}$$

e nell'istante t_1 per cui:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Perciò un aeroplano per colpire un bersaglio dovrebbe sganciare (astraendo dalla resistenza dell'aria) ad una distanza (in direzione orizzontale) dal bersaglio:

$$\sqrt{\frac{2\,v_0^2\,h}{g}}\,.$$

Così, se $h = 1$ km, $v_0 = 100$ m/sec, si ha:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 10^4\ 10^3}{g}} \cong 1{,}5 \text{ km}.$$

***

30. - *Un punto P si muove sulla spirale logaritmica di equazione, in coordinate polari,* $\rho = Ke^{m\theta}$ *(K e m costanti) con velocità angolare ω costante rispetto al polo. Trovare le componenti della velocità e accelerazione del moto in coordinate polari in funzione di ρ e θ e generalizzare la questione supponendo che la traiettoria del punto abbia equazione $\rho = f(\theta)$. Si osservi che questo moto si ha per un piolo spinto in un solco a forma di spirale [o una curva $\rho = f(\theta)$] da un regolo che ruota intorno all'origine con velocità angolare costante.*

Si ha (C-I 15):

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega K\, me^{m\theta} = \omega m \rho$$

$$v_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt} = \omega\rho$$

$$a_\rho = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = \frac{dv_\rho}{dt} - \omega^2\rho = \omega^2(m^2-1)\rho$$

$$a_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{\omega}{\rho}\frac{d\,(K^2e^{2m\theta})}{dt} = \frac{\omega}{\rho}2K^2me^{2m\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\omega^2 m\rho^2}{\rho} = 2\omega^2 m\rho.$$

Quindi velocità e accelerazione sono proporzionali al raggio vettore. Si può esprimere velocità e accelerazione in funzione del tempo osservando che dalla costanza di $\frac{d\theta}{dt}$ si ha $\theta = \omega t + \theta_0$ se θ_0 è l'angolo che il raggio vettore $P - O$ forma con l'asse polare all'istante $t = 0$.

Per generalizzare il problema basta osservare che:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \omega\frac{d\rho}{d\theta}$$

$$v_\theta = \omega\rho$$

$$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - \rho\right)$$

$$a_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\omega)}{dt} = 2\omega\frac{d\rho}{dt} = 2\omega^2\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Così ad esempio se il punto percorre una circonferenza di diametro d e il polo su un punto di essa (fig. 26):

$$\rho = d\,|\cos\theta|,$$

e sostituendo nelle formule soprascritte si ha subito la velocità e l'accelerazione.

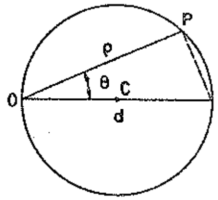

Fig. 26

***

31. - *Un punto si muove con velocità areolare costante e uguale a $\frac{c}{2}$ sulla traiettoria di equazione (in coordinate polari):*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos n\theta}$$

dove p, e, n sono costanti. Trovare l'accelerazione del moto.

L'accelerazione in questo caso è tutta radiale. Quindi si può applicare la formula di Binet (C. I-16):

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}\right) = -\frac{c^2}{\rho^2 p}\left(1 - n^2 e\cos n\theta + e\cos n\theta\right),$$

ed essendo:

$$e\cos n\theta = \frac{p-\rho}{\rho},$$

$$a_\rho = \frac{-c^2}{\rho^2 p}\left(1 + (1-n^2)\frac{p-\rho}{\rho}\right) = \frac{-c^2}{p\rho^3}\left((1-n^2)\,p + n^2\rho\right).$$

Se $n = 1$, cioè la traiettoria si riduce ad una conica si ha:

$$a_\rho = -\frac{c^2}{p\rho^2},$$

cioè a_ρ è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da O.

***

32. - *Un punto si muove di moto naturalmente accelerato su un piano AB inclinato con inclinazione* α. *Trovare la velocità areale e angolare, rispetto alla proiezione O di A sull'orizzontale per B (fig. 27).*

Se $b = g \operatorname{sen}\alpha$, è l'accelerazione del punto, il segmento AP uguale allo spazio percorso nel tempo t sarà (esercizio 2):

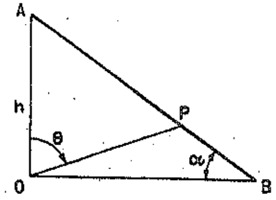

Fig. 27

$$s = \frac{1}{2} b t^2 .$$

Ora, l'area APO vale:

$$S = \frac{1}{2} AO \cdot AP \operatorname{sen}(90 - \alpha),$$

ossia:

$$S = \frac{hs}{2} \cos\alpha$$

essendo h la distanza AO. Ora, posto un sistema di coordinate polari con polo O, asse polare OA e orientato nel verso del moto di P, abbiamo, per la velocità areolare, l'espressione:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2}\cos\alpha \frac{ds}{dt} = \frac{hbt}{2}\cos\alpha,$$

e per la velocità angolare:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{hbt\cos\alpha}{\rho^2}.$$

Ora, per il teorema di Carnot:

$$\rho^2 = h^2 + s^2 - 2hs \operatorname{sen}\alpha ;$$

quindi la velocità angolare vale:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{bht\cos\alpha}{h^2 + \frac{b^2 t^4}{4} - hbt^2 \operatorname{sen}\alpha}$$

33. - *Nel meccanismo rappresentato dalla fig. 28 il cilindro BC è girevole intorno al perno B, la manovella OA, lunga r, si muove intorno ad O in senso destrogiro con velocità angolare costante* ω. *Determinare la velocità v dello stantuffo C, e la velocità angolare* Ω *del cilindro.*

Posto in B l'origine di un sistema di coordinate polari di asse BO sia $BOA = \varphi$. Supponiamo che la manovella inizi il suo moto quando si trova sulla retta OB. Sarà allora $\varphi = \omega t$ quindi se $h = BO$, $AO = r$, avremo:

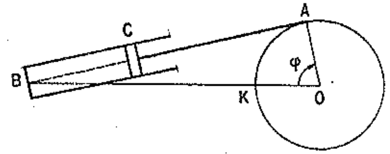

Fig. 28

$$AB^2 = r^2 + h^2 - 2hr\cos\varphi.$$

Perciò la ρ di C vale:

$$\rho = AB - AC = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\omega t} - m,$$

essendo $m = AC$. Quindi:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{hr\omega \operatorname{sen}\omega t}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\omega t}}.$$

Per trovare la velocità angolare di AB calcoliamo la velocità areolare di A osservando che questo punto percorre il settore BKA (K intersezione di BO col cerchio) la cui area vale:

$$S = \frac{1}{2} hr \operatorname{sen}\varphi - \frac{r^2}{2}\varphi = \frac{1}{2} hr \operatorname{sen}\omega t - \frac{r^2}{2}\omega t,$$

quindi:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} hr\omega\cos\omega t - \frac{r^2}{2}\omega.$$

Ora, ricordando che $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$ vale la velocità areolare divisa per il quadrato della distanza di A dal polo, si ha:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{hr\cos\varphi - r^2}{2BA^2}\omega = \frac{(hr\cos\varphi - r^2)\,\omega}{2(r^2 + h^2 - 2hr\cos\varphi)}.$$

***

34. - *Un punto si muove di moto elicoidale uniforme con velocità v su un'elica cilindrica di raggio r e passo p. Trovare l'accelerazione e il raggio di curvatura dell'elica.*

Le equazioni del moto saranno:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = h\theta, \qquad \theta = \theta(t)$$

ora $h = \dfrac{p}{2\pi}$ (perché quando θ aumenta di 2π, z aumenta del passo); $\theta = \omega t + \theta_0$ perché il moto è uniforme. Quindi per le componenti della velocità:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad v_y = r\omega\cos\theta, \qquad v_z = h\omega = \frac{p}{2\pi}\,\omega .$$

Si ha perciò:

$$v = \sqrt{r^2\omega^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\,\omega^2}$$

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{r^2 + \dfrac{p^2}{4\pi^2}}} .$$

L'accelerazione vale poi:

$$a_x = -\omega^2 r\cos\theta, \qquad a_y = -\omega^2 r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad a_z = 0,$$

quindi:

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2 r}{r^2 + \dfrac{p^2}{4\pi^2}} .$$

D'altra parte, poiché l'accelerazione è tutta centripeta, si ha:

$$a = \frac{v^2}{\rho},$$

quindi il raggio dell'elica vale:

$$\rho = \frac{4\pi^2 r^2 + p^2}{4\pi^2 r} .$$

***

35. - *Dimostrare che il moto rappresentato dalle equazioni*

$$x = \frac{1}{2}\,r\,\mathrm{sen}\,2\omega t, \qquad y = r\,\mathrm{sen}^2\,\omega t, \qquad z = r\cos\omega t,$$

ha per traiettoria la finestra di Viviani [intersezione

della sfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$ *con il cilindro* $x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$] *e calcolarne velocità e accelerazione.*

Quadrando e sommando le equazioni del moto si ha:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\mathrm{sen}^2\omega t\cos^2\omega t + \mathrm{sen}^4\omega t + \cos^2\omega t) =$$
$$= r^2(\mathrm{sen}^2\omega t\,[\cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t] + \cos^2\omega t) = r^2 .$$

Si ha poi, sempre dall'equazione del moto:

$$x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}\,\mathrm{sen}^2\,2\omega t + \frac{r^2}{4}\cos^2 2\omega t = \frac{r^2}{4},$$

quindi il punto si trova sulla sfera e sul cilindro che determinano la curva di Viviani.

Le componenti della velocità e accelerazione sono:

$$v_x = r\omega\cos 2\omega t, \qquad v_y = 2r\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega t, \qquad v_z = -\omega r\,\mathrm{sen}\,\omega t$$
$$a_x = -2\omega^2 r\,\mathrm{sen}\,2\omega t, \qquad a_y = 2\omega^2 r\cos 2\omega t, \qquad a_z = -\omega^2 r\cos\omega t$$

Ossia:

$$a_x = -(2\omega)^2 x, \qquad a_y = 2\omega v_x, \qquad a_z = -\omega^2 z .$$

CAPITOLO III

Sul moto dei corpi rigidi e sui moti relativi

1. - *Un punto di un corpo rotante che dista dall'asse di rotazione di* $r = 20$ cm, *ha velocità scalare* v *di* 3 m/sec. *Trovare la velocità* v_1 *di un punto distante* $r_1 = 30$ cm.

Poiché le velocità dei punti di un corpo rigido stanno fra loro come le distanze dall'asse (basta a questo scopo dividere membro a membro le formule $v = \omega r$, $v_1 = \omega r_1$ di C-II 24) si ha:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r}, \qquad v_1 = \frac{30}{20}\,3\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} = \frac{9}{2}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

***

2. - *Trovare, per il corpo ruotante dell'esercizio precedente, il modulo della velocità angolare e (supposto il moto uniforme) il numero dei giri per secondo.*

Essendo $v = \omega r$ si ha:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3}{0{,}2}\ \text{sec}^{-1}.$$

Poi, dalla formula (C I-13):

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

ricordando $\frac{1}{T}$ uguale al numero dei giri n per secondo:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{20\cdot 2\pi}\ \text{giri al secondo} = \frac{9}{2\pi}\ \text{giri al minuto.}$$

***

3. - *Un disco di 5 cm di raggio, ruota uniformemente, nel senso della freccia (fig. 29), intorno al suo asse normale al piano del disegno, compiendo 90 giri al minuto primo. Calcolare in grandezza, direzione e verso il vettore* ω, *velocità angolare, e, pure in grandezza, direzione e verso, la velocità di un punto* P *della periferia del disco.*

Il modulo di $\vec{\omega}$ è $\frac{2\pi}{T} = 2\pi n = 2\pi\,\frac{90}{60} = 3\pi\ \text{sec}^{-1} = \sim 9{,}42\ \text{sec}^{-1}$.

La sua direzione è lungo l'asse del disco, cioè normale al piano del disegno; il senso è verso il lettore, che così vede la rotazione andare da destra verso sinistra.

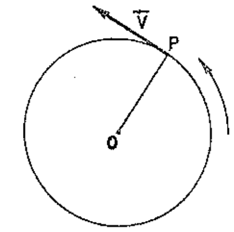

Fig. 29

La velocità di P sarà, in modulo, ωr, cioè $9{,}42 \times 5\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 47{,}10\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Se O è la proiezione di P sull'asse, questa velocità, normale a PO, è diretta nel verso di rotazione del disco.

***

4. - *Trovare, in grandezza e direzione, la velocità e l'accelerazione che un punto* P *della terra, alla latitudine di 45°, ha per effetto alla rotazione terrestre, sapendo che il raggio* R *della terra vale* 6374 km.

Poiché (C-II 24) $\omega = 0{,}0000729\ \text{sec}^{-1}$ e la distanza r di un punto a latitudine 45° vale (fig. 30)

$$r = R\cos 45° = 6374\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 6374 \times 0{,}7 = 4461{,}8\ \text{km},$$

quindi

$$v = 0{,}0000729 \times 4461{,}8 = 0{,}32\,\frac{\text{km}}{\text{sec}} = 320\,\frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

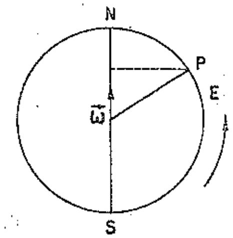

Fig. 30

la direzione della velocità è poi tangente al parallelo nel punto C considerato, il verso da ovest ad est.

L'accelerazione è tutta centripeta e vale $\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

***

5. - *L'angolo θ di rotazione di un corpo con un asse fisso varia secondo la legge*

$$\theta = C \operatorname{sen} pt,$$

dove C *e* p *sono costanti* (1). *Trovare velocità angolare, velocità e accelerazione di un punto distante* r *dall'asse.*

Si ha:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = Cp \cos pt.$$

La velocità di un punto P distante r dall'asse è, in grandezza, $rpC \cos pt$ la direzione è, al solito, normale alla retta PO (O proiezione di P sull'asse). Per trovare l'accelerazione si noti che P percorre una circonferenza di raggio r con velocità variabile in grandezza e direzione. Quindi avrà accelerazione tangenziale uguale, in grandezza a $-p^2 rC \operatorname{sen} pt$, centripeta uguale a $rp^2 C^2 \cos^2 pt$.

***

6. - *Un motore elettrico compie 1800 giri per minuto, all'istante* $t = 0$ *si toglie la corrente che lo alimenta, sicché dopo 6 sec. si ferma. Supposto che la derivata della velocità angolare (accelerazione angolare) sia costante, trovare come varia la velocità angolare, la velocità e l'accelerazione di un punto distante* r *dall'asse del motore stesso.*

Sia $-b$ la derivata di ω ($b > 0$ perché il motore va rallentando) sarà (2):

$$\omega = \omega_0 - bt.$$

Nel nostro caso $\omega_0 = \dfrac{2\pi \cdot 1800}{60} = 60\pi \ \sec^{-1}$ e poiché per $t = 6$ il motore è fermo si ha:

$$0 = 60\pi - b6, \qquad b = 10\pi,$$

quindi:

$$\omega = 60\pi - 10\pi t.$$

(1) Un moto di questo genere si ha per un disco posto all'estremo di una sbarra che compie oscillazioni di torsione.

(2) ω_0 è la velocità angolare ω all'istante $t = 0$.

La velocità, all'istante t, di un punto distante r vale:

$$v = \omega r = (60\pi - 10\pi t) r;$$

le accelerazioni tangenziale e centrifuga sono:

$$a = -10\pi r, \qquad a = \omega^2 r = (60\pi - 10\pi t)^2 r.$$

***

7. - *Un peso è attaccato all'estremo di una corda di diametro* d *che viene avvolta su un rocchetto il cui diametro vale* $2r_0$. *Il rocchetto ruota con velocità angolare costante* ω. *Trovare la velocità del peso all'istante* t *trascurando il piccolo moto laterale della corda (fig. 31).*

La velocità del peso sarà, in grandezza, quella dell'ultimo avvolgimento della corda: uguale a ωr se r è la distanza dell'avvolgimento dal centro. Ora, r vale r_0 sommato con il prodotto fra d e il numero di avvolgimenti all'istante t, cioè $\dfrac{\omega d}{2\pi} t$. Quindi:

$$r = r_0 + \frac{\omega d}{2\pi} t$$

$$v = \omega r_0 + \frac{\omega^2 d}{2\pi} t.$$

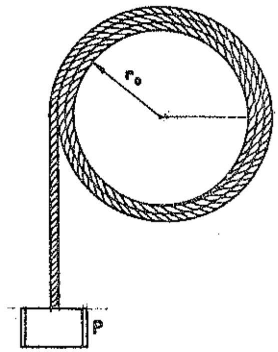

Fig. 31

***

8. - *Un'asta rigida è fissata in un punto* A *e si muove perché in una sua scanalatura scorre un chiodo* B *che, con moto uniforme di velocità* $\vec{u}$, *percorre la retta* r *distante* d *da* A. *Trovare la velocità angolare dell'asta.*

Posto l'origine del tempo all'istante in cui B si trova nella proiezione O di A su r, si ha $OB = ut$, quindi:

$$\operatorname{tag} \theta = \frac{ut}{d}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tag} \frac{ut}{d},$$

e derivando:

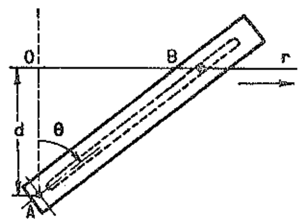

Fig. 32

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dfrac{u}{d}}{1 + \dfrac{u^2t^2}{d^2}} .$$

Il vettore velocità angolare è poi normale al piano di r e dell'asse e nel caso della fig. 32 è diretto verso l'interno del disegno.

***

9. - *Una lamina rigida (came) ruota uniformemente nel suo piano intorno ad un punto fisso O. Un'asta rigida (punteria) scorre lungo un asse passante per O appoggiandosi con un estremo al contorno della lamina. Determinare il moto dell'asta (fig. 33).*

Sia $\rho = \rho(\theta)$ l'equazione, in coordinate polari, del contorno della lamina qualora l'asse polare passi per O e sia collegato rigidamente con la lamina stessa. Il moto dell'asta è traslatorio, quindi per determinarlo basta conoscere il moto di un suo punto, cioè basta conoscere, ad esempio, in ogni istante, l'ascissa x del punto di contatto P dell'asta con la lamina (l'origine dell'ascissa si suppone in O ed orientata da O verso P). Ora si ha $x = \rho(\theta_0)$ dove θ_0 è l'anomalia di P. Poiché la lamina ruota con velocità angolare ω risulta $\theta_0 = \omega t$ (si noti che il verso di rotazione della lamina si suppone contrario al verso positivo delle coordinate polari). Quindi:

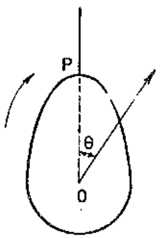

Fig. 33

$$x = \rho(\omega t) .$$

Ad esempio, se la lamina è un cerchio di diametro D ruotante intorno ad un punto del suo contorno, si ha (Cap. II, esercizio 30) $\rho = D|\cos\theta|$, onde:

$$x = D|\cos\omega t| ;$$

il moto dell'asta può perciò considerarsi armonico.

***

10. - *Il cilindro di una vite ha raggio r, la sua filettatura è inclinata di α rispetto al suo asse; un punto della periferia della vite si muove con velocità v. Trovare le caratteristiche del moto elicoidale della vite, cioè la velocità di traslazione v_0 e la velocità angolare ω di rotazione.*

v_0 è la componente di $\vec{v}$ lungo l'asse della vite, cioè $v\cos\alpha$. Si ha poi ωr uguale alla componente normale all'asse della velocità v, che è $v \operatorname{sen}\alpha$. Quindi:

$$\omega = \frac{v \operatorname{sen}\alpha}{r} ;$$

le direzioni di $\vec{v_0}$ e $\vec{\omega}$ sono poi quelle dell'asse della vite.

***

11. - *Indicato con O, x_1, y_1, z_1 il sistema di coordinate connesso con un corpo rigido con un punto fisso in O, dimostrare che la componente lungo l'asse y_1 della velocità del punto P_x appartenente all'asse x_1 e con $x_1 = h$ è uguale e di segno contrario alla componente lungo l'asse x_1 della velocità del punto P_y appartenente all'asse y_1 e con $y_1 = h$.*

Si ha infatti

$$P_x - O = h\vec{i}_1 , \qquad P_y - O = h\vec{j}_1 ,$$

e ricordando le formule di Poisson (C II-37) e le formule I-20:

$$\frac{dP_x}{dt}\cdot\vec{j}_1 = h\frac{d\vec{i}_1}{dt}\cdot\vec{j}_1 = h\vec{\omega}\times\vec{i}_1\cdot\vec{j}_1 = h\vec{\omega}\cdot\vec{k}_1$$

$$\frac{dP_y}{dt}\cdot\vec{i}_1 = h\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{i}_1 = h\vec{\omega}\times\vec{j}_1\cdot\vec{i}_1 = -h\vec{\omega}\cdot\vec{k}_1$$

quindi:

$$\frac{dP_x}{dt}\cdot\vec{j}_1 = -\frac{dP_y}{dt}\cdot\vec{i}_1 ,$$

conforme all'enunciato dell'esercizio.

***

12. - *Dimostrare che nel moto non traslatorio di un corpo rigido hanno, in un determinato istante, uguale velocità solo i punti di una retta parallela all'asse istantaneo elicoidale, e velocità uguale, in valore assoluto, i punti di un cilindro circolare con lo stesso asse.*

Siano P, Q due punti generici del corpo; si ha (C II-38) (ora vi è Q in luogo di O_1)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \vec{\omega}\times(P-Q) ;$$

affinché quei due punti abbiano la stessa velocità deve essere

$$\vec{\omega}\times(P-Q)=0,$$

ed essendo $\vec{\omega}\neq 0$ perché il moto non è di traslazione, il vettore $P-Q$ dovrà essere parallelo a $\vec{\omega}$, cioè i punti che hanno uguale velocità devono trovarsi su una retta parallela a $\vec{\omega}$, quindi all'asse istantaneo elicoidale.

Per rispondere al secondo quesito facciamo coincidere Q con un punto qualunque O dell'asse istantaneo elicoidale. Si ha

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dO}{dt}+\vec{\omega}\times(P-O),$$

essendo $\frac{dO}{dt}$ parallelo a $\vec{\omega}$. Elevando al quadrato questa equazione si ottiene

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2=\left(\frac{dO}{dt}\right)^2+\left[\vec{\omega}\times(P-O)\right]^2+2\,\frac{dO}{dt}\cdot\vec{\omega}\times(P-O).$$

L'ultimo termine di questa equazione è nullo, perché $\vec{\omega}$ è parallelo a $\frac{dO}{dt}$; il penultimo vale $\omega^2 r^2$ se r è la distanza di P dall'asse elicoidale; quindi i punti che hanno la stessa velocità (in modulo) devono avere la stessa r, cioè debbono trovarsi su un cilindro con asse, l'asse istantaneo elicoidale.

***

13. - *Se tre punti non allineati in un corpo rigido hanno, in un certo istante, uguale velocità, in quell'istante il corpo passa per uno stato cinetico di traslazione.*

Infatti se lo stato cinetico non fosse di traslazione, i tre punti di uguale velocità dovrebbero essere, per l'esercizio precedente, allineati contro l'ipotesi.

***

14. - *Data la velocità di due punti A, B di un corpo rigido, trovare la velocità di un punto P allineato con A e B.*

Poiché P, A e B sono allineati, sarà $P-A$ parallelo a $B-A$ cioè:

$$P-A=m(B-A),$$

dove m è un numero noto uguale in modulo al rapporto fra PA e BA. Derivando l'equazione ora scritta si ha

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dA}{dt}+m\frac{dB}{dt}-m\frac{dA}{dt}=(1-m)\frac{dA}{dt}+m\frac{dB}{dt},$$

che esprima la velocità cercata.

***

15. - *Determinare la condizione necessaria e sufficiente affinché il vettore $\vec{\omega}$ che definisce la rotazione di un corpo abbia direzione costante, pur potendo variare in grandezza.*

La direzione di $\vec{\omega}$ è definita dal vettore unitario $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$; quindi, affinché quella direzione sia fissa, deve essere

$$\frac{d\frac{\vec{\omega}}{\omega}}{dt}=0$$

ossia:

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt}-\frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}=0,$$

e moltiplicando vettorialmente per $\vec{\omega}$ si ha

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{\omega}=0.$$

Cioè, condizione necessaria affinché $\vec{\omega}$ sia fisso è che sia parallelo alla sua derivata. Questa condizione è anche sufficiente. Infatti se $\vec{\omega}$ è parallelo a $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ si può scrivere

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=m\vec{\omega},$$

dove m è un numero, quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right)=\left(\frac{m}{\omega}+\frac{d\frac{1}{\omega}}{dt}\right)\vec{\omega},$$

cioè questa derivata, se non fosse nulla, dovrebbe essere parallela a $\vec{\omega}$. D'altra parte, essendo:

$$\frac{\vec{\omega}}{\omega}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\omega}=1,$$

derivando si avrebbe $\frac{\vec\omega}{\omega}$ normale a $\frac{d\frac{\vec\omega}{\omega}}{dt}$, quindi quest'ultimo vettore deve essere nullo.

***

16. - *Dimostrare che in un corpo rigido negli istanti in cui* $\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec\omega \neq 0$ *vi è sempre un punto, e uno solo, di accelerazione nulla. Quando invece* $\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec\omega = 0$ *(senza che* $\vec\omega$ *o* $\frac{d\vec\omega}{dt}$ *siano entrambe nulle) se un punto del corpo ha accelerazione normale a* $\vec\omega$ *(o a* $\frac{d\vec\omega}{dt}$ *se* $\vec\omega = 0$*) esiste una retta del corpo parallela a questo vettore i cui punti hanno tutti accelerazione nulla.*

Supposto $\omega \neq 0$, per le formule 65 di C II-41, abbiamo che i punti x_1, y_1, z_1, in cui l'accelerazione è nulla devono soddisfare al sistema (ora si è posto z_1 parallelo a $\vec\omega$ sicché $p = q = 0$, $r = \omega$):

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega^2 x_1 + \frac{dr}{dt} y_1 - \frac{dq}{dt} z_1 = \lambda_0 \\ -\frac{dr}{dt} x_1 + \omega^2 y_1 + \frac{dp}{dt} z_1 = \mu_0 \\ \frac{dq}{dt} x_1 - \frac{dp}{dt} y_1 = \nu_0 \end{cases}$$

Questo sistema in x_1, y_1, z_1 è risolvibile in un solo modo se il determinante dei coefficienti D è diverso da zero. Ora si ha:

$$D = \begin{vmatrix} \omega^2 & \frac{dr}{dt} & -\frac{dq}{dt} \\ -\frac{dr}{dt} & \omega^2 & \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} & -\frac{dp}{dt} & 0 \end{vmatrix} = \omega^2 \left\{ \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \right\}$$

Se è $\vec\omega \times \frac{d\vec\omega}{dt} \neq 0$ deve essere $\vec\omega \neq 0$, $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$, e $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ non ambedue uguali a zero altrimenti sarebbe $\vec\omega$ parallelo a $\frac{d\vec\omega}{dt}$. Quindi è $D \neq 0$, il sistema (1) è risolubile, esiste un punto e uno solo di accelerazione nulla.

Se è $\vec\omega \times \frac{d\vec\omega}{dt} = 0$, ma $\vec\omega \neq 0$, $\vec\omega$ è parallela a $\frac{d\vec\omega}{dt}$ e $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0$. Allora, se l'accelerazione di un punto del corpo, che si può far coincidere con O_1, è normale a $\vec\omega$, ν_0 è nulla e a_{z_1} è ovunque nulla (per la terza di (65) di C II-41, perché ora p e q e le loro derivate sono nulle) e la terza di (1) è identicamente soddisfatta. Si ha poi che tutti i punti di coordinate x_1 e y_1 soddisfacenti al sistema formato dalle due prime equazioni di (1), cioè

$$\omega^2 x_1 + \frac{dr}{dt} y_1 = \lambda_0$$

$$-\frac{dr}{dt} x_1 + \omega^2 y_1 = \mu_0$$

(sistema sempre risolubile perché il suo determinante vale $\omega^4 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$), hanno accelerazioni nulle. Essi si trovano perciò sulla retta parallela a z_1, cioè a $\vec\omega$, conforme all'enunciato dell'esercizio. Se poi è $\vec\omega = 0$, ma $\frac{d\vec\omega}{dt} \neq 0$, scelto ora z_1 parallelo a $\frac{d\vec\omega}{dt}$ si ha $p = q = r = \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0$, e se l'accelerazione di O_1 è normale a $\frac{d\vec\omega}{dt}$ l'ultima equazione di (1) è identicamente soddisfatta e a_{z_1} è ovunque nulla. I valori di x_1 e y_1, che soddisfano le altre due equazioni, determinano la retta parallela a z_1 i cui punti hanno accelerazioni nulle.

***

17. - *Comporre quattro stati cinetici di rotazione definiti dai vettori applicati* $(\vec\omega, A)$, $(\vec\omega, B)$, $(-\vec\omega, C)$, $(-\vec\omega, D)$, *dove* A, B, C, D *sono i vertici di un quadrato di lato* 1 *e* $\vec\omega$ *è normale al quadrato (fig. 34).*

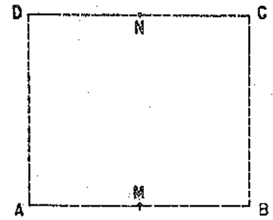

Fig. 34

I due primi stati cinetici si compongono (C II-32) in uno stato di rotazione definito dal vettore applicato $(2\omega, M)$; i due ultimi in uno stato cinetico definito dal vettore $(-2\omega, N)$ essendo M e N i punti medi di AB e CD. I due stati cinetici ora considerati si compongono (C II-33) in uno stato cinetico di traslazione con velocità uguale a $2\vec{\omega}\times(N-M)$.

***

18. - *Comporre gli stati cinetici definiti dai vettori applicati* $(\vec{\omega}, A)$, $(-\vec{\omega}, B)$, $(\vec{\omega}, C)$, $(-\vec{\omega}, D)$ essendo A, B, C, D, *i vertici di un quadrato.*

I due primi stati cinetici si compongono in uno stato cinetico di traslazione con velocità $\vec{\omega}\times(B-A)$, i due ultimi in uno stato cinetico, pure di traslazione, $\vec{\omega}\times(D-C)$; sicché lo stato cinetico risultante è nullo.

***

19. - *Comporre gli stati cinetici rotatori:*

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1\times(P-O_1), \qquad \vec{v}_2 = \vec{\omega}_2\times(P-O_2),$$

dove, rispetto a una prefissata terna cartesiana:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\omega}{2}(\vec{j}+\vec{k}), \qquad \vec{\omega}_2 = \frac{\omega}{2}(-\vec{j}+\vec{k}),$$

mentre le coordinate di O_1 *e* O_2 *sono rispettivamente* (0, 1, 1) (0, -1, 1).

Gli assi istantanei dei due moti sono ambedue nel piano yz e simmetrici rispetto all'asse z (fig. 35), essi si incontrano perciò su quell'asse. Allora essendo $\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2 = \omega\vec{k}$ si ha (C II-31) che lo stato cinetico risultante ha per asse istantaneo l'asse z e la sua velocità angolare ha lo stesso verso di $\vec{k}$ e vale in modulo ω.

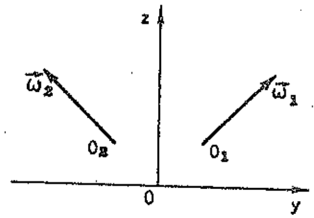

Fig. 35

***

20. - *Determinare la posizione dell'asse istantaneo dello stato cinetico elicoidale ottenuto componendo lo stato cinetico di traslazione di velocità* $\vec{v}_0$ *con uno stato cinetico di rotazione definito dal vettore applicato* $(\vec{\omega}, O_2)$.

Se $\vec{v}_0''$ è la componente di $\vec{v}_0$ normale a $\vec{\omega}$ si ha che l'asse istantaneo elicoidale coincide (C II-35) con l'asse istantaneo di rotazione del moto risultante fra $\vec{v}_0''$ e la

rotazione definita da $\vec{\omega}$, O_2. Questo asse passa (C II-34) per un punto O_1 tale che:

$$\vec{v}_0'' = \vec{\omega}\times(O_2-O_1) = (O_1-O_2)\times\vec{\omega},$$

e poiché si può scegliere O_2 in modo che O_1O_2 sia perpendicolare a $\vec{\omega}$ si ha, per l'es. 16 del Cap. I:

$$O_1 - O_2 = \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_0''}{\omega^2} = \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_0}{\omega^2}$$

e questa equazione determina O_1 e perciò l'asse istantaneo elicoidale. Cioè O_1 è sulla perpendicolare per O_2 a $\vec{\omega}$ e $\vec{v}_0$, a destra di $\vec{\omega}$ rispetto ad un osservatore con i piedi in O_2 e disposto come $\vec{v}_0''$; infine O_1 dista da O_2 di $\frac{v_0''}{\omega}$.

***

21. - *Un treno si muove, su un binario rettilineo, con velocità di 72 km all'ora. Una persona sul treno si muove parallelamente al binario con la velocità di un metro/sec. Trovare la velocità della persona rispetto al suolo.*

Si ha:

$$v_1 = 1\,\frac{m}{sec}, \qquad v_\tau = 72\,\frac{km}{ora} = \frac{72\cdot1000}{3600}\,\frac{m}{sec} = 20\,\frac{m}{sec},$$

quindi, per il teorema della composizione della velocità (C III-44), $v = 21\,\frac{m}{sec}$.

***

22. - *La persona considerata nell'esercizio precedente si muove con la stessa velocità, ma in direzione normale al treno. Trovare il valore della velocità della persona rispetto al suolo.*

Ora $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_\tau$ hanno, in modulo, lo stesso valore dell'esercizio precedente, ma sono ortogonali, perciò devono comporsi vettorialmente. Si ha così:

$$v = \sqrt{v_1^2+v_\tau^2} = \sqrt{400+1} = 20{,}025\,\frac{m}{sec}.$$

***

23. - *La corrente di un fiume, a sponde rettilinee, ha velocità* $\vec{u}$. *Una barca attraversa il fiume partendo da un punto A della riva e muovendosi, rispetto alla corren-*

te, con velocità costante $\vec{u}$ normale alla corrente stessa. Se il fiume è largo l, determinare la distanza del punto B di approdo, dal punto A' opposto ad A sull'altra riva del fiume (fig. 36).

La barca si muove (C III-44) con velocità:

$$\vec{v} = \vec{u}' + \vec{u},$$

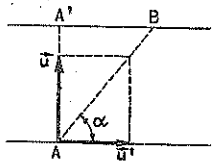

Fig. 36

cioè percorre una retta AB inclinata rispetto alle sponde del fiume di un angolo α tale che $\tan\alpha = \frac{u}{u'}$. Quindi:

$$A'B = l \cot\alpha = \frac{lu'}{u}.$$

***

24. - *Nel caso dell'esercizio precedente si domanda quale direzione deve avere la barca (che si muove ancora con velocità in modulo uguale a u) affinché raggiunga il punto A' opposto ad A (fig. 37).*

Il vettore $\vec{u} + \vec{u}'$ velocità della barca rispetto ad un osservatore terrestre deve essere parallelo a AA'. Allora $\vec{u}$ dovrà essere inclinato rispetto a questa retta di un angolo β tale che:

$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{u'}{u}.$$

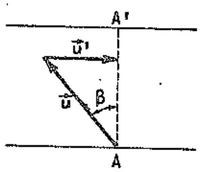

Fig. 37

***

25. - *Una persona si muove con velocità $\vec{u}$ sotto la pioggia inclinata di α (nel piano verticale in cui cammina la persona) rispetto all'orizzontale. Qual'è l'inclinazione ottima per l'ombrello della persona (fig. 38).*

L'ombrello deve avere la direzione della velocità della pioggia rispetto alla persona; ora, se $\vec{v}$ è la velocità della pioggia rispetto al suolo, la velocità di trascinamento della pioggia rispetto al suolo è $\vec{u}$, quindi $\vec{v}_1$ (velocità della pioggia rispetto alla persona) vale:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{u}.$$

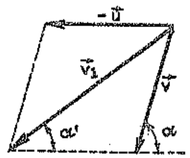

Fig. 38

Ora, detto α' l'inclinazione di $\vec{v}_1$ rispetto al suolo,

α l'angolo fra $\vec{u}$ e $\vec{v}$, si ha, per il teorema dei seni applicato al triangolo formato da $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ e $-\vec{u}$:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha'}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

ossia:

$$\mathrm{sen}\,\alpha' = \mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{v}{v_1} = \mathrm{sen}\,\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}}$$

e α' è l'inclinazione cercata.

***

26. - *Una stella S emette un raggio luminoso, che forma un angolo α con l'orbita della terra. Dimostrare che un osservatore sulla terra, per effetto del suo moto di rivoluzione, vede la stella formare un angolo α' diverso da α con l'orbita terrestre e determinare l'angolo $\beta = \alpha - \alpha'$ (fenomeno dell'aberrazione astronomica).*

L'osservatore terrestre (fig. 39) riceve il raggio luminoso nella direzione della velocità della luce rispetto alla terra. Come nell'esercizio precedente per il teorema dei seni si ha:

$$\mathrm{sen}\,\beta = \mathrm{sen}\,(\alpha - \alpha') = \mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{u}{c},$$

dove c è la velocità della luce.

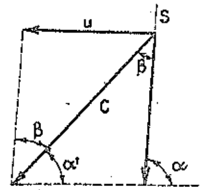

Fig. 39

***

27. - *Un punto P si muove, per effetto del suo peso (fig. 40) su un piano di inclinazione α, partendo dall'estremo A (quindi con moto naturalmente accelerato, con accelerazione $g\,\mathrm{sen}\,\alpha$), mentre il piano si muove, in direzione orizzontale, con velocità costante $\vec{u}$. Trovare, in un istante generico, velocità e accelerazione relative all'osservatore (O) rispetto a cui si muove il piano e scrivere le equazioni del moto di P.*

Rispetto ad un osservatore (O_1) collegato col piano inclinato, il punto si muove lungo il piano di moto naturalmente accelerato con velocità $v_1 = g\,\mathrm{sen}\,\alpha t$, accelerazio-

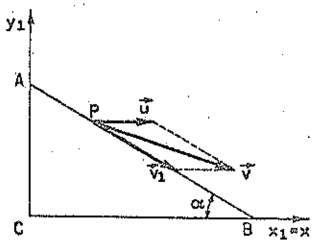

Fig. 40

ne $a_1 = g \operatorname{sen} \alpha$. La velocità di trascinamento è sempre $\vec{u}$, mentre l'accelerazione di trascinamento è nulla. Quindi, $\vec{v}$ si ottiene sommando vettorialmente $\vec{v}_1$ e $\vec{u}$, mentre, per il teorema di Coriolis (C III-46), tenendo conto che l'accelerazione $\vec{a}_c$ è nulla perché non vi è rotazione e che non vi è accelerazione di trascinamento, l'accelerazione rispetto all'osservatore (O) vale ancora $g \operatorname{sen} \alpha$. In particolare per il modulo della velocità si ha:

$$v = \sqrt{g^2 \operatorname{sen}^2 \alpha t^2 + u^2 + 2g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha u t}.$$

Per scrivere il moto di P si ponga un sistema $O_1 x_1 y_1$ con $O_1 x_1$ orizzontale e coincidente con CB (essendo B l'altro estremo del piano, C la proiezione orizzontale di A) e $O_1 y_1$ con CA. Allora se h è uguale ad AC, $AP = s = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha t^2$:

$$x_1 = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha t^2, \qquad y_1 = h - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}^2 \alpha t^2.$$

Posto un sistema di assi Oxy con l'origine O nella posizione che aveva C all'istante iniziale, con Ox orizzontale e Oy verticale, si ha che le coordinate a, b di O_1 sono ut e 0; inoltre i due sistemi sono sempre paralleli, quindi (C II-22):

$$x = ut + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha t^2, \qquad y = h - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}^2 \alpha t^2.$$

***

28. - *Risolvere il problema dell'esercizio precedente supponendo però che il piano si muova, partendo dalla quiete, in direzione orizzontale con accelerazione* b *e il moto del punto rispetto al piano sia come nell'esercizio suddetto.*

Le velocità e accelerazioni rispetto all'osservatore (O_1) sono le stesse dell'esercizio precedente, le velocità e le accelerazioni di trascinamento sono dirette ancora in direzione orizzontale ma valgono rispettivamente bt e b. Quindi col teorema di composizione delle velocità e col teorema di Coriolis si calcolano rispettivamente velocità e accelerazione rispetto all'osservatore fisso (fig. 41).

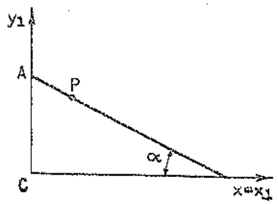

Fig. 41

Posti gli assi Oxy e $O_1 x_1 y_1$ come nell'esercizio precedente, siccome il punto O_1 si muove rispetto ad

O di moto accelerato, la sua ascissa vale $\frac{b}{2} t^2$, mentre la sua ordinata è nulla. Si ha pertanto:

$$x_1 = \frac{b}{2} t^2 + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha t^2$$

$$y_1 = h - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}^2 \alpha t^2.$$

***

29. - *Un punto* P *si muove, su un piano, di moto circolare uniforme, in senso antiorario, con velocità* c, *sul cerchio di centro* O_1 *e raggio* r. *Il piano su cui si trova il cerchio si muove, a sua volta, rispetto all'osservatore* (O) *con velocità* $\vec{u}$ *costante e parallela al piano stesso. Trovare la velocità del punto* P *quando esso si trova negli estremi* B *e* B_1 *del diametro normale a* $\vec{u}$ *e l'accelerazione dello stesso punto quando si trova in* A *e* A_1 *intersezioni del cerchio con il diametro parallelo ad* $\vec{u}$. *Si trovi poi l'equazione del moto di* P *(fig. 42).*

Si consideri un osservatore (O_1) collegato col piano in cui si trova il cerchio, per esso, nel punto B_1, $\vec{v}_1$, vale, in modulo, c ed è parallela e dello stesso verso ad $\vec{u}$, in B è parallela, ma di verso opposto. Quindi per il teorema di composizione delle velocità la velocità rispetto ad (O) di P è parallela a $\vec{u}$ e vale $c + u$, in B_1, $c - u$ in B.

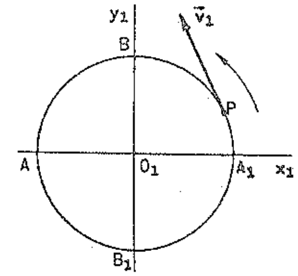

Fig. 42

L'accelerazione $\vec{a}_1$, rispetto ad (O_1), è quella centripeta del moto circolare uniforme cioè, in modulo, $\frac{c^2}{r}$. In A e in A_1 è parallela a $\vec{u}$ con lo stesso verso in A, verso opposto in A_1. Essendo $a_\tau = a_c = 0$, l'accelerazione di P si riduce, in A e A_1, a quella centripeta ora indicata.

Posto poi un sistema di assi $O_1 x_1 y_1$ con $O_1 x_1$ e $O_1 y_1$ coincidenti rispettivamente con $O_1 A_1$ e $O_1 B$, le proiezioni di P su questi assi si muoveranno con moto armonico di pulsazione $\frac{c}{r}$, ampiezza r, quindi:

$$x_1 = r \cos\left(\frac{c}{r} t + \gamma\right)$$

$$y_1 = r \operatorname{sen}\left(\frac{c}{r} t + \gamma\right)$$

Ora, se l'origine del sistema degli assi si pone nel punto O dove si trova O_1 per $t=0$, le coordinate a, b di O_1, sono ut e 0, quindi:

$$x = ut + r\cos\left(\frac{c}{r}t + \gamma\right)$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\left(\frac{c}{r}t + \gamma\right)$$

***

30. - *Un punto P si muove con velocità c sull'orlo di un disco, il quale, a sua volta, si muove, rispetto ad un osservatore (O), con moto di traslazione di accelerazione costante $\vec{k}$, parallela al piano del disco. Trovare l'accelerazione di P rispetto ad (O) nei punti A, A_1 del diametro parallelo a $\vec{k}$ (fig. 43).*

Applichiamo il teorema di Coriolis:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c\,;$$

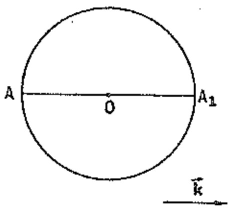

Fig. 43

sarà $\vec{a}_c = 0$ perché il disco si sposta con moto di traslazione; $\vec{a}_\tau$ varrà poi $\vec{k}$.

Si ha poi $\vec{a}_1$ uguale all'accelerazione centripeta del punto e vale, in modulo, $\frac{c^2}{r}$. Ora in A, le due accelerazioni $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_s$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso quindi si sommano, in A_1 hanno la stessa direzione e verso contrario, quindi si sottraggono. Perciò le accelerazioni in A e A_1, valgono, in grandezza, $\frac{c^2}{r}+k$, $\frac{c^2}{r}-k$ ed hanno direzione, in ogni caso, parallela a $\vec{k}$.

***

31. - *Un punto P si muove di moto armonico con pulsazione Ω lungo un diametro di un disco di raggio r che, a sua volta, ruota uniformemente (rispetto ad un osservatore (O)) intorno al suo asse con velocità angolare ω. Trovare velocità e accelerazione, rispetto a (O), del punto P, quando si trova su un estremo A del diametro percorso dal punto. Scrivere poi l'equazione del moto P rispetto all'osservatore (O).*

Nel punto A (fig. 44) si ha $\vec{v}_1 = 0$ (perché il moto armonico si trova nel punto di massima elongazione) quindi $\vec{v}$ si riduce a $\vec{v}_\tau$, velocità di trascinamento di P in A, os-

sia velocità di un moto circolare con velocità angolare ω. Dunque:

$$v = v_\tau = \omega r,$$

e $\vec{v}$ è diretta perpendicolarmente al diametro BA.

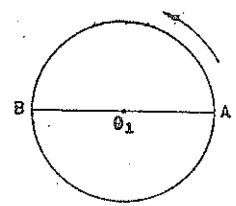

Fig. 44

Quanto all'accelerazione, si ha $\vec{a}_c = 0$ perché tale è $\vec{v}_1$; $\vec{a}_1$ uguale all'accelerazione del moto armonico distante r dall'origine e perciò diretta verso il centro con modulo uguale a $\Omega^2 r$; l'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_\tau$ si riduce all'accelerazione centripeta parallela, nello stesso verso di $\vec{a}_1$ e uguale a $\omega^2 r$; quindi:

$$\vec{a} = (\omega^2 + \Omega^2)\,r,$$

ed è diretta come l'accelerazione centripeta.

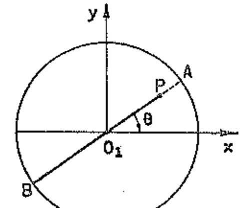

Fig. 45

Per ricavare le equazioni del moto di P rispetto all'osservatore (O) si ponga un sistema di assi xy con origine nel centro O_1 del disco e tale che per $t=0$ il diametro BA coincida con l'asse x. Se θ è l'angolo fra BA e x si ha $\theta = \omega t$, e allora, come appare dalla fig. 45 (oppure con le 11 di C IV-63):

$$x = O_1P\cos\theta, \qquad y = O_1P\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

ma, essendo il moto armonico:

$$O_1P = r\cos(\Omega t + \gamma),$$

$$x = r\cos(\Omega t+\gamma)\cos\omega t, \qquad y = r\cos(\Omega t+\gamma)\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

che sono le equazioni cercate.

***

32. - *Un punto P si muove di moto armonico con pulsazione Ω, ampiezza C, su una corda distante d dal centro di un disco che ruota con velocità angolare ω rispetto all'osservatore (O). Trovare la velocità e accelerazione del punto P, rispetto ad (O), quando passa per il punto di mezzo A della corda muovendosi con senso concorde a quello di rotazione del disco (fig. 46).*

In questo caso $\vec{v}_1$ diretta secondo la corda vale, in modulo, la massima velocità del moto, cioè ΩC. La velocità di trascinamento $\vec{v}_\tau$ vale ω per la distanza d di A dal centro ed è diretta lungo la corda nello stesso verso di $\vec{v}_1$, quindi:

$$v = \omega d + \Omega C,$$

e v è diretta secondo la corda con verso concorde alla rotazione del disco.

Si ha poi $\vec{a}_1 = 0$, poiché lo spostamento di P nel punto A è rispetto al disco, nullo, $\vec{a}_\tau$ si riduce all'accelerazione centripeta uguale a $\omega^2 d$; $\vec{a}_c$ vale, in modulo, $2\omega\Omega C$ (poiché $\vec{\omega}$ e $\vec{v}_1$ sono ortogonali) ha direzione normale a $\vec{\omega}$ (quindi giace nel piano del disco) ed a $\vec{v}_1$, sicché la direzione di $\vec{a}_c$ coincide perciò con quella della retta OA. Infine, il suo verso va da A verso O, cioè concorde con $\vec{a}_\tau$. Quindi:

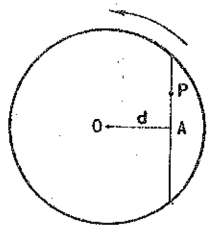

Fig. 46

$$a = \omega^2 d + 2\omega\Omega C,$$

ed $\vec{a}$ è diretta come l'accelerazione centripeta.

***

33. - *Un punto P si muove sull'orlo di un disco di raggio r con velocità angolare Ω rispetto al suo centro. Il disco ruota rispetto ad un osservatore (O) intorno al suo asse e nello stesso verso con velocità angolare costante ω. Trovare la velocità e accelerazione rispetto ad (O) del punto P in una sua posizione generica.*

Poiché

$$v_1 = \Omega r, \qquad v_\tau = \omega r,$$

e ambedue queste velocità sono tangenti al disco, per il teorema della composizione delle velocità, si ha:

$$v = (\Omega + \omega) r;$$

$\vec{v}$ ha direzione tangente in P all'orlo del disco.

Le accelerazioni $\vec{a}$ e $\vec{a}_1$ saranno ambedue centripete e uguali rispettivamente in modulo a $\Omega^2 r$ e $\omega^2 r$, quella di Coriolis $2\vec{\omega}\times\vec{v}_1$ è anch'essa centripeta e vale in modulo $2\omega\Omega r$, quindi:

$$a = \Omega^2 r + \omega^2 r + 2\omega\Omega r = (\Omega + \omega)^2 r$$

ed ha la direzione dell'accelerazione centripeta.

È opportuno osservare che ai risultati ora ottenuti si può giungere più rapidamente col metodo della composizione degli stati cinetici.

La velocità di P si può infatti ottenere componendo i due stati cinetici di ugual asse di rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ e $\vec{\Omega}$, quindi (C II-31) $v = (\Omega + \omega) r$ con direzione tangente al cerchio. L'accelerazione sarà la derivata di questa velocità, cioè l'accelerazione centripeta di modulo $(\omega + \Omega)^2 r$, conforme alle equazioni soprascritte.

***

34. - *Nell'esercizio precedente il disco ruota con velocità angolare variabile. Trovare la velocità e l'accelerazione del punto P.*

La velocità è come nell'esercizio precedente $(\omega + \Omega) r$; quanto all'accelerazione, essa vale quella centripeta trovata nell'esercizio precedente e uguale a $(\omega + \Omega)^2 r$ a cui bisogna aggiungere l'accelerazione tangenziale di P uguale a $\Omega' r$.

***

35. - *Un punto P si muove con velocità di modulo costante v_r lungo il meridiano di una sfera di raggio r che ruota con velocità angolare costante ω intorno al suo asse OA. Trovare velocità e accelerazione di P in un punto di latitudine φ (fig. 47).*

La velocità di trascinamento di P vale ω per la distanza di P dall'asse cioè $\omega r \cos\varphi$ ed è diretta secondo il parallelo, $\vec{v}$ sarà il risultante fra questa velocità e $\vec{v}_r$, quindi per il modulo di v si ha

$$v = \sqrt{v_r^2 + \omega^2 r^2 \cos^2\varphi}.$$

Per il calcolo dell'accelerazione osserviamo che $\vec{a}_1$ vale l'accelerazione centripeta del moto di P sulla sfera uguale, poiché P percorre un meridiano, a $\frac{v_r^2}{r}$ e diretta come PO; a_τ è l'acce-

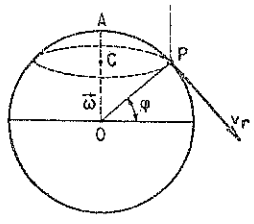

Fig. 47

lerazione di P qualora percorra con velocità angolare ω un cerchio di raggio $r\cos\varphi$, varrà $\omega^2 r \cos\varphi$ e sarà diretta da P verso il centro C del cerchio; $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ varrà, in modulo, $2\omega v_r \operatorname{sen}\varphi$, sarà diretta normalmente alla figura e orientata verso la figura stessa. Quindi il modulo di a vale

$$a = \sqrt{\omega^4 r^2 \cos^2\varphi + \frac{v_r^4}{r^2} + 2 v_r^2 \omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + 4\omega^2 v_r^2 \operatorname{sen}^2\varphi}.$$

***

36. - *Tenendo conto della rotazione della terra, trovare la velocità angolare assoluta (più precisamente rispetto al sistema terrestre-stellare indicato in C I-1, che non partecipa al moto di rotazione della terra) di un motore che, posto in una località di latitudine $\varphi (\varphi \neq 0)$, ruota intorno ad un asse tangente al meridiano con velocità angolare Ω costante in modulo e orientata verso il nord.*

Come si è osservato in C III-45, per risolvere l'esercizio bisogna comporre due stati cinetici: il primo (della terra intorno all'asse terrestre) definito dal vettore $\vec{\omega}$, O (O centro della terra, $\vec{\omega}$ sua velocità angolare), l'altro definito dal vettore $\vec{\Omega}$, O_1 (O_1 è un punto dell'asse del motore). I due assi istantanei di rotazione si incontrano (fig. 48) in un punto O_2 dell'asse terrestre distante dal centro della terra di $\dfrac{R}{\operatorname{sen}\varphi}$, se R è il raggio terrestre. Perciò lo stato cinetico risultante è di rotazione intorno a un asse istantaneo passante per O_2 con velocità angolare uguale a $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$, cioè la velocità angolare ω' risultante vale in modulo $\sqrt{\omega^2 + \Omega^2 + 2\omega\Omega\cos\varphi}$ e forma con l'asse terrestre un angolo α tale che:

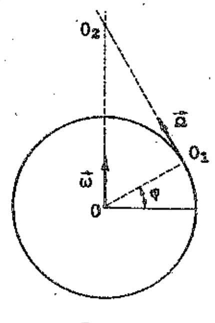

Fig. 48

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega^2 + \Omega^2 + 2\omega\Omega\cos\varphi}}.$$

***

37. - *Riferito il moto della luna al sistema terrestre stellare (O) (con origine nel centro O della terra), sia $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare costante con cui il centro della luna percorre la sua traiettoria (supposta circolare) e sia $\vec{\Omega}$ la velocità angolare della rotazione della luna intorno al suo asse. Determinare la velocità di un punto P della luna rispetto ad un osservatore (O_1) che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno ad un asse passante per O, cioè un osservatore che dalla terra segue il moto della luna sulla sua orbita.*

La velocità $\vec{v}(P)$ del punto P generico della luna rispetto al sistema terrestre stellare (O) vale (O' centro

della luna)

$$\vec{v}(P) = \frac{dO'}{dt} + \vec{\Omega} \times (P - O') = \vec{\omega} \times (O' - O) + \vec{\Omega} \times (P - O').$$

La velocità $\vec{v}_\tau$, che è la velocità rispetto ad (O) dei punti della luna rigidamente collegata con (O_1), vale

$$\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (P - O),$$

quindi la velocità $\vec{v}_1$ di P rispetto a (O_1) vale

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (O' - O) + \vec{\Omega} \times (P - O') - \vec{\omega} \times (P - O) = (\vec{\Omega} - \vec{\omega}) \times (P - O').$$

Ora, se fosse $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ si avrebbe sempre $\vec{v}_1 = 0$, la luna sarebbe ferma rispetto a (O_1) cioè volterebbe sempre la stessa faccia rispetto alla terra. In altre parole solo una metà della faccia della luna sarebbe visibile. In realtà si ha solo $\Omega = \omega$, cioè la velocità angolare di rotazione della luna intorno al suo asse è uguale, in modulo, alla velocità di rotazione alla terra; ma poiché l'asse di rotazione della luna non è esattamente normale all'orbita terrestre (forma con questa normale, cioè con $\vec{\omega}$, un angolo di 6°, 44') i punti della luna sono dotati di un piccolo moto rispetto a (O_1) sicché (anche perché l'orbita della luna non è esattamente circolare) la parte visibile della luna è un po' più della sua metà.

***

38. - *Determinare la velocità di un punto generico P dell'elica di un aeroplano la quale ruota intorno al suo asse con velocità angolare $\vec{\Omega}$. I punti dell'aeroplano si muovono sempre in piani orizzontali, il centro O' dell'elica percorre con velocità $\vec{u}$, costante in modulo, un cerchio di centro O e raggio R, l'asse dell'elica è sempre tangente a questo cerchio.*

La velocità $\vec{v}_1$ di un punto P dell'elica rispetto a un osservatore collegato con l'aereo vale

$$\vec{v}_1 = \vec{\Omega} \times (P - O').$$

Per calcolare la velocità di trascinamento $\vec{v}_\tau$ osserviamo che se l'elica fosse rigidamente collegata con l'aereo si muoverebbe di moto rotatorio con velocità angolare $\dfrac{u}{R}$ intorno ad un asse verticale passante per O, cioè il vettore velocità angolare di questo moto sarebbe $\dfrac{u}{R}\vec{k}$, dove $\vec{k}$ è un vettore unitario verticale orientato in modo che un osservatore disposto secondo esso vede l'aereo andare dalla sua destra alla sua sinistra. Si ha così, per la velocità $\vec{v}$ di P:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times (P-O') + \frac{u}{R}\vec{k} \times (P-O) = (\vec{\Omega} + \frac{u}{R}\vec{k}) \times (P-O') + \vec{u}.$$

Dunque il moto dell'elica vale la velocità del suo centro sommata con la velocità dovuta alla rotazione intorno all'aereo e alla rotazione dell'aereo stesso.

***

39. - *Scrivere l'equazione del moto del centro della luna rispetto al sistema solare, supponendo, per semplicità, le orbite della luna e della terra circolari e complanari.*

Siano R e r rispettivamente il raggio dell'orbita della terra e della luna, ω e Ω le velocità angolari del centro della terra rispetto al sole e del centro della luna rispetto alla terra o meglio rispetto al sistema terrestre-stellare. Come è noto, il periodo di rotazione della terra vale un anno il periodo di rotazione della luna intorno al sistema terrestre-stellare vale 27,3 giorni. Allora il moto della luna rispetto al sistema terrestre-stellare $O_1 x_1 y_1$ sarà un moto circolare con velocità angolare Ω perciò (C I-13) x_1 e y_1 saranno moti armonici di pulsazione Ω e sfasati di $\frac{\pi}{2}$ ossia

$$x_1 = r\cos(\Omega t + \alpha)$$
$$y_1 = r\,\mathrm{sen}(\Omega t + \alpha).$$

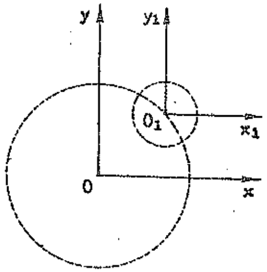
Fig. 49

L'origine O_1 del sistema terrestre stellare (che essendo orientato come le stelle fisse è sempre parallelo al sistema solare) percorre, con velocità angolare ω, il cerchio di raggio R. Si ha perciò per le coordinate a, b del predetto punto, le equazioni

$$a = R\cos(\omega t + \alpha)$$
$$b = R\cos(\omega t + \alpha).$$

Si ricavano così (C III-42) le seguenti equazioni per il moto della luna:

$$x = a + x_1 = R\cos(\omega t + \beta) + r\cos(\Omega t + \alpha)$$
$$y = b + y_1 = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta) + r\,\mathrm{sen}(\Omega t + \alpha);$$

come vedremo più innanzi questa curva è un'epicicloide.

***

40. - *Comporre n moti armonici di uguale ampiezza C, ognuno sfasato rispetto al precedente della quantità costante γ.*

I moti si possono rappresentare (C I-10) mediante i numeri complessi c, $ce^{i\gamma}\ldots\ ce^{i(n-1)\gamma}$; il moto risultante sarà ancora un moto armonico rappresentato da un numero complesso:

$$d = c + ce^{i\gamma} + ce^{2i\gamma} \ldots ce^{i(n-1)\gamma} = c(1 + e^{i\gamma} + e^{2i\gamma} \ldots e^{(n-1)i\gamma}),$$

ossia, ricordando la formula per la somma dei termini di una progressione geometrica:

$$d = c\,\frac{e^{in\gamma} - 1}{e^{i\gamma} - 1}.$$

Il modulo di questo numero complesso sarà l'ampiezza D del moto risultante

$$D = |c|\,\frac{|e^{in\gamma} - 1|}{|e^{i\gamma} - 1|} = C\left|\frac{\cos n\gamma + i\,\mathrm{sen}\,n\gamma - 1}{\cos\gamma + i\,\mathrm{sen}\,\gamma - 1}\right| =$$

$$= C\sqrt{\frac{\cos^2 n\gamma + 1 - 2\cos n\gamma + \mathrm{sen}^2 n\gamma}{\cos^2\gamma + 1 - 2\cos\gamma + \mathrm{sen}^2\gamma}} = C\sqrt{\frac{2 - 2\cos n\gamma}{2 - 2\cos\gamma}} = C\,\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\gamma}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2}}$$

***

41. - *Interpretare, col metodo della composizione dei movimenti, il moto rettilineo di equazione*

$$x = ut + C\cos\omega t - C$$

di cui si è calcolato, all'es. 9 del capitolo precedente, velocità e accelerazione.

Posto

$$x_1(t) = ut - C, \qquad x_2(t) = C\cos\omega t$$


Fig. 50

il nostro moto si ottiene componendo un moto uniforme con un moto armonico, cioè può ottenersi facendo oscillare un punto P su una retta e spostando poi rigidamente la retta lungo se stessa con moto uniforme. Il diagramma orario del moto è quello della fig. 50.

***

42. - *Interpretare il moto rettilineo rappresentato dall'equazione*

$$x = C_1 \cos(\omega t + \gamma_1) + C_2 \cos(2\omega t + \gamma_2)$$

Si tratta di comporre due moti armonici il secondo di pulsazione doppia del primo. Ciò può ottenersi facendo oscillare il punto su una retta con pulsazione ω e facendo poi oscillare la retta su se stessa con moto armonico di pulsazione 2ω.

***

43. - *Una retta parallela all'asse x si sposta con velocità costante u parallela all'asse y, inizialmente coincide con l'asse x. Un punto P si muove sulla retta in modo che l'angolo $\widehat{PSM}$ sia sempre retto essendo S un punto dell'asse x di ascissa a, M la intersezione della retta con l'asse y. Trovare la traiettoria di P (fig. 51).*

La y di P vale OM che si muove di moto uniforme con la velocità u, mentre, per $t = 0$, è $y = 0$; quindi:

$$y = ut.$$

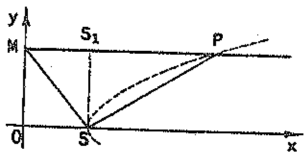

Fig. 51

Per trovare la x di P si osservi che se S_1 è la proiezione di S, per proprietà del triangolo rettangolo MSP si ha

$$S_1P = \frac{S_1S^2}{MS_1} = \frac{u^2t^2}{a},$$

quindi:

$$x = a + \frac{u^2t^2}{a},$$

perciò essendo

$$y^2 = u^2t^2, \qquad t^2 = \frac{(x-a)\,a}{u^2},$$

si ha

$$y^2 = a(x-a),$$

cioè la traiettoria è una parabola di asse x passante per il punto S di ascissa a.

CAPITOLO V

Esercizi sulla composizione delle forze, sulle proprietà dei sistemi di forze, sui baricentri

1. - *Trovare l'equilibrante $\vec{F}$ di due forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ uguali in modulo, applicate nello stesso punto A, che formano fra loro un angolo α (fig. 88).*

Come è noto (S I-8) l'equilibrante è una forza uguale e contraria alla risultante. Essendo le forze applicate nello stesso punto, la risultante si ottiene applicando in tale punto la loro somma vettoriale. La $\vec{F}$ sarà ovviamente diretta come la bisettrice delle due forze, verso l'esterno dell'angolo α (minore di π) formato da $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. In modulo, per l'esercizio 4 del cap. I, la forza equilibrante vale:

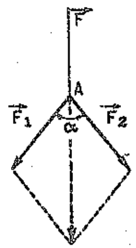

Fig. 88

$$F = 2F_1 \cos\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Se $\alpha = 120°$, come si è visto nell'esercizio citato, $F = F_1$. Cioè tre forze, uguali in modulo, che formano fra loro un angolo di $120°$, sono in equilibrio.

***

2. - *Decomporre una forza $\vec{F}$ applicata in un punto A, in due forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ applicate in A e aventi direzioni che formano con $\vec{F}$ angoli dati α e β minori di π.*

La costruzione grafica di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ è ben nota (fig. 89). Per la soluzione analitica del problema, basta osservare che la somma dei vettori $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, deve valere $\vec{F}$, perciò si possono applicare le formule dell'esercizio 14 del cap. I.

Quindi, con ovvi cambiamenti di simboli:

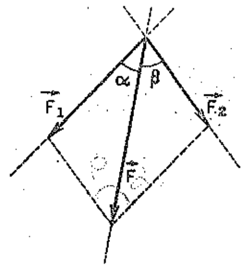

Fig. 89

$$F_1 = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}F; \qquad F_2 = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}F. \tag{2}$$

Se $\alpha = \beta$, allora:

$$F_1 = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}F = \frac{F}{2\cos\alpha},$$

conforme, del resto, alla (1) dell'esercizio precedente.

***

3. - *Data la direzione di due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ (applicate nello stesso punto), e della loro risultante $\vec{F}$ determinare la intensità di $\vec{F}$ e $\vec{F}_2$ nota $\vec{F}_1$.*

Il problema si riconduce subito all'esercizio precedente osservando che $\vec{F}_1$ è la risultante di $\vec{F}$ e $-\vec{F}_2$.

***

4. - *Due forze applicate allo stesso punto, con ugual direzione e verso opposto, hanno risultante uguale a 1 kg; le stesse forze poste ad angolo retto, hanno risultante di 5 kg. Determinare l'intensità delle due forze.*

Detti x e y i moduli delle due forze $(x > y)$ si ha:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 25.$$

Questo sistema si risolve subito col metodo di sostituzione. Si ha infatti:

$$x = y + 1$$
$$2y^2 + 2y - 24 = 0;$$

l'unica soluzione positiva di questa equazione è $y = 3$, quindi $x = 4$; le due forze hanno intensità rispettivamente uguale a 3 kg e 4 kg.

***

5. - *Trovare la risultante $\vec F$ di tre forze $\vec F_1, \vec F_2, \vec F_3$, di uguale intensità, applicate nel vertice V di una piramide regolare a base triangolare qualora sia α l'angolo fra uno spigolo della piramide e la sua altezza (fig. 90).*

Per risolvere il problema si potrebbe sommare vettorialmente le forze. È però più rapido procedere nel seguente modo. Si decomponga la forza $\vec F_1$ in due $\vec F_1'$, $\vec F_1''$, una secondo l'altezza VH, l'altra nel piano parallelo alla base della piramide e passante per V (meglio sull'intersezione fra questo piano e quello passante per VH e $\vec F_1$); analogamente si procede per $\vec F_2$ e $\vec F_3$. Le forze $\vec F_1''$, $\vec F_2''$, $\vec F_3''$, sono tre forze complanari, uguali in modulo, che formano fra loro un angolo di 120° quindi (esercizio 1) si annullano. Le altre uguali in intensità a $F_1 \cos\alpha$ si sommano algebricamente. La risultante vale perciò $3F_1 \cos\alpha$ ed è diretta lungo VH da V verso H.

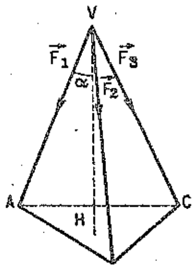

Fig. 90

***

6. - *In un punto A sono applicate due forze $\vec F_1$ e $\vec F_2$ di uguale intensità, che giacciono in un piano orizzontale e formano fra loro un angolo retto. Determinare l'intensità di una forza $\vec F_3$ applicata ancora in A con direzione inclinata di 45° rispetto alla verticale e giacente nel piano verticale che bisseca $\vec F_1$ e $\vec F_2$, in modo che la risultante fra $\vec F_1$, $\vec F_2$ e $\vec F_3$ sia verticale (fig. 91).*

La risultante $\vec F'$ fra $\vec F_1$ e $\vec F_2$ vale, in intensità, per la formula del primo esercizio, $2F_1 \cos 45° = F_1\sqrt{2}$ ed ha direzione orizzontale e nello stesso piano di $\vec F_3$.

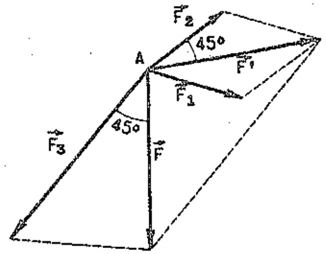

Fig. 91

Per trovare $\vec F_3$ e la risultante $\vec F$ occorrerà, per l'esercizio 3, decomporre $\vec F'$ lungo le direzioni di $\vec F$, $-\vec F_3$. Per le formule del secondo esercizio si avrà, essendo ora $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$:

$$F = F'\frac{\text{sen}\,45°}{\text{sen}\,(90+45°)} = F_1\sqrt{2}; \qquad F_3 = F'\frac{\text{sen}\,90°}{\text{sen}\,(90+45°)} = 2F_1 .$$

***

7. - *Le forze $\vec F_1$, $\vec F_2$, $\dots \vec F_n$, applicate in uno stesso punto A formano fra loro gli angoli α_{12}, α_{13}, $\dots \alpha_{rs}$ (α_{12} l'angolo fra $\vec F_1$ e $\vec F_2$, α_{rs} l'angolo fra $\vec F_r$ e $\vec F_s$ ecc.). Trovare l'intensità della risultante.*

Essendo

$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2 \dots \vec F_n .$$

Elevando al quadrato:

(4) $$F^2 = F_1^2 + F_2^2 \dots F_n^2 + 2\vec F_1\cdot\vec F_2 + 2\vec F_1\cdot\vec F_3 \dots 2\vec F_r \dots \cdot \vec F_s \dots =$$
$$= F_1^2+F_2^2\dots F_n^2 + 2F_1F_2\cos\alpha_{12} + 2F_1F_2\cos\alpha_{13}\dots 2F_rF_s\cos\alpha_{rs}\dots =$$
$$= \sum_{1}^{n}{}_{r,s} F_r\, F_s \cos\alpha_{rs} ,$$

intendendo il coseno di α_{rs}, quando $r = s$, uguale all'unità.

Ovviamente questa formula vale per la somma di qualunque sistema di vettori.

***

8. - *Data nel piano x, y, una forza rappresentata dal vettore $\vec F$, di componenti X, Y sugli assi (componenti uguali a $F\cos\alpha$, $F\,\text{sen}\,\alpha$, se α è l'angolo che la $\vec F$ forma con l'asse x, si ricordi l'esercizio 8 del primo capitolo) e il suo momento statico N rispetto all'origine, determinare la linea di azione della forza.*

Se x e y sono le coordinate di un punto generico della linea d'azione (S I-25):

(5) $$N = xY - yX$$

è l'equazione della retta in discorso. Si può anche procedere nel seguente modo di carattere geometrico. Poiché (S I-16, si sceglie il segno positivo quando N è positivo, il segno negativo nel caso contrario):

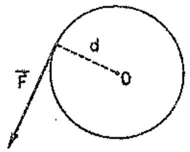

Fig. 92

$$d = \pm\frac{N}{F};$$

la linea d'azione (fig. 92) sarà una delle rette parallele a $\vec F$ e distante d dall'origine e precisamente quella su cui si deve porre la $\vec F$ in modo da vederla, da O, andare da destra verso sinistra, se N è positivo, da sinistra verso destra nel caso contrario. Le due rette in discorso si tracciano facilmente osservando che esse sono le tangenti parallele a $\vec{F}$ di un cerchio di centro O e raggio d.

***

9) - *Dimostrare che se in un sistema di forze il momento risultante è nullo in due punti O e O', il risultante è parallelo alla retta OO'.*

Infatti se $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}'$ sono i momenti delle forze rispetto a O e O' e $\vec{R}$ è il risultante si ha (S I-14):

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} + \vec{R} \times (O' - O); \tag{6}$$

ma $\vec{\Omega}'$ e $\vec{\Omega}$ sono nulli, l'ultimo termine del secondo membro di (6) è nullo, quindi essendo $O' - O \neq 0$, $\vec{R}$ è parallelo a $O' - O$.

***

10) - *Dimostrare che se il momento risultante di un sistema di forze è nullo in tre punti non allineati è nullo il risultante. Se poi le forze sono parallele e il momento è nullo in due punti, che non sono su una retta parallela alle forze, il risultante è pure nullo.*

Infatti, se il momento è nullo nei tre punti non allineati O, O' e O'' deve essere, per l'esercizio precedente, il risultante $\vec{R}$ parallelo contemporaneamente a OO' e OO'' il che è possibile solo se $\vec{R}$ è uguale a zero. Se poi le forze sono parallele, $\vec{R}$ dovrebbe avere la loro direzione ed essere ancora parallelo alla congiungente dei due punti in cui il momento risultante è nullo. Anche in questo caso deve essere perciò $\vec{R} = 0$.

Questi teoremi sono molto utili quando si vuole evitare il calcolo del risultante.

***

11) - *Dimostrare che se l'equilibrio di un sistema di n forze non cambia cambiando il verso di m forze del sistema, è in equilibrio il sistema di queste m forze e quello delle n-m rimanenti.*

Siano $\vec{R}_1$, $\vec{\Omega}_1$ rispettivamente il risultante e il momento risultante delle m forze considerate nell'enunciato dell'esercizio, $\vec{R}_2$, $\vec{\Omega}_2$ il risultante e il momento risultante delle rimanenti. Dalle condizioni di equilibrio per un

sistema di forze (S I-22) si ha:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0, \quad -\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0, \quad \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 = 0, \quad -\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 = 0,$$

da cui, sommando e sottraendo le due prime equazioni e le due ultime, si ha:

$$\vec{R}_1 = 0, \quad \vec{R}_2 = 0, \quad \vec{\Omega}_1 = 0, \quad \vec{\Omega}_2 = 0,$$

e ciò dimostra l'equilibrio dei sistemi delle m forze e delle n-m rimanenti.

***

12) - *Dimostrare che se n forze formano un sistema in equilibrio, n-1 di esse formano un sistema con invariante nullo.*

Le n-1 forze sono equivalenti ad una forza sola e perciò (S II-31) il loro invariante è nullo.

***

13) - *Date tre forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, applicate rispettivamente nei vertici A, B, C, di un triangolo e rappresentate rispettivamente dai vettori B-A, C-B, A-C, dimostrare che esse equivalgono ad una coppia che giace nel piano delle forze e di momento uguale, in modulo, al doppio dell'area del triangolo. Fissare anche, nel caso della fig. 93, il verso del momento.*

Il risultante di queste tre forze è nullo, quindi (S II-31) le forze equivalgono ad una coppia di momento uguale a quello delle forze rispetto ad un punto qualunque (S II-26-28) che possiamo identificare con B, perciò il momento della coppia è quello di $\vec{F}_3$ rispetto a B. Esso è normale al piano del triangolo e nel caso della figura è diretto verso il lettore, sicché la coppia giace nel piano del triangolo ed è levogira [1].

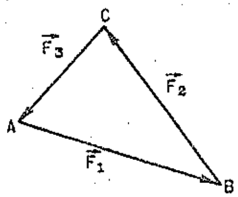

Fig. 93

Il suo modulo, ossia nel nostro caso il momento statico, vale $F_3 d$ (d distanza di B da AC) uguale a AC per d cioè appunto al doppio dell'area del triangolo.

[1] Cioè tende a far girare un corpo a cui è applicata in senso contrario alle lancette dell'orologio.

14. – *Generalizzare il risultato dell'esercizio precedente cioè dimostrare che un sistema di forze complanari $\vec{F}_1 = A_2 - A_1$, $\vec{F}_2 = A_3 - A_2 \dots \vec{F}_n = A_1 - A_n$ applicate rispettivamente in $A_1, A_2, \dots A_n$, equivale ad una coppia di momento normale a quello delle forze e in modulo uguale al doppio dell'area del poligono $A_1A_2 \dots A_n$ supposto convesso (fig. 94).*

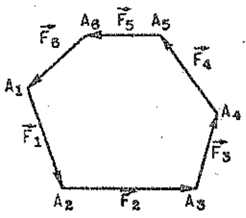

Fig. 94

Supponiamo, per fissare le idee, che le forze siano sei. Il sistema, avendo risultato nullo, equivale ad una coppia, come nell'esercizio precedente, con momento uguale a quello delle forze rispetto ad A_1, cioè alla somma dei momenti di $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$. Siccome questi momenti sono tutti normali al piano e dello stesso verso, e i loro moduli valgono, rispettivamente, il doppio delle aree dei triangoli $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_5A_6$, resta provato che il momento della coppia è normale al piano, diretto verso l'osservatore, e vale, in modulo, la somma di quelle aree, cioè il doppio dell'area del poligono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

***

15. – *Due coppie sono nello stesso piano e nello stesso verso (per fissare le idee, destrogire) e formate da forze di intensità F_1 e F_2 braccio d_1 e d_2. Trovare il braccio di una coppia le cui forze hanno intensità F e che faccia equilibrio alle due coppie.*

Le due coppie essendo complanari equivalgono (S II-28) ad una coppia di momento statico uguale alla somma dei loro momenti cioè $F_1 d_1 + F_2 d_2$. La coppia che fa equilibrio sarà dunque sinistrogira e avrà braccio $d = \frac{F_1 d_1 + F_2 d_2}{F}$.

***

16. – *Comporre una forza $\vec{F}$ applicata in un punto A con una coppia ad essa complanare di momento statico N positivo.*

Siccome N è positivo la coppia potrà venire rappresentata come in fig. 95 mediante due forze $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ e braccio $d = \frac{N}{F}$.

Se si applica la forza $-\vec{F}$ in A componendo la forza con la coppia rimane una sola forza rappresentata da un vettore uguale a F con linea d'azione una retta distante $d = \frac{N}{F}$ da A e in modo che dai suoi punti di applicazione che indicheremo genericamente con B si vede la forza $\vec{F}$, applicata in A, andare da sinistra verso destra. Ciò perché il momento di $\vec{F}$ applicato in A deve avere segno contrario a quello della coppia onde i due momenti si compensino.

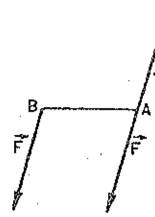

Fig. 95

***

17. – *Dato un sistema di forze in un piano $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$ applicate rispettivamente nei punti A_1, A_2, ... A_n, determinare, supposto $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n \neq 0$, la linea d'azione della risultante, ossia l'asse centrale del sistema.*

Le forze sono equivalenti ad una sola, la cui linea di azione è l'asse centrale del sistema ed è rappresentata dal vettore $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$.

Poiché il momento statico di questa forza rispetto ad un punto O è noto in quanto vale la somma dei momenti statici delle singole forze (momenti facilmente calcolabili perché sono note le forze e le loro linee d'azione) il problema è ricondotto alla determinazione della linea d'azione di una forza, noto il suo momento statico, questione già risolta nell'esercizio 8.

Determiniamo ora l'equazione analitica dell'asse centrale. Siano x e y le coordinate di un suo punto P, $x_1, y_1, x_2, y_2 \dots x_n, y_n$ le coordinate di $A_1, A_2 \dots A_n$, $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots X_n, Y_n$ le componenti delle $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n$.

Poiché la somma dei momenti statici delle forze rispetto a P deve essere nullo perché tale è il momento della risultante, si ha ([1]):

$$\sum_1^n {}_s X_s (y_s - y) - \sum_1^n {}_s Y_s (x_s - x) = 0,$$

ossia:

$$\sum_1^n {}_s (X_s y_s - Y_s x_s) = y \sum_1^n {}_s X_s - x \sum_1^n {}_s Y_s,$$

e questa è l'equazione cercata.

([1]) Questa formula è in sostanza la terza delle (26) di (S. I-25) solo che ora il momento non è riferito all'origine, ma al punto di coordinate x, y, sicché in luogo di x_s e y_s si deve scrivere $x_s - x$, $y_s - y$.

L'asse centrale si può determinare graficamente col poligono funicolare (S II-46).

***

18. - *Determinare col primo metodo dell'esercizio precedente, la risultante di un sistema di forze, disposte come in fig. 96, lungo i lati di un esagono regolare.*

Il risultante R delle forze vale due volte $A_6 - A_2$ cioè, se F è l'intensità delle forze, $4F\cos 30°$. Per trovare il momento risultante rispetto ad O si noti che, indicato con d la distanza del lato dell'esagono da O (d uguale a $l\cos 30°$; l, lato dell'esagono), la somma dei momenti statici, rispetto ad O, delle forze F_2, F_3, F_4, F_5 del sistema (tutte di uguale intensità F) vale $-4Fd$, mentre il momento delle altre due forze è $+2Fd$, sicché il momento totale è $-2Fd$.

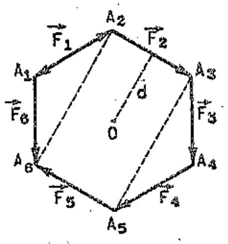

Fig. 96

La linea d'azione della risultante ha perciò una distanza d' da O di $\frac{2Fd}{R}$ parallela a $A_6 - A_2$ e dalla parte opposta rispetto ad O, in modo che il momento della risultante rispetto ad O risulti negativo. Ricordando il valore di R si ha:

$$d' = \frac{2Fd}{4F\cos 30°} = \frac{2Fl\cos 30°}{4F\cos 30°} = \frac{1}{2}$$

cioè la linea d'azione della risultante è $A_5 - A_3$. La risultante vale perciò una forza applicata in A_3 e uguale a due volte $A_5 - A_3$.

***

19. - *Quattro forze $\vec F_1$, $\vec F_2$, $\vec F_3$, $\vec F_4$, sono disposte, come in fig. 97, lungo i lati di un quadrilatero ABCD. Dimostrare che quelle forze equivalgono ad una sola la cui linea d'azione passa per la congiungente i punti di mezzo H e K delle diagonali AC e BD.*

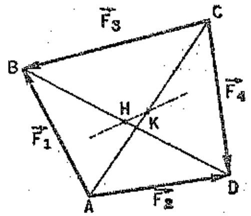

Fig. 97

Si potrebbero applicare i teoremi generali sull'equivalenza dei sistemi di forze, ma è più facile procedere così. La risultante di $\vec F_1$ e $\vec F_2$ passa per il punto H, così la risultante di $\vec F_3$ e $\vec F_4$, sicché le quattro forze equivalgono ad una sola che può essere applicata in H; in modo analogo componendo $\vec F_1$ con $\vec F_3$ poi $\vec F_2$ con $\vec F_4$ si trova la risultante delle quattro forze passante per K. Quindi la sua linea d'azione sarà la retta HK.

***

20. - *Determinare due forze $\vec F_1$ e $\vec F_2$ equivalenti ad un'unica forza $\vec F$ applicata nel punto A, sapendo che $\vec F_1$ e $\vec F_2$ formano fra loro un angolo α ($\alpha < \pi$) e che i punti d'applicazione di quelle forze sono rispettivamente A_1, A_2.*

Poiché $\vec F_1$, $\vec F_2$, $-\vec F$ formano un sistema di forze in equilibrio, le loro linee d'azione sono complanari (S I-24) cioè A_1A_2 e la linea d'azione di $\vec F$ giacciono nello stesso piano. Si consideri ora (fig. 98) l'arco di cerchio passante per A_1 e A_2 e capace dell'angolo α, sia O il punto d'incontro (di cui supporremo l'esistenza) fra questo arco e la linea di azione di $\vec F$. Poiché A_1O e A_2O formano un angolo uguale ad α esse saranno le linee delle forze $\vec F_1$ e $\vec F_2$ che potranno ottenersi in intensità decomponendo (es. 2) la $\vec F$ (supposta applicata in O) lungo AO e BO.

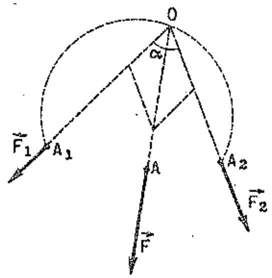

Fig. 98

***

21. - *Determinare la posizione dell'asse centrale di un sistema di forze nello spazio con risultante uguale a $\vec R$, momento risultante, rispetto al punto O, uguale a $\vec\Omega$.*

Sia O_1 il punto dell'asse centrale tale che OO_1 risulti normale a $\vec R$. Allora dette $\vec\Omega_1$ e $\vec\Omega_2$ le componenti di $\vec\Omega$ parallela e normale ad $\vec R$, poiché il momento delle forze rispetto ad O, vale $\vec\Omega$, si ha (S I-14):

$$\vec\Omega_1 = \vec\Omega + \vec R \times (O_1 - O) = \vec\Omega_1 + \vec\Omega_2 + \vec R \times (O_1 - O)$$

ossia:

$$\vec\Omega_2 = \vec R \times (O - O_1),$$

e poiché $\vec R$ è normale a $O - O_1$ per l'es. 16 del cap. I si ha:

$$O_1 - O = \frac{\vec{R}\times\vec{\Omega}_2}{R^2} = \frac{\vec{R}\times\vec{\Omega}}{R^2}$$

questa formula determina O_1 e perciò l'asse centrale che è parallelo a $\vec{R}$.

Al lettore non sfuggirà l'identità fra questo procedimento e quello usato nell'esercizio 20 del cap. III per la ricerca dell'asse istantaneo elicoidale nel moto di un corpo rigido (cfr. anche S II-48).

***

22. - *Determinare l'invariante* I *e l'asse centrale del sistema di due forze* $\vec{F}_1 = F_1\vec{i}$, $\vec{F}_2 = F_2\vec{j}$, *la prima applicata nell'origine, l'altra in un punto* A *dell'asse* z *distante* d *dall'origine.*

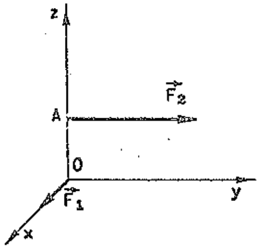

Fig. 99

Il momento risultante del sistema rispetto ad O vale (si tenga presente che il momento di $\vec{F}_1$ rispetto ad O è nullo e che $A - O = d\vec{k}$):

$$\vec{\Omega} = \vec{F}_2\times(O-A) = -dF_2\vec{j}\times\vec{k} = -dF_2\vec{i}.$$

Quindi:

$$I = \vec{R}\cdot\vec{\Omega} = (F_1\vec{i}+F_2\vec{j})\cdot\vec{\Omega} = -dF_1F_2.$$

Inoltre il punto O_1 dell'asse centrale, in base all'esercizio precedente, è dato dalla formula:

$$O_1 - O = \frac{(F_1\vec{i}+F_2\vec{j})\times(-dF_2\vec{i})}{F_1^2+F_2^2} = \frac{dF_2^2}{F_1^2+F_2^2}\vec{k}.$$

L'asse centrale, parallelo ad $\vec{R}$, incontra l'asse z nella sua parte positiva ad una distanza dall'origine:

$$\frac{dF_2^2}{F_1^2+F_2^2}.$$

***

23. - *Trovare sotto quali condizioni due sistemi di forze rispettivamente con risultante* $\vec{R}$ *e* $\vec{R}'$, *momento risultante* $\vec{\Omega}$ *e* $\vec{\Omega}'$ *(rispetto al medesimo punto* O*) hanno lo stesso asse centrale.*

Deve essere $\vec{R}$ parallelo ad $\vec{R}'$ e:

$$\frac{\vec{R}\times\vec{\Omega}}{R^2} = \frac{\vec{R}'\times\vec{\Omega}'}{R'^2}.$$

Supposti $\vec{R}$ e $\vec{R}'$, $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}'$ con la stessa origine si ha che $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}'$ devono essere complanari con $\vec{R}$ e $\vec{R}'$, dalla stessa parte rispetto ad $\vec{R}$ o da parte opposta a seconda che $\vec{R}$ ed $\vec{R}'$ hanno lo stesso verso o verso opposto. Inoltre se α e α' sono gli angoli fra $\vec{R}$ e $\vec{\Omega}$, $\vec{R}'$ e $\vec{\Omega}'$ deve essere:

$$\frac{\Omega\,\mathrm{sen}\,\alpha}{R} = \frac{\Omega'\,\mathrm{sen}\,\alpha'}{R'}$$

dove, ovviamente, α e α' sono gli angoli che formano $\vec{R}$ e $\vec{\Omega}$, $\vec{R}'$ e $\vec{\Omega}'$.

***

24. - *Dimostrare che un sistema di forze è equivalente a due forze (una applicata in un dato punto* A, *l'altra giacente in un dato piano* π *esterno ad* A*), oppure ad una forza e a una coppia (la prima applicata in* A, *la seconda giacente in* π*).*

Il sistema, preso come centro di riduzione il punto A, equivale ad una forza $\vec{F}$ applicata in A e ad una coppia che, se il suo momento $\vec{\Omega}$ è normale a (π), si può porre nel piano π stesso e il problema è risolto.

Se il momento $\vec{\Omega}$ non è normale a π si ponga la coppia in un piano π_1 passante per A. Se poi r è l'intersezione fra i due piani π, π_1 la coppia si può rappresentare mediante due forze, una $\vec{F}_1$ con r per linea d'azione, l'altra $-\vec{F}_1$ applicata in A; basterà, a questo scopo, che l'intensità di queste forze valga Ω divisa per la distanza d di A da r e che la forza sia orientata in modo che il momento della coppia valga $\vec{\Omega}$. Componendo $\vec{F}$ con $-\vec{F}_1$ ambedue applicate in A il sistema si riduce ad una forza in A, e l'altra sul piano π.

***

25. - *Determinare la risultante e il centro di tre forze parallele rispettivamente di intensità 3, 4, 5 kg; la prima e l'ultima applicata nei punti estremi della retta AB, la seconda nel suo punto medio M (fig. 100).*

La risultante fra la prima e la seconda vale 8 kg ed è applicata in un punto N tale che:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{5}{3}$$

da cui componendo:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{5}{8}$$

cioè $AN = 5/8\ AB$.

Allora la risultante fra le due forze applicate in A e N vale 12 kg ed è applicata nel punto C che è il centro delle tre forze determinato dalla relazione

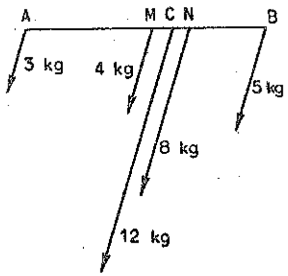

Fig. 100

$$\frac{MC}{NC} = \frac{8}{4}$$

ossia componendo:

$$\frac{MC}{MN} = \frac{8}{12}$$

$$MC = \frac{2}{3} MN = \frac{2}{3}\left(AN - \frac{AB}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\right) AB = \frac{AB}{12}$$

$$AC = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{12} = \frac{7}{12} AB$$

e in questo modo resta determinato il centro C.

Questo punto si determina più rapidamente con la considerazione del momento delle forze che possono sempre supporsi normali ad AB perché il centro è indipendente dalla direzione delle stesse forze (S II-36). Per l'equivalenza, il momento statico della risultante (che ha intensità $3+4+5 = 12$ kg) rispetto ad A vale il momento delle altre forze rispetto allo stesso punto, cioè:

$$12 \cdot AC = 5\ AB + 4\frac{AB}{2}$$

$$AC = \frac{7}{12} AB.$$

***

26 – *Trovare la risultante ed il centro di tre forze parallele, due cospiranti e uguali a 4 e 7 kg e applicate agli estremi* A *e* B *del segmento* AB, *la terza uguale a 8 kg in verso opposto alle altre due e applicata in un punto* D *di* AB *tale che* $AD = 1/3\ AB$.

La risultante di queste forze avrà un'intensità $7+4-8 = 3$ kg e il suo centro si può calcolare determinando il momento rispetto ad A come nell'esercizio precedente. Si ha:

$$3\ AC = 7\ AB - \frac{8}{3} AB$$

e il centro C è perciò alla destra di A distante 13/9 di AB.

***

27 – *Trovare la risultante di tre forze parallele cospiranti di intensità 1, 2, 3 kg applicate rispettivamente ai vertici* A, B, C, *di un triangolo (fig. 101).*

La risultante fra le prime due forze vale 3 kg ed è applicata nel punto H di AB tale che:

$$\frac{AH}{BH} = 2 \qquad \text{ossia:} \qquad BH = \frac{AB}{3}$$

La risultante fra questa forza e la rimanente varrà 6 kg e sarà applicata nel punto di mezzo M di CH.

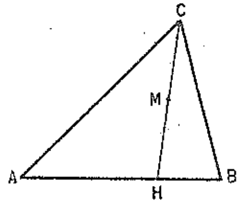

Fig. 101

***

28 – *Decomporre una forza* $\vec{F}$ *di 5 kg, applicata in* A, *in due forze parallele applicate nei punti* A_1 *e* A_2 *allineati con* A *e tali che* $A_1A = 4$, $AA_2 = 6$ *(fig. 102).*

Si ha infatti (S II-39), dette F_1 e F_2 le due forze:

$$F_1 = \frac{6}{10} \cdot 5 = 3\ kg$$

$$F_2 = \frac{4}{10} \cdot 5 = 2\ kg.$$

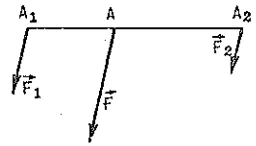

Fig. 102

***

29 – *Dato un sistema di* n *masse concentrate nei punti* P_s, *vale la relazione:*

$$(11) \qquad \sum_1^n{}_s m_s (P_s - G) = 0$$

se G è il loro baricentro. Dimostrare che questa relazione è valida solo per il baricentro cioè ponendo in luogo di G un altro punto $G_1 \neq G$ la (11) non risulta soddisfatta.

Infatti, se fosse:

$$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_s m_s (P_s - G_1) = 0,$$

sottranendo dalla (11) si avrebbe:

$$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_s m_s (G - G_1) = M(G - G_1) = 0,$$

cioè G coinciderebbe con G_1 contro l'ipotesi. La (11) è perciò proprietà caratteristica del baricentro e vale ovviamente anche se le masse sono distribuite su volumi, linee e superfici, sicché alla sommatoria si debba sostituire un integrale.

***

30 - *Dimostrare, valendosi della (11) dell'esercizio precedente, che se la superficie piana σ' è la proiezione ortogonale di un'altra superficie piana σ il baricentro di σ' è la proiezione del baricentro di σ (fig. 103).*

Il baricentro G di σ se Q è un suo punto generico soddisfa la relazione ([1]):

$$\int_\sigma (Q - G)\, d\sigma = 0. \tag{12}$$

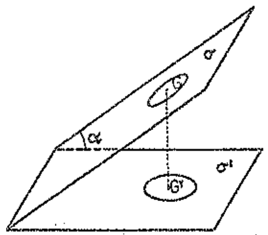

Fig. 103

Ora se Q' e G' sono le proiezioni di Q e G sul piano di σ' e α è l'angolo fra i due piani di σ e σ' il vettore $(Q - G)\, d\sigma$ ha per componente sul piano di σ' $(Q' - G')\, d\sigma = (Q' - G')\dfrac{d\sigma'}{\cos\alpha}$; perciò considerando la proiezione sul piano σ' del vettore a primo membro di (12) si ha:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_{\sigma'} (Q' - G')\, d\sigma' = 0 \qquad \int_{\sigma'} (Q' - G')\, d\sigma' = 0$$

cioè G' è il baricentro di σ'.

([1]) Come è noto (S. II-42-43) quando si parla di baricentro di volume, linea o superficie si suppone la densità costante che si può porre uguale ad uno essendo in questo caso il baricentro indipendente dal valore della densità.

***

31. - *Due superfici σ e σ' si trovano su piani paralleli e la seconda si ottiene dalla prima per proiezione da un punto V. Dimostrare che il baricentro G' di σ' si ottiene pure per proiezione dal baricentro G di σ.*

Infatti se G è il baricentro di σ e Q un punto generico di questa superficie si ha (fig. 104):

$$\int_\sigma (Q - G)\, d\sigma = 0$$

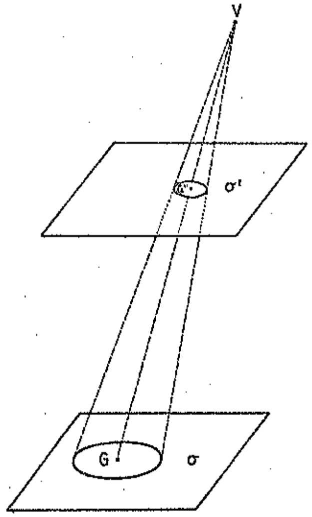

Fig. 104

Siano ora Q' la la proiezione di Q su σ' e G' quella di G, dσ' la proiezione di dσ. Poiché le superfici σ e σ' sono simili si avrà, se λ è il rapporto di similitudine:

$$P' - G' = \lambda(P - G), \qquad d\sigma' = \lambda^2\, d\sigma,$$

quindi:

$$\int_{\sigma'} (P' - G')\, d\sigma' = \lambda^3 \int_\sigma (P - G)\, d\sigma = 0,$$

e ciò comprova che G' è il baricentro di σ'.

***

32 - *Dimostrare che il baricentro di tre masse uguali poste nei vertici del triangolo ABC si trovano al punto d'incontro delle mediane del triangolo* ([1]).

Il baricentro delle due masse poste in A e B (fig. 105) sarà il punto di mezzo M di questo segmento, sicché il centro delle tre masse sarà sulla retta CM mediana rispetto

([1]) Si ricordi che il baricentro di un sistema di masse è il centro dei loro pesi, cosicché per il calcolo del baricentro si può procedere come per la composizione di un sistema di forze parallele e proporzionale alle masse. Le forze possono avere qualsiasi direzione; se le masse sono su una retta converrà supporre le forze normali alla retta stessa. In particolare, quando si parlerà di momento di una massa si intenderà momento di una forza di intensità proporzionale o anche uguale, numericamente, alla massa stessa.

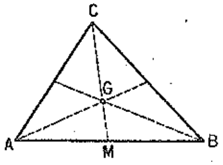

Fig. 105

ad AB. In modo analogo si dimostra che il baricentro si trova sulle altre due mediane del triangolo, sicché il baricentro delle tre masse è nel punto in cui si incontrano le mediane.

Resta in tal modo dimostrato il teorema di geometria elementare per cui le mediane di un triangolo si incontrano tutte tre nello stesso punto. Inoltre, essendo G il centro di due masse una posta in M e l'altra in C la prima doppia della seconda si ha $GM = GC/2 = MC/3$, $GC = 2/3\ CM$, cioè si ritrova un altro teorema di geometria elementare per cui le mediane si incontrano in un punto distante dal vertice di due terzi della loro lunghezza.

***

33. - *Dimostrare che il baricentro della superficie di un triangolo è nel punto d'incontro delle mediane.*

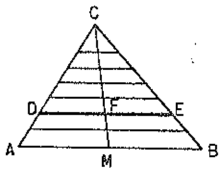

Fig. 106

A questo risultato si giunge con un ragionamento che si espone, in sostanza, nella fisica elementare. Mediante rette parallele alla base AB (fig. 106) si divide il triangolo in striscie di spessore infinitesimo. Il baricentro di ogni striscia è nel suo punto di mezzo e tutti questi punti sono allineati sulla mediana CM relativa al lato AB [1] quindi il baricentro di tutte queste striscie cioè quello del triangolo è sulla mediana CM. In modo analogo si prova che il baricentro è sulle altre due mediante, quindi il baricentro del triangolo è nel loro punto d'incontro.

***

34. - *Dimostrare che il baricentro di tre masse puntiformi poste nei vertici di un triangolo e proporzionali ai lati opposti si trova nel centro del cerchio inscritto al triangolo.*

[1] Una striscia di spessore infinitesimo si può assimilare ad un segmento che indicheremo con DE e sia F il suo punto di mezzo. Siccome i triangoli CDE e CAB sono simili sarà $C\hat{D}E = C\hat{A}B$, poi $CA : CD = AB : DE = AM : DF$ quindi anche CDF, AMC, sono simili, perciò $D\hat{C}F = A\hat{C}M$ ed F è sulla mediana AM.

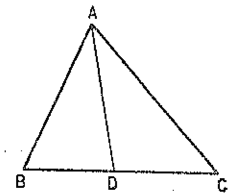

Fig. 107

Sia ABC il triangolo (fig. 107), il punto D centro delle masse in B e C deve essere tale che:

$$BD : DC = AB : AC$$

e, per un teorema di geometria elementare, AD è la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, quindi il centro delle tre masse è sulla AD. In modo analogo si dimostra che il baricentro si trova sulle altre due bisettrici del triangolo. Esso sarà dunque nel loro incrocio che è proprio il centro del cerchio inscritto al triangolo.

***

35. - *Trovare il baricentro del perimetro di un triangolo.*

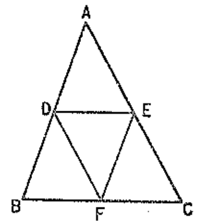

Fig. 108

Sia ABC (fig. 108) il triangolo, il baricentro dei tre lati è rispettivamente nei loro punti di mezzo D, E, F. Il baricentro del perimetro del triangolo dato è dunque quello di tre masse poste rispettivamente nei vertici del triangolo DEF e rispettivamente proporzionale ai lati AB, AC, BC, o che è lo stesso EF, DF, DE [1]. Quindi, per l'esercizio precedente, il baricentro del perimetro del triangolo sarà nel centro del cerchio inscritto in DEF, cioè nel centro del cerchio inscritto al triangolo con vertici i punti di mezzo dei lati relativi al triangolo dato.

***

36. - *Dimostrare che il baricentro di quattro masse uguali poste nei vertici VABC di una piramide a base triangolare (fig. 109) si trova sul segmento che unisce il vertice col baricentro di una faccia opposta, ad una distanza dal vertice uguale ai tre quarti di questo segmento.*

Il baricentro delle tre masse poste in A, B, C sarà (es. 32) nel baricentro G' del triangolo ABC. Il baricentro delle quattro masse sarà quello di una massa in A e di un'altra tripla in G', cioè sarà un punto G di AG' tale che:

[1] Infatti $EF = AB/2$, $DE = BC/2$, $DF = AC/2$.

$$\frac{VG}{GG'} = 3$$

e componendo:

$$\frac{VG}{VG'} = \frac{3}{4}$$

conforme all'enunciato dell'esercizio. Ovviamente il baricentro delle quattro masse si troverà sui segmenti che congiungono gli altri tre vertici della piramide coi baricentri delle facce opposte. Resta così provato anche il teorema per cui i segmenti che uniscono i vertici di una piramide triangolare coi baricentri delle facce opposte si incontrano tutti nello stesso punto ad una distanza dai vertici uguale ai tre quarti dai segmenti stessi.

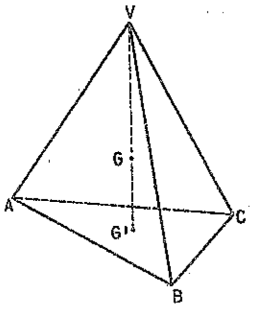

Fig. 109

***

37 - *Trovare il baricentro di una piramide triangolare* VABC *(fig. 110).*

Mediante un sistema di piani paralleli alla base si divida la piramide in prismi di altezza infinitesima. Ognuno di questi ha il baricentro lungo la retta VG_1 che congiunge il vertice V col baricentro G_1 della base opposta [1] perciò il baricentro della piramide sarà su VG_1.

Dividendo ora la piramide in prismi con piani paralleli a un'altra faccia si ha subito che il baricentro si trova all'incrocio delle rette che uniscono un vertice col baricentro della faccia opposta, cioè (vedi esercizio precedente) nel punto G che dista da un vertice di tre quarti del segmento che unisce lo stesso vertice col baricentro della base.

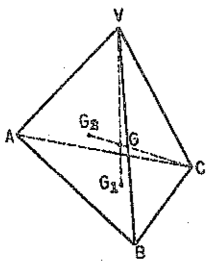

Fig. 110

[1] Infatti un generico di questi prismi si può assimilare al suo triangolo di base che è proiezione da V del triangolo ABC. Per l'esercizio 31 il baricentro del prisma si otterrà proiettando G_1 cioè, sarà sulla retta VG_1, come si è affermato nel testo.

***

38. - *Trovare il baricentro di una piramide qualunque (fig. 111).*

Decomposta la base in triangoli, la piramide si può considerare come una somma di piramidi triangolari i cui baricentri giacciono su un piano distante dal vertice di un segmento uguale ai 3/4 dell'altezza della piramide data. D'altra parte dividendo la piramide mediante piani paralleli alla base e distanti fra loro di una quantità infinitesima, si trova, ragionando come nell'esercizio precedente, che il baricentro giace sulla retta VG_1 che unisce il vertice col baricentro della base. Quindi, in generale, il baricentro G della piramide si trova a tre quarti del segmento che unisce il suo vertice col baricentro della base.

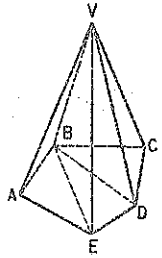

Fig. 111

Lo stesso risultato vale per il cono che si può considerare come limite di piramidi.

***

39. - *Determinare il baricentro di una cosiddetta sezione a T formata da due rettangoli* ABCD *e* EFHK, *disposti come in fig. 112, cioè con il lato* KE *su* DC *in modo tale che sia* DK = EC, AB = a, BC = b, EK = c, KH = d.

Il baricentro G della figura si ottiene osservando che essa può scomporsi nei rettangoli ABCD e EFHK, i cui baricentri G_1 e G_2 sono sull'incrocio delle diagonali dei rettangoli, quindi G sarà sulla retta G_1G_2 e coinciderà con il centro di due masse ab e cd poste in questi due punti. Allora, indicato con δ la distanza di G dal punto M, il momento delle due masse rispetto a M [1] deve essere uguale a quello della massa risultante ab + cd posta in G sicché si ha (ricordando $MG_1 = \frac{b}{2}$, $MG_2 = b + \frac{d}{2}$):

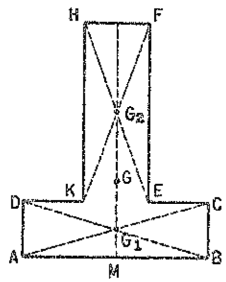

Fig. 112

[1] Come si è già osservato nell'esercizio 32 questo momento equivale a quello della forza uguale numericamente alla massa e diretta normalmente alla retta G_1G_2 in cui si trovano le masse.

$$(ab+cd)\,\delta = ab\cdot\frac{b}{2}+cd\left(b+\frac{d}{2}\right)$$

da cui:

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2+2bcd+cd^2}{ab+cd}\right).$$

***

40. - *Determinare il baricentro dell'area S compresa fra due cerchi c e c', rispettivamente di centro O e O' (OO' = d) e di raggio r e r_1, il secondo interno al primo (fig. 113).*

Per simmetria il baricentro è sulla retta OO'. Per trovare la sua posizione si può seguire il cosiddetto procedimento per differenza che consiste nel riguardare l'area S come differenza fra l'area dei due cerchi. Infatti il baricentro del cerchio maggiore è il centro delle due masse una uguale a S e posta nel suo baricentro, l'altra uguale a $\pi r'^2$ e posta in O'. Sicché il baricentro di S è quello di due masse $-\pi r'^2$, πr^2 poste rispettivamente in O' e O o, se si vuole, il centro di due forze parallele, di verso opposto, applicate in O' e O e uguali a $-\pi r'^2$, πr^2. Allora, se G è il baricentro di S, si ha uguagliando i momenti rispetto ad O:

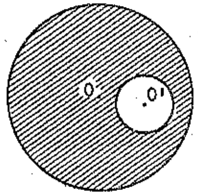

Fig. 113

$$\pi(r^2-r'^2)\,OG = -\pi r'^2 d,$$

quindi:

$$OG = -\frac{r'^2 d}{r^2-r'^2}.$$

***

41. - *Determinare il baricentro di un trapezio di basi b_1 e b_2 altezza h (fig. 114).*

Sia ABCD il trapezio, b_1 e b_2 le due basi $(b_1 > b_2)$, H la distanza fra i punti medi M_1 e M_2 delle basi stesse. Il baricentro del trapezio sarà il centro di due masse di segno opposto poste nei punti G_1 e G_2 baricentri dei triangoli ABK, DCK e proporzionali alle loro aree, essendo K il punto di incrocio dei lati

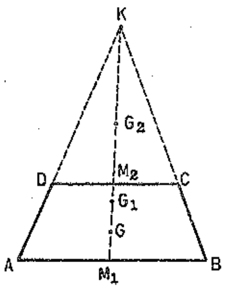

Fig. 114

obliqui del trapezio. Il baricentro sarà sulla retta G_1G_2 che coincide con M_1M_2. Allora uguagliando i momenti del trapezio e dei triangoli rispetto al punto G_1, osservando che le aree dei triangoli sono proporzionali ai quadrati delle loro basi b_1 e b_2 sicché l'area del trapezio è proporzionale a $b_1^2 - b_2^2$, si ha:

$$GG_1 = \frac{-b_2^2 G_1G_2}{b_1^2-b_2^2}.$$

Ma:

$$G_1G_2 = M_1G_2 - M_1G_1 = M_1M_2 + M_2G_2 - M_1G_1 =$$

$$= H + \left(\frac{KM_2 - KM_1}{3}\right) = H - \frac{H}{3} = \frac{2}{3}H.$$

Inoltre dalla similitudine dei triangoli AKB, DKC:

$$\frac{KM_1}{KM_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

e scomponendo:

$$\frac{KM_1}{H} = \frac{b_1}{b_1-b_2}; \qquad KM_1 = \frac{b_1H}{b_1-b_2}.$$

Quindi:

$$G_1M_1 = \frac{KM_1}{3} = \frac{b_1H}{3(b_1-b_2)},$$

$$M_1G = M_1G_1 - G_1G = \frac{1}{3}\,\frac{b_1H}{b_1-b_2} - \frac{2}{3}\,\frac{b_2^2H}{b_1^2-b_2^2} = \frac{1}{3}\,\frac{b_1^2+b_1b_2-2b_2^2}{b_1^2-b_2^2}\,H =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(b_1-b_2)(b_1+2b_2)}{(b_1-b_2)(b_1+b_2)}\,H = \frac{1}{3}\,\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2}\,H.$$

Questa formula dà la posizione del baricentro. Si ha poi:

$$M_2G = H - \frac{1}{3}\,\frac{b_1+2b_2}{(b_1+b_2)}\,H = \frac{2b_1+b_2}{3(b_1+b_2)}\,H$$

e perciò:

$$\frac{M_1G}{M_2G} = \frac{b_1+2b_2}{2b_1+b_2}.$$

***

42. - *Dimostrare che il baricentro di un quadrangolo convesso si trova congiungendo il punto d'incontro delle diagonali con il punto di mezzo del segmento che unisce* *i punti medi delle diagonali stesse e prolungando questo segmento di un terzo della sua lunghezza (fig. 115).*

Il baricentro del quadrangolo ABCD è il baricentro delle due masse proporzionali alle aree dei triangoli ABD e BCD e applicate nei loro baricentri. Ora detto O il punto di incontro delle diagonali, le aree di questi due triangoli di ugual base BD sono proporzionali alle loro altezze che, alla loro volta, sono proporzionali alle rette $OA = a$, $OC = c$.

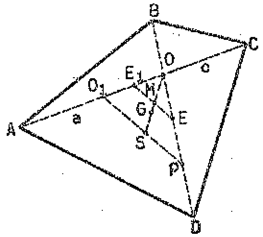

Fig. 115

Per quanto si è visto nell'esercizio 32 una massa proporzionale all'area di un triangolo e posta nel suo baricentro è equivalente a tre masse ad essa proporzionali e poste nei vertici; quindi il baricentro del quadrilatero è il baricentro di tre masse proporzionali ad a e poste in A, B, D e altre tre proporzionali a c, e poste in B, C, D, ossia il baricentro di quattro masse, due proporzionali ad $a+c$, e poste in B e D, due proporzionali ad a e c e poste rispettivamente in A e C.

Le due prime equivalgono ad una massa sola proporzionale a $2(a+c)$ e posta nel punto di mezzo E di BD, o che è lo stesso, a due masse proporzionali a $a+c$, poste rispettivamente in O e P essendo $OE = EP$. Le altre due masse equivalgono ad una sola, proporzionale anch'essa a $a+c$, posta nel punto O_1 tale che $AO_1 : O_1C = c : a$, ossia $AO_1 : O_1C = CO : OA$, da cui componendo si ha subito: $AO_1 = CO$ e il punto medio E_1 fra OO_1 è perciò il punto medio di AC.

In definitiva il baricentro del quadrangolo è il baricentro di tre masse uguali poste ai vertici del triangolo OO_1P, cioè il baricentro di questo triangolo. Questo si troverà sulla sua mediana OS che passa per il punto di mezzo M di EE_1 (che è la retta che congiunge i punti medi dei due lati del triangolo) ad una distanza da O uguale a $2/3\ OS = 4/3\ OM = OM + 1/3\ OM$, cioè il baricentro si trova nella posizione indicata nell'enunciato dell'esercizio.

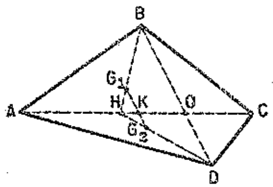

Fig. 116

Il baricentro di un quadrangolo si può anche costruire nel seguente modo (fig. 116).

I baricentri G_1 e G_2 di ABC e ADC sono a 2/3 rispettivamente dei segmenti BH e DH sicché la G_1G_2 è parallela alla base BD del triangolo BDH che è simile a G_1HG_2. Il baricentro del quadrangolo è dunque il centro di due masse poste in G_1 e G_2 e rispettivamente proporzionali alle aree ABC, ADC cioè, come si è osservato precedentemente, a BO o OD, o, che è lo stesso (per la similitudine fra $BOH\ G_1KH$, $DOH\ G_2KH$) a G_1K, KG_2. Quindi il baricentro G è sulla retta G_1G_2 ed è tale che $GG_1 : GG_2 = KG_2 : KG_1$ e componendo si ha subito $GG_1 = KG_2$, $GG_2 = G_1K$. Cioè il baricentro si ottiene portando sulla G_1G_2 da G_1 la G_2K o da G_2 la G_1K.

È ovvio, da quanto precede, che il baricentro di un parallelogramma è all'incrocio delle diagonali.

***

43 - *Trovare il baricentro di un settore circolare di raggio r, apertura α.*

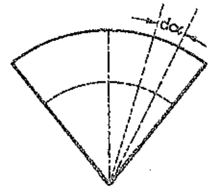

Fig. 117

Si divida (fig. 117) il settore mediante rette uscenti dal suo centro in settori infinitesimi di apertura $d\alpha$. Ognuno di questi settori infinitesimi è assimilabile ad un triangolo perciò il suo baricentro si troverà a 2/3 r da O. Dunque, tutti i baricentri dei settori infinitesimi formano un arco di raggio 2/3 r, il cui baricentro coincide con quello del settore dato, esso sarà perciò sulla bisettrice dell'arco ad una distanza da O che, ricordando la posizione del baricentro di un arco di cerchio (S II-45), vale:

$$y_G = \frac{2}{\alpha}\frac{2}{3} r \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3} r \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

In particolare per un semicerchio si ha:

$$y_G = \frac{4r}{3\pi}.$$

***

44 - *Determinare il baricentro di un settore di corona circolare di apertura α raggi r_1 e r_2 $(r_1 > r_2)$.*

L'area (fig. 118) è la differenza fra le aree dei settori circolari di raggio r_1 e r_2, perciò il baricentro del settore sarà il centro di due forze parallele, πr_1^2,

$-\pi r_2^2$, di verso opposto, applicate rispettivamente nei punti G_1 e G_2 o il baricentro di due masse πr_1^2, $-\pi r_2^2$ poste negli stessi punti. Il baricentro G sarà perciò nella bisettrice dei settori e uguagliando i momenti rispetto ad O avremo:

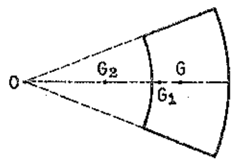

Fig. 118

$$\pi(r_1^2 - r_2^2)\,OG = \pi r_1^2 OG_1 - \pi r_2^2 OG_2$$

da cui:

$$OG = \frac{r_1^2 OG_1 - r_2^2 OG_2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{4}{3}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

***

45. - *Determinare il baricentro di un arco in muratura, schematicamente rappresentato dalla regione compresa fra un rettangolo di lati* a *e* b *e un semicerchio di raggio* r $(r < \frac{a}{2},\ r < b)$ *come in fig. 119; il centro del cerchio si trova sul punto di mezzo* A *del lato del rettangolo lungo* a.

La figura è la differenza fra un rettangolo e un semicerchio, il baricentro G si trova quindi sulla mediana AN del rettangolo ed è il baricentro di due masse ab e $-\frac{\pi r^2}{2}$, la prima posta in G_1 tale che $AG_1 = b : 2$, l'altra in G_2 tale che $AG_2 = \frac{4r}{3\pi}$ (es. 43). Se G è il baricentro cercato uguagliando i momenti rispetto ad A, si ottiene:

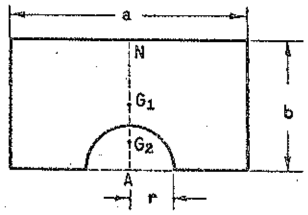

Fig. 119

$$\left(ab - \frac{\pi r^2}{2}\right) AG = abAG_1 - \frac{\pi r^2}{2} AG_2$$

da cui:

$$AG = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 - \frac{4}{3}r^3}{ab - \frac{\pi r^2}{2}}.$$

***

46. - *Determinare il baricentro di una scatola senza coperchio, a forma cilindrica, raggio di base* r *altezza* h *con spessore così piccolo da poterla assimilare alla sua superficie esterna (fig. 120).*

Si deve trovare il baricentro G di una superficie cilindrica e del suo cerchio di base. Esso sarà sull'asse OH del cilindro e sarà il baricentro delle masse πr^2, $2\pi r h$ poste rispettivamente nel centro O del cerchio e nel punto M dell'asse distante h/2 da O.

Uguagliando i momenti rispetto ad O:

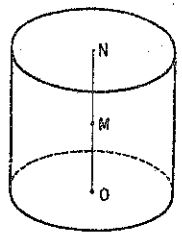

Fig. 120

$$OG(\pi r^2 + 2\pi r h) = 2\pi r h \cdot \frac{h}{2}$$

$$OG = \frac{rh^2}{r^2 + 2rh} = \frac{h^2}{r + 2h}.$$

***

47. - *Determinare il baricentro di una scatola cubica, di spigolo* a, *senza coperchio.*

Detto O il baricentro della base, il baricentro della scatola sarà sulla normale alla base per O. Ragionando come nell'esercizio precedente si ha:

$$OG(a^2 + 4a^2) = 4a^2\,\frac{a}{2}$$

da cui:

$$OG = \frac{2}{5}\,a.$$

***

48. - *Dimostrare i seguenti teoremi (di Guldino):*

a) La superficie ottenuta ruotando una curva piana intorno a una retta del suo piano, che non la incontra, vale la lunghezza della curva per la circonferenza percorsa dal suo baricentro.

b) Il volume generato da una superficie piana che ruota intorno ad un asse del suo piano che non la incontra, vale l'area della superficie per la circonferenza descritta dal baricentro.

Per dimostrare il teorema a) si ponga (fig. 121) un sistema di assi x e y, l'asse x coincidente con l'asse di rotazione, l'asse y dalla parte del piano in cui si trova la curva.

Si divida mediante parallele all'asse y, la linea in elementi dl, ognuno dei quali, ruotando, descriverà un tronco di cono di lato dl con semisomma dei raggi di base uguale, a meno di infinitesimi, alla y di un punto qualunque di dl; perciò l'area descritta da dl vale $2\pi y\,dl$, l'area totale $\mathcal{A}$ descritta dalla linea sarà:

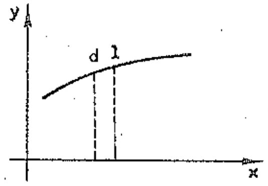

Fig. 121

$$\mathcal{A} = 2\pi\int_l y\,dl = 2\pi l\, y_G,$$

dove y_G è la y del baricentro; allora poiché $2\pi y_G$ è la circonferenza descritta dal baricentro l'equazione ora scritta esprime il teorema in discorso.

Quanto al teorema b) (fig. 122) si divida l'area σ in elementi $d\sigma$, ogni elemento descrive il volume [1] $2\pi y\,d\sigma$, sicché il volume V descritto dall'area vale:

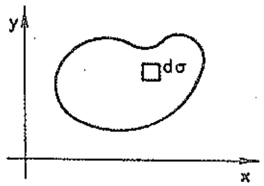

Fig. 122

$$V = 2\pi\int_\sigma y\,d\sigma = 2\pi\, y_G\, \sigma \tag{18}$$

che esprime il secondo teorema di Guldino.

***

49. - *Mediante il teorema di Guldino determinare il baricentro di una semiellisse di assi a e b (fig. 123).*

Riferita l'ellisse ai suoi assi la semiellisse corrisponda ai valori $y > 0$. Il baricentro sarà sull'asse y quindi $x = 0$; quanto a y_G, si avrà (essendo il volume generato dalla semiellisse quello di un ellissoide di semiassi a, b, b), per la (18) dell'esercizio precedente:

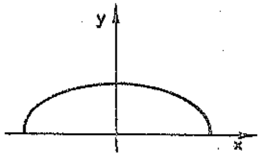

Fig. 123

[1] Infatti se la figura ruota dell'angolo $d\varphi$, $d\sigma$ descrive un prisma di base $d\sigma$, altezza $y\,d\varphi$ quindi il volume $y\,d\sigma\,d\varphi$. Il volume totale descritto dalla nostra area $d\sigma$ sarà l'integrale da 0 a 2π esteso a φ di questa espressione, cioè $2\pi y\,d\sigma$ come è scritto nel testo.

$$2y_G\pi\,\frac{\pi ab}{2} = \frac{4}{3}\pi\, ab^2$$

ossia:

$$y_G = \frac{4}{3\pi}\, b.$$

***

50. - *Ritrovare il baricentro dell'esercizio precedente mediante il teorema del numero 30.*

La semiellisse è la proiezione ortogonale di un semicerchio che ha per diametro l'asse a dell'ellisse e si trova su un piano che con quello della ellisse stessa forma un angolo α il cui coseno è $\frac{b}{a}$. Allora, se $\bar{y}_G$ è la distanza del baricentro del semicerchio dal suo centro, si ha:

$$y_G = \bar{y}_G \cos\alpha = \frac{4}{3\pi}a\frac{b}{a} = \frac{4}{3\pi}b,$$

conforme all'esercizio precedente.

***

51. - *Determinare il baricentro dell'area di un segmento parabolico (Archimede).*

La parabola sia di equazione $y = \sqrt{2px}$ (fig. 124). Determiniamo il baricentro dell'area compresa fra l'arco di parabola, l'asse x e la retta parallela all'asse y di ascissa $x = a$. Il punto estremo B della parabola avrà allora per coordinate a e b uguale $\sqrt{2pa}$.

Per le formule del baricentro (S II-42):

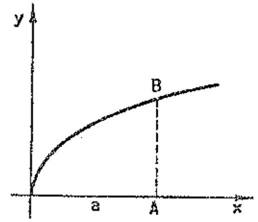

Fig. 124

$$x_G = \frac{\iint_{(\sigma)} x\,dx\,dy}{\sigma}, \qquad y_G = \frac{\iint_{(\sigma)} y\,dx\,dy}{\sigma},$$

dove le integrazioni sono estese al segmento parabolico e σ è la sua area.

Ora si ha:

$$\iint_{(\sigma)} x\,dx\,dy = \int_0^a x\,dx\int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^a \sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = \sqrt{2p}\,\frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}a^2 b,$$

$$\iint_{(\sigma)} y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2px}} y\,dy = \int_0^a px\,dx = \frac{pa^2}{2} = \frac{ab^2}{4}$$

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} dx\,dy = \int_0^a \sqrt{2px}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\,px^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}\sqrt{2pa}\,a = \frac{2}{3}\,ab,$$

quindi:

$$x_G = \frac{3}{5}\,a, \qquad y_G = \frac{3}{8}\,b.$$

***

52. – *Determinare il baricentro dell'arco di catenaria di equazione:*

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) - b$$

compreso fra i punti di ascissa $-a$ *e* a.

Poiché questa curva è simmetrica rispetto all'asse x, si ha che la x_G del baricentro è nulla. Per y_G vale la formula (S II-43):

$$y_G = \frac{1}{s}\int_s y\,ds.$$

Ora si ha (cfr. cap. II, Es. 25):

$$ds = \frac{y+b}{b}\,dx;$$

inoltre la lunghezza dell'arco $\frac{s}{2}$ fra 0 e a vale (cfr. esercizio citato):

$$\frac{s}{2} = \frac{b}{2}\,(e^{\frac{a}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}).$$

Valutiamo l'integrale che compare nell'espressione di y_G. Si ha:

$$\int_{-a}^{a} \frac{y\,(y+b)}{b}\,dx = \int_{-a}^{a}\frac{(y+b)^2}{b}\,dx - \int_{-a}^{a}(y+b)\,dx =$$

$$= \frac{b}{4}\int_{-a}^{a}(e^{\frac{2x}{b}} + e^{-\frac{2x}{b}})\,dx + ba - \frac{b}{2}\int_{-a}^{a}(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}})\,dx =$$

$$= \frac{b^2}{4}(e^{\frac{2a}{b}} - e^{-\frac{2a}{b}}) + ba - b^2\,(e^{\frac{a}{b}} - e^{-\frac{a}{b}});$$

quindi è:

$$y_G = \frac{b}{4}\,(e^{\frac{a}{b}} + e^{-\frac{a}{b}}) + \frac{a}{e^{\frac{a}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}} - b.$$

***

53. – *Trovare il baricentro di un'elica cilindrica di raggio* a, *lunghezza* l, *passo* p.

Poniamo un sistema di assi con la z lungo l'asse del cilindro, l'asse x passi per un primo estremo della curva che si avrà perciò per $y = z = 0$.

Le equazioni dell'elica saranno (posto $h = \frac{2\pi}{p}$):

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = h\theta,$$

un estremo di essa si avrà per $\theta = 0$ l'altro estremo si avrà per $\theta = \theta_0$. Supporremo per semplicità $\theta_0 > 0$. Si ha intanto:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{a^2 + h^2}\,d\theta,$$

quindi:

$$l = \sqrt{a^2 + h^2}\,\theta_0, \qquad \theta_0 = \frac{l}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

perciò (S II-42):

$$x_G = \frac{\int_l x\,dl}{l} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}\;a\int_0^{\theta_0}\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2+h^2}\,\theta_0} = a\,\frac{\mathrm{sen}\,\theta_0}{\theta_0},$$

$$y_G = \frac{\int_l y\,dl}{l} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}\;a\int_0^{\theta_0}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2+h^2}\,\theta_0} = \frac{a\,(1-\cos\theta_0)}{\theta_0},$$

$$z_G = \frac{\int_l z\,dl}{l} = \frac{h\int_0^{\theta_0}\theta\,d\theta}{\theta_0} = \frac{h\theta_0}{2} = \frac{z_0}{2}$$

dove z_0 è l'ordinata dell'altro estremo dell'elica.

***

54. – *Determinare il baricentro di una semisfera di raggio* R.

Se l'asse z coincide con l'asse di simmetria della semisfera si avrà $x_G = y_G = 0$.

Si divida (fig. 125) mediante piani normali all'asse la semisfera in segmenti sferici di altezza infinitesima. Il segmento sferico, compreso fra i piani di ordinata z, z + dz avrà, a meno di infinitesimi di ordine superiore, volume uguale a $\pi(R^2 - z^2)\,dz$ e il suo baricentro avrà ordinata z, quindi:

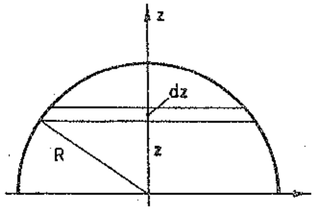

Fig. 125

$$z_G = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3}\int_0^R \pi z\,(R^2 - z^2)\,dz = \frac{3}{2R^3}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{3}{8}R.$$

***

55. - *Trovare il baricentro di una zona sferica di altezza* h *e raggio* r.

Si faccia coincidere (fig. 126) l'asse z con l'asse della zona. Il baricentro sarà, per simmetria, sull'asse z, quindi $x_G = y_G = 0$. Siano poi z_1 e z_2 le ordinate dei due piani che limitano la zona, quindi $z_1 - z_2 = h$.

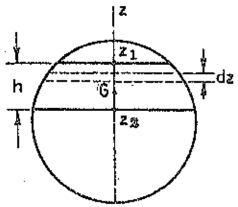

Fig. 126

Ciò posto, mediante piani normali all'asse, dividiamo la zona sferica in zone infinitesime di altezza dz. Ognuna di queste avrà baricentro sull'asse z e area $2\pi r\,dz$. Il baricentro della zona coinciderà con quello di un sistema di masse $2\pi r\,dz$ poste sull'asse z fra z_1 e z_2. Si avrà così:

$$z_G = \frac{\int_{z_1}^{z_2} 2\pi r z\,dz}{\int_{z_1}^{z_2} 2\pi r\,dz} = \frac{\pi r\,(z_2^2 - z_1^2)}{2\pi r\,(z_2 - z_1)} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Cioè il baricentro della zona è sull'asse di simmetria a metà dell'altezza della zona stessa.

***

56. - *Trovare il baricentro di una colonna di aria a forma di cilindro circolare, di altezza* h *tale che la sua*

base sia nel piano xy e la z secondo l'asse del cilindro, qualora la densità dell'aria vari con la legge $\rho = \rho_0 e^{-kz}$ *dove* ρ_0 *è la densità per* $z = 0$, k *una costante.*

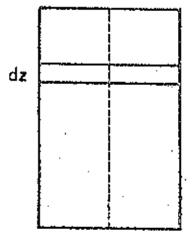

Fig. 127

Mediante piani paralleli alle basi (figura 127) si divida il cilindro in strati infinitesimi; quello compreso fra i piani z e z + dz avrà, se S è l'area della base del cilindro, massa $\rho_0 e^{-kz} S\,dz$ e baricentro sull'asse del cilindro stesso e ordinata z. Perciò il baricentro della colonna sarà quello delle masse in discorso poste sull'asse del cilindro e la sua altezza varrà:

$$z_G = \frac{\int_0^h \rho S z\,dz}{\int_0^h \rho S\,dz} = \frac{\int_0^h e^{-kz} z\,dz}{\int_0^h e^{-kz}\,dz};$$

ora si ha:

$$\int_0^h e^{-kz}\,dz = -\frac{1}{k}\left[e^{-kz}\right]_0^h = \frac{1}{k}\left[1 - e^{-kh}\right];$$

d'altronde, integrando per parti, si ha:

$$\int_0^h z e^{-kz}\,dz = -\left[z\,\frac{e^{-kz}}{k}\right]_0^h + \frac{1}{k}\int_0^h e^{-kz}\,dz = -\frac{he^{-kh}}{k} + \frac{1}{k^2}\,(1 - e^{-kh}),$$

e sostituendo nell'espressione di z_G si trova la posizione del baricentro cercato. Cioè:

$$z_G = \frac{-hke^{-kh} + (1 - e^{-kh})}{k\,(1 - e^{-kh})}.$$

Se h è così grande da ritenere e^{-kh} trascurabile si ha:

$$z_G = \frac{1}{k}$$

***

57. - *Si chiamano coordinate astatiche di un sistema di forze* $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots, \vec{F}_s \ldots, \vec{F}_n$, *applicate rispettivamente nei punti* $A_1, A_2 \ldots, A_n$ *di un corpo rigido, le nove espressioni*

$$\sum_1^n{}_s x_s X_s, \quad \sum_1^n{}_s x_s Y_s, \quad \sum_1^n{}_s x_s Z_s, \quad \sum_1^n{}_s y_s X_s, \quad \sum_1^n{}_s y_s Y_s,$$
$$\sum_1^n{}_s y_s Z_s, \quad \sum_1^n{}_s z_s X_s, \quad \sum_1^n{}_s z_s Y_s, \quad \sum_1^n{}_s z_s Z_s,$$

dove x_s, y_s, z_s *sono le coordinate di* A_s; X_s, Y_s, Z_s *le componenti di* $\vec{F}_s$ *rispetto al sistema di assi* O, x, y, z *a cui si riferisce la posizione del corpo. Dimostrare che se il sistema di forze ha risultante nullo e, in una certa posizione del corpo, le coordinate astatiche sono tutte nulle, il sistema di forze è in equilibrio comunque si cambi la posizione del corpo rigido, purché le forze siano applicate sempre negli stessi punti del corpo, e rimangano invariati i vettori che le rappresentano, o meglio, le loro componenti, rispetto ad* O, x, y, z.

Poiché le componenti del momento risultante sono una combinazione lineare delle coordinate astatiche (ad esempio $\Omega_x = \sum_1^n{}_s y_s Z_s - \sum_1^n{}_s z_s Y_s$) se le coordinate astatiche sono nulle è nullo anche il momento risultante. Quindi poiché il risultante del sistema di forze è nullo il sistema è in equilibrio nella posizione del corpo considerata che, per brevità, diremo iniziale. Supponiamo ora il corpo rimosso da quella posizione, il risultante, per le nostre ipotesi, rimane nullo. Si considerino ora le coordinate astatiche rispetto a un sistema O', x', y', z' collegato col corpo e coincidente con O, x, y, z nella posizione iniziale del corpo stesso. Rispetto a questo sistema le coordinate del punto A_s sono sempre x_s, y_s, z_s mentre le componenti delle forze $\vec{F}_s$, X_s', Y_s', Z_s' sono date dalle formule dell'esercizio 13 del cap. I. Si ha così per le nostre ipotesi:

$$\sum_1^n{}_s X_s' x_s = \alpha_1 \sum_1^n{}_s X_s x_s + \alpha_2 \sum_1^n{}_s Y_s x_s + \alpha_3 \sum_1^n{}_s Z_s x_s = 0,$$

e nello stesso modo si dimostra che tutte le altre coordinate astatiche del sistema di forze riferite a O', x', y', z' sono nulle in qualunque posizione del corpo; il sistema di forze ha perciò sempre risultante e momento risultante nullo, cioè esso è in equilibrio comunque si sposti il corpo.

Possiamo perciò affermare che un corpo rigido, libero, soggetto ad un sistema di forze con coordinate astatiche nulle, o più brevemente ad un sistema astatico è in equilibrio in qualunque luogo dello spazio. Esempi di sistemi astatici sono due forze uguali e opposte con lo stesso punto di applicazione, l'insieme di due sistemi di forze parallele, di egual direzione, verso opposto, ugual centro, ecc..