

PROGRAMMA DI MATEMATICA, FISICA, ELETTRONICA

- Mario Ageno, *Elementi di fisica*
T.M. Apostol, *Calcolo*
Vol. 1 *Analisi 1*
Vol. 2 *Geometria*
Vol. 3 *Analisi 2*
Michiel Bertsch, *Istituzioni di matematica*
Scipione Bobbio e Emilio Gatti, *Elettromagnetismo Ottica*
Max Born, *Fisica atomica*
Stefano Campi, Massimo Picardello e Giorgio Talenti, *Analisi matematica e calcolatori*
Vito Cappellini, *Elaborazione numerica delle immagini*
Francesco Carassa, *Comunicazioni elettriche*
Sergio Carrà, *Termodinamica: aspetti recenti e applicazioni alla chimica e all'ingegneria*
Claudio Citrini, *Analisi matematica 1*
Claudio Citrini, *Analisi matematica 2*
P.A.M. Dirac, *I principi della meccanica quantistica*
Albert Einstein, *Il significato della relatività*
Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica analitica con elementi di meccanica statistica e dei continui*
Enrico Fermi, *Termodinamica*
Bruno Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*
Giorgio Franceschetti, *Campi elettromagnetici*
Giovanni Gallavotti, *Meccanica elementare*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 2*
Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica (vol. 1)*
Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica (vol. 2)*
Angelo Guerraggio, *Matematica generale*
Hermann Haken e Hans C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica*
Werner Heisenberg, *I principi fisici della teoria dei quanti*
Gerhard Herzberg, *Spettri atomici e struttura atomica*
David A. Hodges e Horace G. Jackson, *Analisi e progetto di circuiti integrati digitali*
Charles Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*
Charles Kittel e Herbert Kroemer, *Termodinamica statistica*
Serge Lang, *Algebra lineare*
Giorgio Letta, *Teoria elementare dell'integrazione*
P. F. Manfredi, Piero Maranesi e Tiziana Tacchi, *L'amplificatore operazionale*
Jacob Millman, *Circuiti e sistemi microelettronici*
Jacob Millman e C.C. Halkias, *Microelettronica*
R.S. Muller e T.I. Kamins, *Dispositivi elettronici nei circuiti integrati*
Athanasios Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*
Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*
Giovanni Prodi, *Analisi matematica*
Antonio Ruberti e Alberto Isidori, *Teoria dei sistemi*
Walter Rudin, *Analisi reale e complessa*
H. H. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*
Edoardo Sernesi, *Geometria 1*
I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e di geometria*
W.V. Smith e P.P. Sorokin, *Il laser*
Giovanni Soncini, *Tecnologie microelettroniche*
Guido Tartara, *Teoria dei sistemi di comunicazione*
Bruno Touschek e Giancarlo Rossi, *Meccanica statistica*

ANTONIO FASANO
STEFANO MARMÌ

MECCANICA ANALITICA

CON ELEMENTI DI MECCANICA STATISTICA
E DEI CONTINUI



BOLLATI BORINGHIERI

Capitolo 1

Fondamenti geometrici e cinematici della meccanica lagrangiana

La geometria è l'arte di ragionare bene
partire da figure disegnate male¹

1.0 Introduzione

Il primo passo per costruire un modello matematico per lo studio del movimento di un sistema costituito da un certo numero di punti è, necessariamente quello di investigare le proprietà geometriche che ad esso derivano dalla presenza di eventuali limitazioni (vincoli) imposte alla dislocazione dei suoi componenti rispetto a un prefissato sistema di riferimento. Per un sistema costituito da un solo punto è intuitivamente comprensibile cosa vuol dire che esso sia vincolato a una curva o a una superficie e come questo fatto limiti le possibilità di movimenti del punto stesso. La descrizione geometrica del sistema (e di conseguenza quella cinematica) diventa però assai più difficile quando esso contiene due o più punti che sono vincolati *tra loro* (si pensi al caso in cui venga a priori imposta la distanza tra le varie coppie di punti del sistema). La corretta impostazione di questo problema richiede la costruzione di un fondamento geometrico rigoroso un programma che verrà svolto nei paragrafi 1-8. È indispensabile che il lettore assimili pazientemente queste nozioni, acquistando familiarità col linguaggio e gli strumenti che verranno costantemente utilizzati nel seguito.

1.1 Curve nel piano

Le curve nel piano si possono introdurre come *insiemi di livello* di funzioni $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ (per i nostri scopi è sufficiente che siano di classe C^2), dove U è un sottoinsieme aperto di \mathbf{R}^2 . La curva C è così definita da

$$C = F^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \in U \mid F(x_1, x_2) = 0\}, \quad [1.1]$$

insieme che supporremo non vuoto.

¹ Citazione anonima, in Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer-Verlag, Berlin 1926.

1.1 DEFINIZIONE Un punto P della curva, di coordinate cartesiane (x_1, x_2) (cioè tale che $F(x_1, x_2) = 0$), si dice non singolare se il gradiente di F calcolato nel punto \mathbf{x} non è nullo

$$\nabla F(x_1, x_2) \neq 0. \quad [1.2]$$

Una curva C i cui punti sono tutti non singolari si dirà una curva regolare. ■

Per il teorema della funzione implicita, se P è non singolare in un suo intorno la curva è rappresentabile come grafico di una funzione $x_2 = f(x_1)$, se $\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P \neq 0$, ovvero $x_1 = f(x_2)$, se $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P \neq 0$. La funzione f è differenziabile nel medesimo intorno. Se x_2 è la variabile esplicitabile avremo dunque, per x_1 in un opportuno intervallo aperto I ,

$$C = \text{grafico}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in I, x_2 = f(x_1)\}, \quad [1.3]$$

e

$$f'(x_1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}.$$

La [1.3] mette in evidenza che, almeno localmente, i punti della curva sono in corrispondenza biunivoca con i valori assunti da una delle coordinate cartesiane.

È immediato rendersi conto che in un punto \mathbf{x}_0 non singolare la retta tangente ha equazione $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla F(\mathbf{x}_0) = 0$, ossia che la retta normale ha la direzione di $\nabla F(\mathbf{x}_0)$.

Più in generale, si può utilizzare una rappresentazione parametrica della forma $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^2$, dove (a, b) è un intervallo aperto di \mathbf{R} :

$$C = \mathbf{x}((a, b)) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{esiste } t \in (a, b), (x_1, x_2) = \mathbf{x}(t)\}. \quad [1.4]$$

Si noterà che il grafico [1.3] è esso stesso interpretabile come la parametrizzazione $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))$, e che in ogni caso si può passare dalla [1.3] alla [1.4] introducendo una funzione $x_1 = x_1(t)$ di classe C^2 e tale che $\dot{x}_1(t) \neq 0$.

Ne segue che la definizione 1.1 è equivalente alla seguente

1.2 DEFINIZIONE Se la curva C è data in forma parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, un punto $\mathbf{x}(t_0)$ si dirà non singolare se $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \neq 0$. ■

Essendo chiaramente $\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla F = 0$, il vettore $\dot{\mathbf{x}}$ risulta tangente alla curva; esso rappresenta la velocità del punto che percorre la curva, quando il parametro t si identifica col tempo (fig. 1.1).

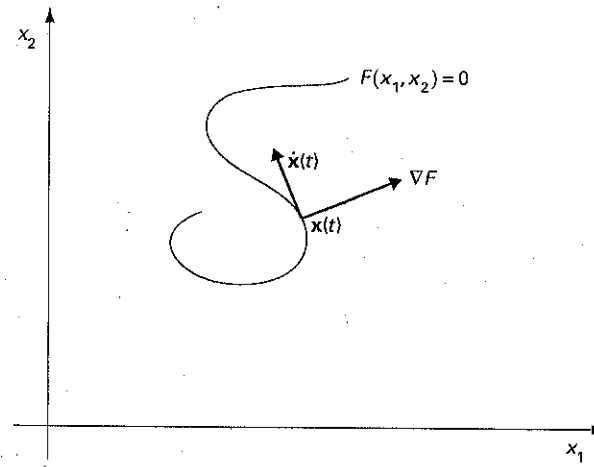


Figura 1.1

1.1 Esempio

Una circonferenza $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$ con centro nell'origine e raggio R è una curva regolare e può essere rappresentata parametricamente ad esempio come $x_1 = R \cos t$, $x_2 = R \sin t$, oppure, restringendosi al semipiano $x_2 > 0$, come grafico $x_2 = \sqrt{R^2 - x_1^2}$. La circonferenza di raggio 1 è abitualmente indicata con S^1 oppure con T^1 . ■

1.2 Esempio

Le coniche sono gli insiemi di livello dei polinomi $F(x_1, x_2)$ di grado due. L'ellisse (riferita agli assi principali) è definita da $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$, dove $a > b > 0$ sono le lunghezze dei semiassi. È immediato verificare che è una curva regolare, e che una sua rappresentazione parametrica è $x_1 = a \sin t$, $x_2 = b \cos t$. Analogamente l'iperbole è data da $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$ e ammette come rappresentazione parametrica $x_1 = a \cosh t$, $x_2 = b \sinh t$. La parabola $x_2 - ax_1^2 - bx_1 - c = 0$ è data già in forma di grafico. ■

1.1 Osservazione

In modo analogo si possono definire le curve in \mathbf{R}^n (cfr. Giusti 1989) come applicazioni $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^2 , dove (a, b) è un intervallo aperto di \mathbf{R} . Il vettore $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ può essere interpretato come la velocità di un punto che si muove nello spazio secondo la legge $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ (cioè lungo la curva parametrizzata).

In realtà il concetto di curva si presta a notevoli generalizzazioni; per esempio nella cinematica dei sistemi rigidi dovremo considerare "curve" definite in spazi di matrici. Si vedano gli esempi 7.2 e 7.3 di questo capitolo. ■

1.2 Lunghezza di una curva e parametrizzazione naturale

Sia C una curva regolare espressa nella rappresentazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

2.1 DEFINIZIONE La lunghezza l della curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in (a, b)$, è data dall'integrale

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt. \quad [2.1]$$

Nel caso particolare di un grafico $x_2 = f(x_1)$, la [2.1] diventa

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt. \quad [2.2]$$

2.1 Esempio

Consideriamo una circonferenza di raggio r . Poiché $|\dot{\mathbf{x}}(t)| = |(-r \sin t, r \cos t)| = r$, evidentemente

$$l = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

2.2 Esempio

La lunghezza di un'ellisse di semiassi $a \geq b$ è data da

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt = \\ &= 4aE\left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right) = 4aE(e), \end{aligned}$$

dove E è l'integrale ellittico completo di seconda specie (cfr. appendice 2) ed e è l'eccentricità dell'ellisse.

2.1 Osservazione

La lunghezza di una curva non dipende dalla scelta della sua parametrizzazione. Infatti sia τ un nuovo parametro; $t = t(\tau)$ è una funzione di classe C^2 tale che

$\frac{dt}{d\tau} \neq 0$, e quindi invertibile. La curva $\mathbf{x}(t)$ si esprime allora come

$$\mathbf{x}(t(\tau)) = \mathbf{y}(\tau),$$

con $t \in (a, b)$, $\tau \in (a', b')$, e $t(a') = a$, $t(b') = b$ (se $t'(\tau) > 0$; il caso opposto è analogo). Quindi

$$l = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt = \int_{a'}^{b'} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(\tau)) \right| \left| \frac{dt}{d\tau} \right| d\tau = \int_{a'}^{b'} \left| \frac{d\mathbf{y}}{d\tau}(\tau) \right| d\tau.$$

Qualsiasi curva differenziabile e non singolare ammette una parametrizzazione naturale con un parametro s (detto *lunghezza d'arco*, *parametro naturale* oppure anche *ascissa curvilinea*). Infatti è sufficiente introdurre un verso positivo sulla curva, un'origine O su di essa e usare per ogni punto P della curva la lunghezza s dell'arco OP (con il segno opportuno e misurata rispetto a una prefissata unità) come un'ascissa:

$$s(t) = \pm \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(\tau)| d\tau, \quad [2.3]$$

(la scelta del segno dipende dal verso di percorrenza della curva, fig. 2.1). Si noti che $|\dot{s}(t)| = |\dot{\mathbf{x}}(t)| \neq 0$.

Dall'osservazione precedente si deduce allora l'identità

$$s = \int_0^s \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right| d\sigma,$$

che a sua volta comporta

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s) \right| = 1 \quad \text{per ogni } s. \quad [2.4]$$

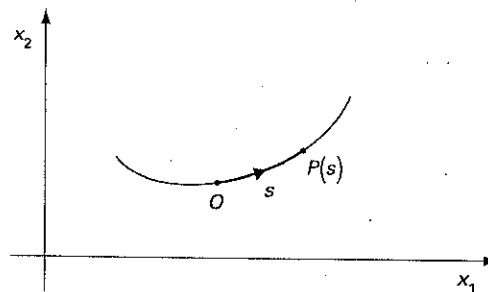


Figura 2.1

2.3 Esempio

Per un'ellisse di semiassi $a \geq b$ il parametro naturale è dato da

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \cos^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau} d\tau = 4aE \left(t, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \right),$$

(cfr. appendice 2 per la definizione di $E(t, e)$).

2.2 Osservazione

Se la curva è di classe C^1 , ma la velocità $\dot{\mathbf{x}}$ si annulla in qualche punto, possono esistere punti singolari, cioè punti nei quali la curva non è esprimibile in un loro intorno come il grafico di una funzione $x_2 = f(x_1)$ (oppure $x_1 = g(x_2)$) di classe C^1 , oppure in cui non è univocamente definita una direzione tangente. ■

2.4 Esempio

Sia $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la curva

$$x_1(t) = \begin{cases} -t^4, & \text{se } t \leq 0, \\ t^4, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

$$x_2(t) = t^2,$$

che è il grafico della funzione $x_2 = \sqrt{|x_1|}$ (fig. 2.2). La funzione $x_1(t)$ è di classe C^3 , ma la curva presenta una cuspide per $t = 0$, dove la velocità è nulla. ■

2.5 Esempio

Consideriamo la curva

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ e^{-1/t}, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{1/t}, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

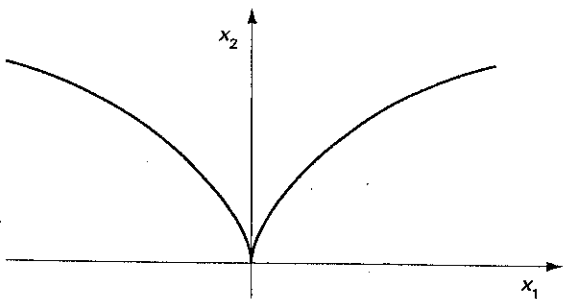


Figura 2.2

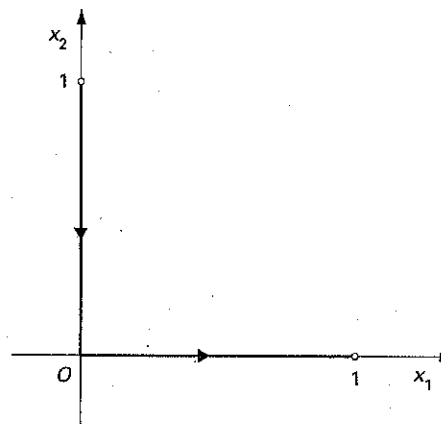


Figura 2.3

Sia $x_1(t)$ che $x_2(t)$ sono di classe C^∞ ma la curva ha uno spigolo corrispondente a $t = 0$ (fig. 2.3).

2.6 Esempio

Per la curva piana definita da

$$x_1(t) = \begin{cases} e^{1/t}, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ -e^{-1/t}, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{1/t} \sin(\pi e^{-1/t}), & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ e^{-1/t} \sin(\pi e^{1/t}), & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

la direzione tangente in $t = 0$ non è definita benché le funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano C^∞ . Tale curva è il grafico della funzione

$$x_2 = x_1 \sin \frac{\pi}{x_1}$$

con l'aggiunta dell'origine (fig. 2.4).

Per ulteriori informazioni sulla teoria delle singolarità raccomandiamo la lettura di Arnol'd (1990).

1.3 Versore tangente, versore normale e curvatura delle curve piane

Consideriamo una curva piana regolare C definita dalla [1.1]. È noto che ∇F risulta, sui punti di C , normale alla curva. Passando a una qualsiasi rappresentazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, il vettore $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ risulta tangente.

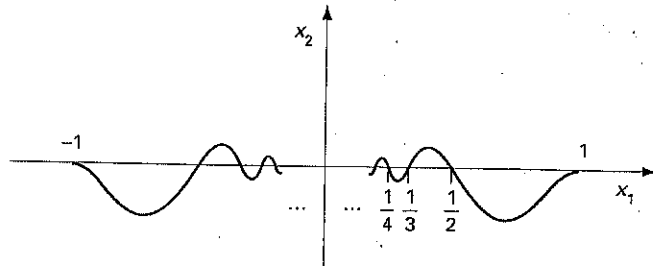


Figura 2.4

Se si usa la parametrizzazione naturale, grazie alla [2.4] il vettore $\frac{dx}{ds}$ ha modulo unitario. Inoltre (come per ogni vettore di modulo costante) avremo $\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{dx}{ds} = 0$. Sono dunque giustificate le seguenti definizioni.

3.1 DEFINIZIONE Il vettore unitario

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dx(s)}{ds} \quad [3.1]$$

è detto versore tangente alla curva.

3.2 DEFINIZIONE Nei punti in cui $\frac{d^2x}{ds^2} \neq 0$ è definito il vettore unitario

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2x}{ds^2}, \quad [3.2]$$

detto versore normale principale (fig. 3.1), dove $k(s) = \left| \frac{d^2x}{ds^2} \right|$ è la curvatura della curva piana. $R(s) = \frac{1}{k(s)}$ è detto raggio di curvatura.

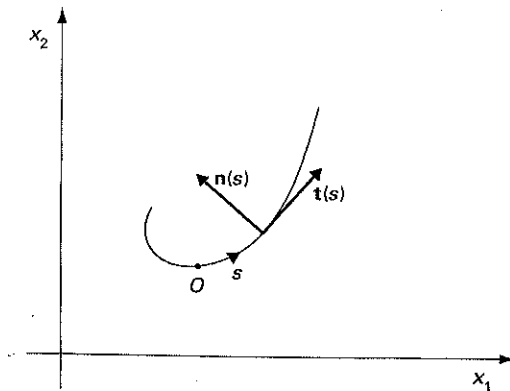


Figura 3.1

È immediato verificare che la retta ha curvatura nulla (e pertanto raggio di curvatura infinito) e che la circonferenza ha la curvatura uguale all'inverso del suo raggio.

3.1 Osservazione

Dalla definizione segue che $\mathbf{n}(s)$ è rivolto verso il semipiano delimitato dalla tangente $\mathbf{t}(s)$ e contenente la curva in un intorno del punto considerato. Si noti invece che il verso di $\mathbf{t}(s)$ è determinato dal verso positivo sulla curva.

3.2 Osservazione

Come vedremo, se si considera un punto materiale di massa unitaria vincolato a muoversi lungo la curva secondo la legge oraria $s = s(t)$, la curvatura concorre a determinare l'intensità della reazione vincolare nel punto.

Il raggio di curvatura ha un'interessante interpretazione geometrica: nella famiglia di circonferenze tangenti in un punto P alla curva, quella che meglio li approssima in un intorno di P ha come raggio il raggio di curvatura in P .

Se infatti prendiamo un cerchio di raggio r e col centro $c = (c_1, c_2)$ sulla normale alla curva in un punto $x(s_0)$, possiamo misurare lo scarto tra la circonferenza e la curva (fig. 3.2) mediante la funzione

$$g(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{c}) - r^2,$$

con s variabile in un intorno di s_0 . Poiché

$$g'(s_0) = 2(\mathbf{x}(s_0) - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{t}(s_0) = 0,$$

$$g''(s_0) = 2[(\mathbf{x}(s_0) - \mathbf{c}) \cdot k(s_0)\mathbf{n}(s_0) + 1],$$

risulta che $g(s)$ è di ordine superiore a $(s - s_0)^2$ se $g''(s_0) = 0$, ossia se $\mathbf{c} - \mathbf{x}(s_0) = R(s_0)\mathbf{n}(s_0)$.

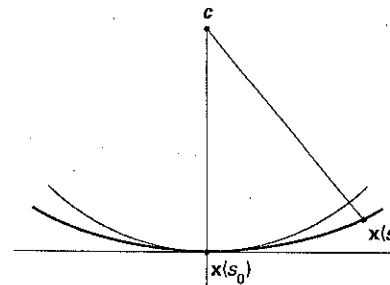


Figura 3.2

3.3 DEFINIZIONE Il cerchio tangente con raggio uguale al raggio di curvatura e col centro nel semipiano contenente il versore \mathbf{n} è detto cerchio osculatore. ■

Passando a una parametrizzazione generica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, avremo ovviamente le seguenti relazioni

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t) = \dot{s}\mathbf{t} \quad [3.3]$$

e

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(t) = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}, \quad [3.4]$$

dalle quali si può ricavare l'espressione della curvatura

$$k(t) = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|^2} \left| \mathbf{a}(t) - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2} \mathbf{v}(t) \right|. \quad [3.5]$$

I vettori \mathbf{v} , \mathbf{a} possono chiamarsi rispettivamente *velocità* e *accelerazione* (pensando alla loro interpretazione cinematica, quando il parametro t è il tempo e la funzione $s = s(t)$ esprime la cosiddetta *legge oraria*).

Richiamiamo l'attenzione sul fatto che se la curvatura non è nulla, e $\dot{s} \neq 0$, la componente normale dell'accelerazione $\frac{\dot{s}^2}{R}$ è positiva.

Lasciamo per esercizio la verifica del fatto che la formula per la curvatura del grafico $x_2 = f(x_1)$ è

$$k(x_1) = \frac{|f''(x_1)|}{[1 + f'^2(x_1)]^{3/2}}, \quad [3.6]$$

mentre se la curva è espressa in coordinate polari $r = r(\varphi)$ la curvatura è data da

$$k(\varphi) = \frac{|2r'(\varphi) - r(\varphi)r''(\varphi) + r^2(\varphi)|}{[r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)]^{3/2}}. \quad [3.7]$$

3.1 Esempio

Consideriamo un'ellisse

$$x_1(t) = a \cos t, \quad x_2(t) = b \sin t.$$

In questo caso il parametro naturale s non è esprimibile in termini di t mediante funzioni elementari (è dato da un integrale ellittico). Velocità ed accelerazione sono:

$$\mathbf{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t) = \dot{s}\mathbf{t}, \quad \mathbf{a}(t) = (-a \cos t, -b \sin t) = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

da cui si ricava facilmente la curvatura mediante la [3.5]. Si osservi che $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \dot{s}\ddot{s} \neq 0$ proprio perché la parametrizzazione non è naturale.

3.1 TEOREMA (di Frenet) Sia $s \rightarrow \mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(s))$ una curva piana (almeno di classe C^3) parametrizzata rispetto al parametro naturale s . Allora

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k(s)\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k(s)\mathbf{t}. \end{aligned} \quad [3.8]$$

Dimostrazione

La prima formula è diretta conseguenza della [3.2]. Da $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 1$ segue immediatamente che

$$\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0$$

e quindi $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ è parallelo a \mathbf{t} . D'altra parte

$$0 = \frac{d}{ds} (\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t},$$

da cui segue immediatamente che

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\mathbf{t}.$$

Dalle formule di Frenet deduciamo che

$$\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} = \mathbf{t} + \Delta s k \mathbf{n} + \mathcal{O}(\Delta s^2),$$

$$\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} = \mathbf{n} - \Delta s k \mathbf{t} + \mathcal{O}(\Delta s^2).$$

Poniamo ora $k\Delta s = \Delta\phi$. Osserviamo che $\Delta\phi$ è adimensionale e che $\cos \Delta\phi = 1 + \mathcal{O}(\Delta\phi^2)$, $\sin \Delta\phi = \Delta\phi + \mathcal{O}(\Delta\phi^3)$. Possiamo allora scrivere, allo stesso ordine di approssimazione,

$$\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} = \cos(\Delta\phi)\mathbf{t} + \sin(\Delta\phi)\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} = -\sin(\Delta\phi)\mathbf{t} + \cos(\Delta\phi)\mathbf{n}.$$

Il passaggio da (\mathbf{t}, \mathbf{n}) a $(\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}, \mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})$ è quindi una rotazione infinitesimale di angolo $\Delta\phi$.

Concludiamo l'analisi delle curve piane notando che la funzione curvatura $k(s)$ definisce completamente la curva a meno di congruenze del piano. Più precisamente, lasciando da parte il caso banale in cui la curvatura è nulla, si ha il seguente

3.2 TEOREMA *Data una funzione regolare $k(s) > 0$, per ogni $s \in (a, b)$, esiste un'unica curva piana regolare, definita a meno di traslazioni e rotazioni, tale che $k(s)$ è la sua curvatura, e s la sua parametrizzazione naturale.*

La dimostrazione di questo teorema si fonda sulle formule di Frenet e sul teorema di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie. Infatti dalle [3.8] segue che

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} - \frac{k'(s)}{k(s)} \frac{d\mathbf{t}}{ds} + k^2(s) \mathbf{t} = 0,$$

che per integrazione fornisce $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ a meno di un vettore costante (rotazione) e successivamente $\mathbf{x}(s)$ a meno di un altro vettore costante (traslazione).

3.3 Osservazione

Perché valga l'unicità è essenziale che la curvatura non si annulli. Come controesempio, consideriamo le due curve di classe C^2 (fig. 3.3)

$$\mathbf{x}(t) = (t, t^3);$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} (t, t^3) & \text{se } t < 0, \\ (t, -t^3) & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Esse sono evidentemente distinte per $t > 0$, ma le loro curvature sono uguali per ogni t e si annullano in $t = 0$.

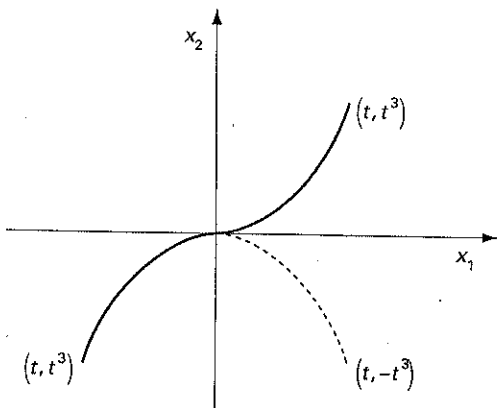


Figura 3.3

1.4 Curve in \mathbf{R}^3

Come abbiamo già osservato, in modo del tutto analogo alla [1.3] si possono definire le curve regolari in \mathbf{R}^3 come applicazioni $\mathbf{x}: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^3$ di classe C^2 , con $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$. Consideriamo ora una curva $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbf{R}^3$; l'equazione del parametro naturale è

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}.$$

Supponiamo di avere riparametrizzato la curva mediante il parametro naturale s . Come nel caso delle curve piane, si possono introdurre il versore tangente \mathbf{t} , il versore normale \mathbf{n} e la curvatura $k(s)$ secondo le definizioni 3.1 e 3.2. Tuttavia, al contrario di quanto accade nel caso piano, queste quantità non sono sufficienti a caratterizzare completamente una curva nello spazio.

4.1 DEFINIZIONE Il vettore unitario

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad [4.1]$$

è detto versore binormale. La terna intrinseca costituita dai versori $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ è ortonormale. \curvearrowright

Nel caso di una curva piana è immediato verificare che $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$, cioè che il versore binormale è costante e punta nella direzione perpendicolare al piano della curva. Dunque la derivata $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ dà una informazione quantitativa sul modo con cui la curva si scosta dall'essere piana. Per precisare meglio questo concetto consideriamo un punto $\mathbf{x}(s_0)$ della curva e prendiamo in considerazione il fascio di piani avente per asse la retta tangente alla curva in $\mathbf{x}(s_0)$. Sia ν il versore normale al generico piano del fascio, la cui equazione sarà allora

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)) \cdot \nu = 0.$$

La distanza di un punto $\mathbf{x}(s)$ della curva da tale piano è, a meno del segno,

$$g(s) = [\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0)] \cdot \nu,$$

per cui

$$g'(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \cdot \nu = 0;$$

inoltre

$$g''(s_0) = k(s_0) \mathbf{n}(s_0) \cdot \nu.$$

Pertanto, se $\mathbf{n}(s_0)$ è definito (cioè se $k(s_0) \neq 0$), esiste un unico piano per cui $g''(s_0) = 0$ ed è quello avente come normale il versore $\mathbf{b}(s_0)$.

4.2 DEFINIZIONE Il piano individuato dai vettori $\mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$ è detto piano osculatore della curva nel punto $\mathbf{x}(s_0)$ (fig. 4.1).

Dunque il piano osculatore ha come equazione parametrica

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(s_0) + \lambda \mathbf{t}(s_0) + \mu k(s_0) \mathbf{n}(s_0). \quad [4.2]$$

Anche nel caso delle curve dello spazio abbiamo il

4.1 TEOREMA (di Frenet) Sia $s \rightarrow \mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ una curva in \mathbf{R}^3 con la parametrizzazione naturale. Per essa valgono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= +k(s)\mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k(s)\mathbf{t}(s) \quad -\chi(s)\mathbf{b}(s) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= +\chi(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned} \quad [4.3]$$

dove $\chi(s)$ è detta torsione della curva (o seconda curvatura).

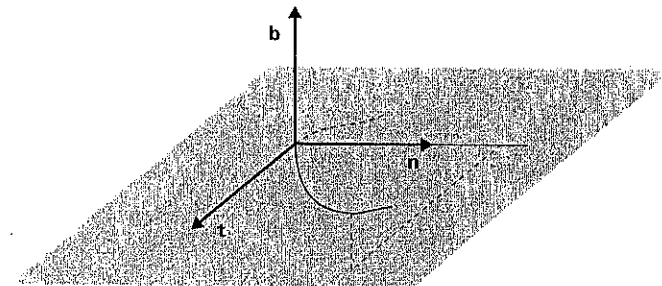
La dimostrazione del teorema di Frenet si fonda sul lemma seguente, di interesse più generale:

4.1 LEMMA Sia $A : (t_1, t_2) \rightarrow O(l)$ una funzione di classe C^1 a valori nel gruppo delle matrici $l \times l$ ortogonali tale che $A(t_0) = 1$. Allora $\dot{A}(t_0)$ è una matrice antisimmetrica.

Dimostrazione

Dall'ipotesi

$$A^T(t)A(t) = 1$$



piano osculatore

Figura 4.1

per ogni $t \in (t_1, t_2)$, segue che, posto $B(t) = \frac{dA}{dt}(t)$, derivando la relazione di ortogonalità troviamo

$$B^T(t)A(t) + A^T(t)B(t) = 0,$$

da cui, valutando in $t = t_0$, segue che

$$B^T(t_0) = -B(t_0).$$

Dimostrazione del teorema 4.1

Applichiamo il lemma 4.1 alla matrice $A(s' - s)$ che trasforma la terna ortonormale $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ nella terna ortonormale $(\mathbf{t}(s'), \mathbf{n}(s'), \mathbf{b}(s'))$. Evidentemente $A(s' - s)$ è ortogonale e $A(0) = 1$. Pertanto la sua derivata in $s' = s$ è una matrice antisimmetrica; la [4.3] segue poi dall'osservazione che per definizione $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}$, mentre $\chi(s)$ resta definito come l'altro elemento non nullo della matrice $A'(s)$.

La terza equazione delle [4.3] indica che il piano osculatore tende a ruotare attorno alla retta tangente con velocità uguale alla torsione $\chi(s)$, mentre la seconda delle [4.3] evidenzia le due cause responsabili della variazione di \mathbf{n} : per effetto della curvatura il vettore normale tende a ruotare nel piano osculatore e per effetto della torsione tende anche a seguire la rotazione del piano osculatore. Inoltre se $\chi(s) \neq 0$ la curva attraversa il piano osculatore. Quest'ultima affermazione segue dal fatto che $\frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3} = \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} = \frac{dk}{ds}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} - k\chi\mathbf{b}$, per cui per $s \simeq s_0$ si ha $\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0) \simeq (s - s_0)\mathbf{t} + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 k\mathbf{n} + \frac{1}{6}(s - s_0)^3 (k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} - k\chi\mathbf{b})$ e quindi $(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0)) \cdot \mathbf{b} \simeq -\frac{1}{6}k\chi(s - s_0)^3$.

4.1 Esempio

Consideriamo l'elica circolare cilindrica

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \varphi, \quad x_3 = \lambda \varphi.$$

Posta l'origine degli archi in A (fig. 4.2), avremo

$$s(\varphi) = \sqrt{R^2 + \lambda^2} \varphi$$

e quindi

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}} (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, \lambda),$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{R}{R^2 + \lambda^2} (\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

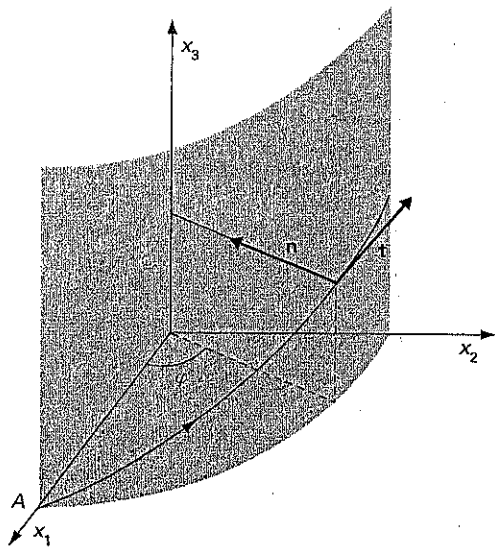


Figura 4.2

da cui

$$\mathbf{n} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0), \quad k(s) = \frac{R}{R^2 + \lambda^2}$$

e infine

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}} (\lambda \sin \varphi, -\lambda \cos \varphi, R).$$

Si calcola facilmente che

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\lambda}{R^2 + \lambda^2} \mathbf{n},$$

trovando così la torsione

$$\chi = -\frac{\lambda}{R^2 + \lambda^2}.$$

La curvatura e la torsione sono i due soli invarianti geometrici di una curva nello spazio. Più precisamente si ha il seguente

4.2 TEOREMA *Siano date due funzioni regolari $k(s) > 0$ e $\chi(s) \neq 0$. Esiste allora un'unica curva dello spazio, a meno di congruenze (rotazioni e traslazioni), che ha s come parametro naturale, k e χ rispettivamente come curvatura e torsione.*

La dimostrazione è simile a quella del teorema 3.2 e si basa sul fatto che $\mathbf{t}(s)$ risolve l'equazione differenziale $\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} - \frac{k'}{k} \frac{d\mathbf{t}}{ds} + k^2 \mathbf{t} + \chi \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$.

1.5 Campi vettoriali e curve integrali

In modo del tutto analogo alla [1.3], una curva regolare in \mathbf{R}^l è una applicazione $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^l$ di classe C^1 tale che $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$.

In questo paragrafo ci proponiamo di mettere in evidenza la relazione esistente tra le curve e i campi vettoriali.

5.1 DEFINIZIONE *Sia U un sottoinsieme aperto di \mathbf{R}^l . Un campo vettoriale \mathbf{X} su U è una funzione regolare $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbf{R}^l$ (per esempio di classe C^∞) che associa ad ogni punto $\mathbf{x} \in U$ un vettore $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ di \mathbf{R}^l , che diremo applicato al punto \mathbf{x} .*

5.1 Esempio

Ad ogni funzione regolare $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ è associato il campo vettoriale gradiente $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_l}(\mathbf{x}) \right)$. Il campo vettoriale gradiente è ortogonale agli insiemi di livello di f .

5.2 DEFINIZIONE *Una curva $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^l$ si dice una curva integrale di un campo vettoriale $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbf{R}^l$ se per ogni $t \in (a, b)$ si verificano le condizioni seguenti:*

- (a) $\mathbf{x}(t) \in U$;
- (b) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$.

5.2 Esempio

Consideriamo il campo vettoriale di \mathbf{R}^2 definito da $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. La curva integrale del campo passante per $(x_1(0), x_2(0))$ per $t=0$ è data da

$$x_1(t) = x_1(0) \cos t + x_2(0) \sin t,$$

$$x_2(t) = -x_1(0) \sin t + x_2(0) \cos t.$$

Si osservi che se $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ la curva integrale degenera nel punto $(0, 0)$. Ciò è possibile perché nel punto $(0, 0)$ il campo vettoriale si annulla, cioè ha un punto singolare.

È evidente dalla definizione 5.2 che il teorema di esistenza e unicità delle equazioni differenziali ordinarie assicura che esiste sempre un'unica curva integrale di un campo vettoriale passante per un punto assegnato. Il problema della prolungabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali (e quindi dell'esistenza di una curva integrale massimale) porta alla definizione seguente: