prendono rispettivamente il nome di *equinozio di primavera e d'autunno* (9).

Posto che la linea dei nodi ruota, attorno ad O, nel piano dell'eclittica, in verso orario rispetto a x^3, una prima conseguenza della precessione della terra è costituita dal fatto che il punto equinoziale γ viene sistematicamente incontro al sole, nel senso che il ritorno del sole all'equinozio di primavera *precede* il ritorno del sole al punto equinoziale di partenza. Di qui il nome di *precessione degli equinozi.*

Un'altra conseguenza, è il totale capovolgimento delle condizioni climatiche locali del nostro pianeta, ad intervalli di tempo pari alla metà di un anno platonico.

(9) La denominazione è giustificata dal fatto che in tali punti, e soltanto in essi, la direzione dei raggi solari, definita da SO, è perpendicolare all'asse terrestre, in modo che ovunque (sulla terra) il giorno e la notte hanno la medesima durata. Non appena il sole supera la posizione γ (equinozio di primavera), esso appare *innalzarsi*, rispetto al piano equatoriale, nell'emisfero Nord, e quivi pertanto l'arco diurno diviene più lungo di quello notturno.

Capitolo V

MECCANICA DEL PUNTO

§1. MECCANICA DEL PUNTO LIBERO

1. Introduzione alla Dinamica. Nei capitoli precedenti, ci siamo limitati ad una visione puramente descrittiva dei fenomeni di moto, ignorando di proposito le azioni fisiche (*forze*) che ne sono la causa essenziale. La ricerca delle relazioni dirette fra il moto e le circostanze che lo determinano (*forze e condizioni iniziali*) costituisce invece, come già si è detto, l'oggetto della *Dinamica.*

A differenza della *Statica,* che si è sviluppata in modo autonomo, e già con ARCHIMEDE, nel III secolo a.C., aveva raggiunto importanti traguardi (1), è solo nel XVII secolo che, ad opera di GALILEO, nasce e si afferma la moderna *Dinamica*; dopo che un'esagerata ed estesa venerazione per il pensiero di ARISTOTELE ne aveva condizionato lo sviluppo per quasi duemila anni.

Non c'è da meravigliarsi che ARISTOTELE, nel suo far scienza anche in Dinamica, abbia enunciato un principio errato, secondo il quale le circostanze che influiscono sul moto direttamente si traducono nella velocità. In verità, un esame sia pure superficiale e frettoloso di tutta una serie di fenomeni di moto, sembra avvalorare tale principio. Ad esempio, per un carro che venga trascinato su di un piano orizzontale, le resistenze passive danno luogo, in breve tempo, ad una velocità di regime proporzionale alla trazione. Analogamente, uno sforzo muscolare impiegato nel lancio di un oggetto, pur trattandosi di una azione di breve durata, sembra tradursi direttamente nella velocità di lancio; e gli esempi potrebbero moltiplicarsi.

E' comprensibile pertanto come ARISTOTELE sia caduto nell'errore, in un tempo in cui il metodo sperimentale era ancora assente. Più strano appare

(1) La teoria della leva e l'idrostatica, come vengono esposte da ARCHIMEDE, sono capitoli impeccabili di Meccanica.

invece che una affermazione di ARISTOTELE sia stata acriticamente accettata per tanti anni dagli innumerevoli commentatori delle sue Opere.

GALILEO è il primo a mettere in dubbio l'affermazione aristotelica, dimostrando, con esperienze sulla caduta dei gravi, che le azioni fisiche che influiscono sul moto si traducono direttamente non sulla velocità, secondo il principio aristotelico, bensì sulla variazione di velocità, cioè l'accelerazione. E' il primo passo, invero determinante, per arrivare alle leggi fondamentali della Meccanica, da GALILEO intraviste, ma circoscritte ancora all'ambito terrestre, e da NEWTON enunciate più tardi come *principi generali*, cioè estesi a *tutti* i fenomeni di moto, terrestri e celesti.

Si tratta naturalmente di enunciati che direttamente trovano riscontro solo sullo schema *punto materiale;* schema che, come abbiamo avuto occasione di dire, solo in determinate circostanze, e in relazione a speciali problemi di moto, si presta a rappresentare un corpo di dimensioni finite. Una siffatta rappresentazione, ad esempio, potrà riuscire particolarmente utile quando si voglia descrivere, in prima istanza, il moto di un pianeta attorno al sole, mentre sarà del tutto inaccettabile, quando il fenomeno da studiare sia legato, in modo determinante, alla rotazione del pianeta.

Il teorema del moto del baricentro, che costituisce una delle equazioni fondamentali della Meccanica dei sistemi, cioè, per intenderci, dei corpi naturali di dimensioni finite, darà una ulteriore giustificazione di tale schema, e al tempo stesso ne fisserà i limiti.

Non va tuttavia dimenticato che, entro i confini della Meccanica razionale, un qualunque corpo, come già si è detto, va riguardato come un aggregato di un numero enorme, ma finito, di punti materiali, nel senso che questi si prestano, in virtù di particolari simmetrie, a rappresentare, in prima approssimazione, gli elementi costitutivi della materia (*schema microscopico*).

In ogni caso, questa ammissione non deve far pensare che sia immediato, per quanto riguarda gli enunciati delle leggi della dinamica, il passaggio dal caso puntiforme al caso di un corpo esteso, sia pure nell'ambito della semplicistica ipotesi microscopica adottata. Invero, tale passaggio presuppone la rinuncia ad una *valutazione autonoma* delle forze, in quanto questa valutazione poggia sull'idea che ogni azione fisica sia sempre confrontabile con uno sforzo muscolare; confronto che ovviamente perde significato nell'ambito microscopico. Come vedremo, si tratterà in sostanza di enunciare le leggi fondamentali della dinamica in termini di accelerazioni, anzichè di forze, con l'introduzione, per la forza e la massa, di una *nozione dinamica*, in quanto desunta, sia pure teoricamente, mediante misure di accelerazioni di elementi di materia isolati.

In altri termini, mentre nella concezione newtoniana le nozioni di forza e di massa (2) sono riguardate come primitive, ed hanno carattere statico, in quanto direttamente desunte, la prima dal confronto con uno sforzo muscolare, e la seconda con l'uso della bilancia, in condizioni di quiete; in un adattamento delle leggi newtoniane allo schema fondamentale della Meccanica, quello microscopico, esse figurano come derivate, in quanto definite attraverso opportuni postulati sulle accelerazioni.

Si noti esplicitamente che la Dinamica, a differenza della Cinematica, prende in considerazione il moto non di semplici *"punti geometrici"*, bensì di *"punti materiali"*, nel senso che la materia costituente il corpo non è del tutto cancellata nello schema, ma ne è parte essenziale. Più precisamente, ad ogni punto geometrico che si presti a schematizzare l'elemento costitutivo di ogni corpo naturale e, in particolare, il corpo stesso, nel caso *puntiforme*, viene associata una *massa* m; vale a dire uno scalare essenzialmente positivo, che sta da solo a rappresentare, sia pure in misura modestissima, la struttura interna della generica particella.

E' sostanzialmente attraverso l'introduzione dei concetti di forza e di massa che la Dinamica si distingue dalla Cinematica, così come questa, introducendo il tempo t, si differenzia dalla Geometria.

2. Legge di moto e principio d'inerzia. Scala dei tempi. Ci limiteremo, per il momento, al caso di corpi puntiformi, secondo le direttive della teoria newtoniana. Consideriamo un corpo puntiforme P, di massa invariabile m, il quale si trovi in presenza di altri corpi naturali. In conseguenza della presenza di questi, esso sarà sottoposto ad una azione fisica, macroscopicamente rappresentabile mediante un vettore $\mathbf{f}$ (*forza*), applicato nel punto, che ne caratterizza non solo la *intensità*, ma anche la *direzione ed il verso* secondo cui essa si manifesta.

Il moto del punto è allora retto dall'equazione vettoriale

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

dove $\mathbf{a}$ indica l'accelerazione del punto P. In conseguenza della forza impressa, il corpo naturale subisce una variazione di velocità ad essa *proporzionale*, nella direzione e nel verso di questa.

La (1) mostra anche che, a parità di forza impressa, l'accelerazione subita dal punto è tanto più piccola (in modulo), quanto più grande è la sua massa m, la quale viene così a fornire una misura dell'*inerzia* del corpo.

La materia si presenta così essenzialmente inerte, come l'esperienza quoti-

(2) Si confrontino le varie definizioni dirette di massa di un corpo: *massa quantitativa*, quale misura della quantità di materia posseduta; *massa inerziale*, quale misura della capacità intrinseca di modificare la sua velocità, e *massa gravitazionale*, quale agente diretto della gravitazione universale.

diana ci conferma appieno. Sappiamo tutti quale divario di forza occorra applicare per arrestare un'auto in corsa e un pallone, ovvero lo sforzo muscolare necessario per aprire una porta massiccia, anche se i cardini sono ben lubrificati.

La (1) inoltre, mentre individua l'accelerazione istantanea che un punto subisce ad opera di una forza assegnata, si presta, di converso, a definire la forza agente attraverso l'accelerazione, nota la massa m.

In ogni caso, la (1) sarebbe di nessuna utilità, o meglio, perderebbe significato ove non si precisasse l'ente di riferimento per essa sottinteso, cioè lo *spazio fisico di riferimento* e l'annessa *scala dei tempi* cui essa è inevitabilmente subordinata. Si osservi invero che, mentre $\mathbf{f}$ traduce azioni fisiche concrete, dovute alla reale presenza di corpi naturali nelle vicinanze del punto P, e pertanto ha significato *assoluto* (forza reale), come peraltro la massa m, l'accelerazione $\mathbf{a}$ è una *grandezza relativa,* nel senso che non può essere definita se non si precisa l'ente di riferimento (spazio fisico e scala dei tempi) rispetto al quale è valutata.

Se pertanto si accetta la (1), non si può pretendere che il legame da essa tradotto sia verificato in ogni riferimento, ma solo in *riferimenti privilegiati,* diciamo R^*. Inoltre l'accettazione della (1) implica, in particolare, che in R^* sia verificata la cosiddetta *legge di inerzia:*

$$\mathbf{v} = \text{cost} = \mathbf{v}_0 \qquad \text{per} \quad \mathbf{f} \equiv 0. \tag{2}$$

La (2) può esprimersi dicendo che, *in assenza di forze reali* o, come anche si dice, se P è *isolato* (cioè estremamente "lontano" da ogni altro corpo naturale, in modo da non risentire della loro presenza) *il punto materiale si muove, rispetto a R^*, di moto rettilineo e uniforme* ($\mathbf{v}_0 \neq 0$), *oppure rimane indefinitamente in quiete* ($\mathbf{v}_0 = 0$). Si tratta della *prima legge* di NEWTON, laddove la (1), che la contiene come caso particolare, costituisce la *seconda legge.* Essa conferma l'inerzia della materia, intesa non solo come riluttanza ad ogni cambiamento di moto, ma anche come effettiva incapacità di modificare da sola la sua velocità.

In ogni caso, nella (2) sono contenute due diverse affermazioni. La prima riguarda il *carattere rettilineo* della traiettoria e, per il suo aspetto puramente geometrico, è direttamente confrontabile con l'esperienza.

La seconda affermazione, concernente l'*uniformità* del moto di ogni punto che sia sottratto all'azione esterna, è invece di *carattere convenzionale* per la misura del tempo. Si vuol dire che *la scala assoluta dei tempi,* sottintesa in R^*, *è scelta con la condizione che, per essa, siano uguali i tempi nei quali vengono percorsi, in assenza di forze, spazi uguali.*

Come è naturale, tale scala non è definita univocamente, ma a meno di una trasformazione lineare, disponibile per la scelta dell'origine dei tempi e dell'unità di misura. Se invero t e t' indicano due scale assolute di tempi che si uniformano entrambe, in R^*, al principio di inerzia, la condizione che ogni moto uniforme

secondo la prima scala, sia tale anche nella seconda, si traduce nella seguente equivalenza, valida per ogni moto inerziale;

$$\frac{ds}{dt} = \text{cost.} \Longleftrightarrow \frac{ds}{dt'} = \text{cost.}$$

Di qui, se $t = t(t')$ esprime la relazione incognita tra le due scale dei tempi, avendosi $ds/dt' \equiv (ds/dt)dt/dt'$, ne consegue $dt/dt' = \text{cost} = a$, ovvero in definitiva

$$t = at' + b, \tag{3}$$

essendo a e b due costanti numeriche arbitrarie.

Pertanto, a differenza di quanto accade in cinematica, dove la scala assoluta dei tempi è prefissata a piacere e comunque disponibile, in dinamica, detta scala è precisata dalla legge d'inerzia, nel senso che la rapidità di ogni movimento è raffrontata con i moti che avvengono in assenza di ogni forza reale (3), assunti come *campione, uniformi per definizione.*

3. Riferimenti inerziali. La legge d'inerzia condiziona non soltanto la scala dei tempi, ma anche i riferimenti spaziali $\mathscr{T}_*$ nei quali trova legittimità la legge universale (1). Si vuol dire, più precisamente, che la *classe* $\{\mathscr{T}_*\}$ dei riferimenti suddetti *non può differire da quella di validità della sola legge d'inerzia,* o, come anche si dice, dalla *classe dei riferimenti inerziali o galileiani* $\{\mathscr{T}_i\}$.

La proprietà diretta è immediata. Ogni $\mathscr{T}_*$, dovendo verificare la (1) incondizionatamente, qualunque sia il moto considerato, ovvero il tipo di azione esterna, è necessariamente inerziale, cioè la classe $\{\mathscr{T}_*\}$ è contenuta in $\{\mathscr{T}_i\}$. Viceversa, presi comunque due riferimenti, l'uno del tipo $\mathscr{T}_*$, e l'altro del tipo $\mathscr{T}_i$, essendo in entrambi verificata la legge d'inerzia, *il moto relativo non può essere che traslatorio uniforme* (cfr. IV,1.4). Pertanto, l'accelerazione è invariantiva nel passaggio da $\mathscr{T}_*$ a $\mathscr{T}_i$, e la validità della (1) in $\mathscr{T}_*$ viene trasferita anche a $\mathscr{T}_i$, con il risultato che la classe $\{\mathscr{T}_i\}$ è contenuta in $\{\mathscr{T}_*\}$. In definitiva, *le due classi di riferimenti privilegiati, in relazione alle formulazioni* (1) *e* (2) *rispettivamente, coincidono:*

$$\{\mathscr{T}_*\} \equiv \{\mathscr{T}_i\}.$$

Inoltre, ai fini della loro caratterizzazione, occorre precisare *uno almeno*

(3) Tale è ad esempio il movimento di una cometa nello spazio interstellare, finchè non divenga sensibile l'attrazione del sole, o quello di un elettrone nel vuoto, all'interno di un tubo a raggi catodici, in assenza di ogni azione elettromagnetica.

di tali riferimenti assoluti, diciamo ancora $\mathcal{T}_*$; posto che ciascuna delle due classi è costituita dagli spazi rigidi in moto traslatorio uniforme rispetto a questo.

Per quanto riguarda la localizzazione di $\mathcal{T}_*$, si osservi innanzitutto che esso non può generalmente desumersi dal solido terrestre. Invero, rispetto ad una terna di assi solidali alla terra, ogni singola stella, che pure sia sufficientemente lontana da tutti i corpi celesti, in modo da non risentire influenze apprezzabili, appare descrivere una traiettoria non già rettilinea, bensì circolare (4), contravvenendo così alla legge d'inerzia.

Tale principio è invece verificato, con buona approssimazione, se si assume, come riferimento spaziale $\mathcal{T}_*$, una *terna desunta dalle stelle fisse*, nel senso che gli assi siano costantemente diretti verso tre stelle prefissate ad arbitrio, purchè talmente lontane dalla terra da apparire "fisse" nel cielo; e l'origine stessa sia costituita da una stella analoga, attribuendo, all'insieme delle costellazioni, il privilegio di una quiete assoluta nell'universo.

Naturalmente, la specificazione di un tal riferimento è subordinata agli incessanti progressi dell'astronomia siderale, e può eventualmente desumersi in base a considerazioni di media statistica. E' chiaro tuttavia che, senza la pretesa di poter disporre di un riferimento universale, la terna $\mathcal{T}_*$ è spesso condizionata direttamente dal tipo di questione dinamica presa in considerazione. Così, nella Meccanica terrestre, è generalmente lecito identificare $\mathcal{T}_*$ con una terna solidale alla terra; laddove, nella Meccanica celeste planetaria, si può far coincidere l'origine di $\mathcal{T}_*$ col baricentro del sistema planetario (sole e pianeti), orientando gli assi verso tre stelle lontane.

Nell'alta astronomia e nella dinamica stellare si specializza invece l'origine di $\mathcal{T}_*$ nel baricentro del sistema galattico e gli assi vengono orientati verso tre nebulose estragalattiche, in modo da tener conto anche del moto di rotazione della Via Lattea.

In ogni modo, almeno dal punto di vista matematico, più che la specificazione di $\mathcal{T}_*$, importa la sua esistenza, assicurata eventualmente da un postulato esplicito.

4. Principio di relatività galileiano. La (1), stante il carattere invariantivo dell'accelerazione nell'ambito dei riferimenti inerziali, ed il carattere assoluto della forza reale e della massa, si uniforma al ben noto *principio di relatività galileiano*: *alle leggi della Meccanica si può dare una medesima formulazione in ogni riferimento inerziale.*

Tale principio, conseguenza dei postulati fondamentali della Meccanica, sottolinea la perfetta *equivalenza* di tutti i riferimenti inerziali per quanto riguarda i *fenomeni meccanici*, nel senso che *nessuna esperienza di Meccanica consente di distinguere un riferimento inerziale da un altro.*

(4) In realtà si tratta di una spirale.

Si tratta di un principio di relatività il quale è limitato ai soli fenomeni meccanici e non investe tutta la Fisica; ciò che ne limita la portata. Inoltre, esso corrisponde ad una invarianza delle leggi della Meccanica, non già rispetto a *tutti* i riferimenti solidi, ma solo nell'ambito di una ben determinata classe di riferimenti privilegiati.

GALILEO illustra magistralmente tale principio (5), immaginando un veliero che si muova di moto traslatorio uniforme rispetto alla terraferma. Tutte le esperienze di meccanica svolte all'interno di esso (quali ad esempio la caduta dei gravi, il moto di un pendolo, ecc.) presenteranno, afferma GALILEO, le stesse caratteristiche che avrebbero se eseguite sulla terra anzichè sul veliero, *a parità di condizioni iniziali relative;* con la conclusione che, basandosi unicamente su di esse, lo sperimentatore non avrebbe modo di accorgersi del moto del veliero (6).

Tuttavia, occorre sottolineare che la suddetta equivalenza non deve intendersi nel senso che un medesimo fenomeno meccanico appare *identico* in ogni riferimento inerziale. Infatti, come meglio vedremo al n. 7, il moto di un punto materiale è determinato non solo dalla forza cui è sottoposto, ma anche dalle *condizioni iniziali*, vale a dire dalla posizione e dalla velocità del punto ad un istante prefissato $t = 0$.

(5) Riportiamo in parte il passo in questione, tratto dai *Dialoghi sui massimi sistemi* (cfr. Ed. Naz. Opere di GALILEO, Firenze, Barbera, Vol. VII, pagg. 212 - 13): "Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran naviglio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti, con pari velocità, vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze siano uguali; e, saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benchè niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succedere così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; che (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina o pure sta ferma . . ."

(6) GALILEO suppone naturalmente che la terra costituisca un riferimento inerziale. Si vuol dire, più precisamente, che egli non pensa di eseguire nel vascello esperienze di Meccanica, così raffinate, da risentire del fatto che una terna solidale alla terra non è esattamente inerziale (cfr. n. V,2.5 in fine).

D'altronde è evidente, stante il teorema dei moti relativi, che, in un *determinato fenomeno di moto, i dati iniziali associati a due diversi riferimenti inerziali* $\mathcal{T}_*$ e $\mathcal{T}'_*$ *non possono coincidere* (7). Pertanto, il moto apparirà diverso, nei due riferimenti, sia nella traiettoria che nella legge temporale, pur essendo retto dalla medesima equazione (1).

Così, ad esempio, un sasso lasciato cadere liberamente da un treno in moto traslatorio e uniforme, descriverà, rispetto ad un viaggiatore (solidale al treno), una traiettoria rettilinea, con moto uniformemente accelerato. Al contrario, un osservatore a terra, per il quale il sasso è animato inizialmente da una velocità pari a quella del treno, lo vedrà descrivere una traiettoria parabolica.

In ogni caso, a parità di forza, la *classe* dei movimenti ottenuta al variare delle condizioni iniziali è, nel suo complesso, la stessa in ogni riferimento inerziale. In altri termini, *a parità di forze agenti e di condizioni iniziali relative* (ciò che porta a confrontare moti diversi), *il moto apparirà identico in ogni riferimento inerziale.*

Passiamo ora a tradurre esplicitamente il legame tra le coordinate (x^i) ed (x'^i) $(i = 1, 2, 3)$ di un punto in moto *simultaneo* rispetto a due terne inerziali $\mathcal{T}_*$ e $\mathcal{T}'_*$. Posto che il moto relativo delle due terne è traslatorio, senza limitare la generalità, potremo supporre che esse siano sovrapposte ad un determinato istante $t = 0$, e che la velocità $\mathbf{u}$ di traslazione di $\mathcal{T}'_*$ rispetto a $\mathcal{T}_*$ sia orientata come l'asse x^1 (cfr. fig. 1).

Supporremo altresì che i tempi, relativi a $\mathcal{T}_*$ e $\mathcal{T}'_*$, siano valutati con una stessa unità di misura, a partire da una medesima origine: $t' = 0$ per $t = 0$. Con tale scelta, dall'identità $OP = OO' + O'P$, seguono direttamente le seguenti relazioni tra le coordinate e i tempi:

(4) $$x^1 = x'^1 + ut, \qquad x^2 = x'^2, \qquad x^3 = x'^3, \qquad t = t',$$

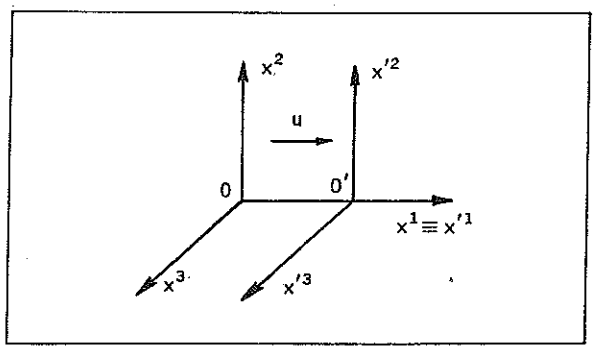

Figura 1

(7) Se ad esempio nel primo è $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, nel secondo si avrà $\mathbf{v}'_0 \neq \mathbf{0}$.

e viceversa

(4') $$x'^1 = x^1 - ut, \qquad x'^2 = x^2, \qquad x'^3 = x^3, \qquad t' = t.$$

Le (4) e (4') costituiscono le cosiddette "trasformazioni speciali (8) di GALILEO", e confermano naturalmente l'invarianza dell'accelerazione nel passaggio dall'uno all'altro riferimento:

(5) $$\ddot{x}^1 = \ddot{x}'^1, \qquad \ddot{x}^2 = \ddot{x}'^2, \qquad \ddot{x}^3 = \ddot{x}'^3.$$

5. Principio di reazione. Furono probabilmente considerazioni di simmetria, insieme ad una naturale intuizione che le azioni fisiche si propagano istantaneamente, a suggerire a NEWTON la formulazione chiara e generale della sua *terza legge*, nota come *principio di azione e reazione.* Essa può enunciarsi dicendo che: *la reazione è sempre uguale e contraria all'azione, cioè, tanto in condizioni di quiete, quanto di moto, le mutue azioni di due punti materiali sono di uguale intensità, e dirette secondo la congiungente i due punti, in versi opposti.* Si tratta del più rilevante contributo dato da NEWTON alla sistemazione della dinamica, in quanto tale principio costituisce uno degli elementi di maggior semplificazione di tutta la Meccanica.

In ogni caso, esso perderebbe la sua validità generale, ove si ammettesse un limite superiore alla velocità di propagazione delle azioni fisiche, e verrebbe ad essere confinato alle sole reazioni di contatto. Continuerebbe ad essere valido, ad esempio, nei fenomeni d'urto, nei quali lo scambio delle forze è *diretto,* e non richiede un tempo di propagazione.

Al principio di reazione, NEWTON fa seguire un non meno importante corollario, riguardante *il principio di indipendenza delle forze: un corpo puntiforme, sotto l'azione di due forze congiunte, descrive la diagonale del parallelogramma di queste, nello stesso tempo che impiegherebbe a descriverne i lati sotto l'azione, separata, delle singole forze.* Si tratta di un principio di sovrapposizione causa-effetto, che comporta in definitiva, per l'accelerazione di un punto, una notevole *proprietà di additività,* nel senso che l'accelerazione risultante dalla presenza simultanea di più corpi è sempre riconducibile, per somma

(8) Le trasformazioni generali si ottengono, in sostanza, dalla formula generale $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$, supponendo che i versori $\mathbf{c}_i$ della terna $\mathcal{T}'_*$ siano prefissati arbitrariamente e non coincidano con quelli analoghi $\mathbf{c}_i$ di $\mathcal{T}_*$:

$$\mathbf{c}'_i = A^r_i \mathbf{c}_r$$

(somma sottintesa rispetto all'indice r da 1 a 3), essendo A^r_i delle costanti, subordinate alle condizioni

$$\mathbf{c}'_i \cdot \mathbf{c}'_k \equiv A^r_i A^s_k \delta_{rs} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

vettoriale, al caso singolo.

6. **Riferimenti non inerziali e forze apparenti.** Abbiamo visto che la dinamica del punto si riassume nella legge universale (1), purchè la si intenda riferita ad una qualunque terna inerziale $\mathscr{T}_*$. Al di fuori di questa classe privilegiata di riferimenti, la (1) perde, almeno direttamente, la sua validità. Occorre tuttavia sottolineare che, spesso, il riferimento che si presenta come il più naturale, in relazione ad un determinato problema di moto, non è galileiano, cioè, per intenderci, desunto dalle stelle fisse, o in moto traslatorio e uniforme rispetto a queste. Così, ad esempio, quando si voglia studiare il comportamento di un punto rispetto ad una piattaforma rotante, è spontaneo assumere questa come riferimento. Allo stesso modo, un meccanico che esegua le sue esperienze di collaudo di un motore su di un veicolo in moto, riterrà più conveniente riferirsi ad una terna solidale al veicolo stesso, che non alla terraferma.

Di qui la necessità di dare alle leggi della dinamica una formulazione valida in *ogni riferimento*, e che naturalmente si uniformi alla (1) quando questo sia inerziale. Si tratterà, in definitiva, non già di riformulare le leggi della dinamica, ma sostanzialmente di adattare la (1) ad un riferimento solido generico.

Siano, pertanto, $\mathscr{T}_*$ e $\mathscr{T}'$ due terne di riferimento, la prima galileiana e l'altra in moto rigido arbitrario rispetto a questa. Il teorema di CORIOLIS permette innanzitutto di precisare il legame tra le accelerazioni istantanee di un medesimo punto P nei due riferimenti:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_c .$$

Di qui, moltiplicando per m ambo i membri, ed isolando il termine $m\mathbf{a}'$, consegue chiaramente che, con riferimento alla terna $\mathscr{T}'$, la formulazione (1) dà luogo ad una legge dinamica che è ancora dello stesso tipo:

$$(1') \qquad m\mathbf{a}' = \mathbf{f}',$$

con l'intesa che il vettore $\mathbf{f}'$, che rappresenta la *forza relativa* al riferimento $\mathscr{T}'$, coincida con la somma $\mathbf{f} - m\mathbf{a}_\tau - m\mathbf{a}_c$:

$$(6) \qquad \mathbf{f}' \equiv \mathbf{f} - m\mathbf{a}_\tau - m\mathbf{a}_c .$$

Le (1') e (6) mostrano che, nello scrivere le leggi della dinamica rispetto ad un riferimento non inerziale, occorre tener conto non solo della forza reale $\mathbf{f}$, ma anche della presenza di altri due termini:

$$(7) \qquad \mathbf{f}_\tau \equiv - m\mathbf{a}_\tau, \qquad \mathbf{f}_c \equiv - m\mathbf{a}_c,$$

aventi ovviamente le dimensioni di una forza. Ad essi si dà il nome di *forze apparenti* o *fittizie del moto relativo*, per sottolineare il fatto che non traducono

azioni concrete da parte di corpi presenti, ma sono solo il risultato della scelta del riferimento. Si vuol dire, che esse sono presenti anche se il punto è isolato: $\mathbf{f} = 0$, e sono evidentemente responsabili della circostanza obiettiva che un moto rettilineo ed uniforme rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, generalmente non è più tale in un riferimento di tipo diverso.

Più precisamente, $\mathbf{f}_\tau$ prende il nome di *forza di trascinamento*, mentre per $\mathbf{f}_c$ sono abituali le denominazioni di *forza complementare*, o *di* CORIOLIS.

Per scrivere la loro espressione esplicita, basta tener conto della circostanza che esse differiscono soltanto per il fattore $-m$ dalle corrispondenti accelerazioni di trascinamento e di CORIOLIS del punto P, fornite dalle formule generali [cfr. $(5)_2$ e (12) di IV,1.2 e 1.3]:

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathbf{a}_\tau \equiv \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \times \Omega P - \omega_\tau^2 P_* P \\ \mathbf{a}_c \equiv 2\boldsymbol{\omega}_\tau \times \mathbf{v}', \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}_\tau$ la velocità angolare di $\mathscr{T}'$ rispetto a $\mathscr{T}_*$, Ω un punto solidale a $\mathscr{T}'$, e P_* la proiezione di P sulla retta per Ω parallela al vettore $\boldsymbol{\omega}_\tau$. Ne conseguono le formule generali:

$$(9) \qquad \mathbf{f}_\tau \equiv - m\mathbf{a}_\Omega - m\dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \times \Omega P + m\omega_\tau^2 P_* P,$$

per la *forza di trascinamento*, e rispettivamente

$$(10) \qquad \mathbf{f}_c \equiv - 2m\boldsymbol{\omega}_\tau \times \mathbf{v}',$$

per la *forza di* CORIOLIS.

Si noti esplicitamente che, come già per le corrispondenti accelerazioni, la forza di trascinamento dipende solo dalla posizione del punto P nel riferimento $\mathscr{T}'$, e dal moto (di trascinamento) di questo rispetto a $\mathscr{T}_*$. Al contrario, la forza di CORIOLIS non dipende dalla posizione del punto, ma solo dalla sua velocità relativa e dal moto di trascinamento. Se questo è *traslatorio*: $\boldsymbol{\omega}_\tau \equiv 0$, $\mathbf{f}_c$ si annulla, e ciò accade sistematicamente anche nel caso che il punto sia *in quiete* nel riferimento $\mathscr{T}'$. Negli altri casi, essa si annullerà soltanto negli eventuali istanti in cui sia $\mathbf{v}' \parallel \boldsymbol{\omega}_\tau$.

Quanto al termine $\mathbf{f}_\tau$, la (9) mostra che, se il moto di trascinamento è *traslatorio*, esso non dipende dalla posizione del punto: $\mathbf{f}_\tau \equiv - m\mathbf{a}_\Omega$. Se poi detto moto è anche *uniforme*, $\mathbf{f}_\tau$ si annulla identicamente.

Pertanto, se $\mathscr{T}'$ è in moto traslatorio uniforme rispetto a $\mathscr{T}_*$, cioè è esso stesso inerziale, $\mathbf{f}'$ si riduce, come è naturale, alla sola forza reale $\mathbf{f}$, in pieno accordo col principio di relatività galileiano.

Viceversa, la condizione che sia nulla identicamente, cioè ad ogni istante e per ogni moto di P, la *somma* $\mathbf{f}_\tau + \mathbf{f}_c$, cioè il campo apparente nel suo complesso, ricordando quanto si disse circa la (16) di IV,1.4, si traduce nella condizione che il moto di trascinamento sia *traslatorio e uniforme.*

Particolarmente importante è anche il caso che il moto di trascinamento sia *rotatorio uniforme*. Per un siffatto $\mathcal{T}'$, l'espressione abituale (10) della forza di CORIOLIS si conserva, salvo l'invariabilità del vettore $\boldsymbol{\omega}_\tau$: $\boldsymbol{\omega}_\tau = \text{cost.}$ Al contrario, scelto il punto ausiliario Ω sull'asse di rotazione, la forza di trascinamento si riduce al solo termine $m\omega_\tau^2 P_* P$:

$$\mathbf{f}_\tau \equiv m\omega_\tau^2 P_* P. \tag{11}$$

Tale forza di trascinamento, ripetiamo, relativa ad un *moto rotatorio uniforme del riferimento* rispetto alle stelle fisse, prende il nome di *forza centrifuga.*

Da quanto precede è evidente che, per studiare il moto di un punto in un riferimento *non inerziale* $\mathcal{T}'$, occorre preventivamente conoscere il moto di questo rispetto ad una terna galileiana $\mathcal{T}_*$. Tuttavia, quest'ultima non svolge singolarmente un ruolo essenziale, nel senso che è *comunque* disponibile, nell'ambito dei riferimenti inerziali. Ciò in quanto, nel teorema di CORIOLIS, a parità di $\mathcal{T}'$, la sostituzione di $\mathcal{T}$ con un riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto ad esso, non modifica nè l'accelerazione assoluta di un punto P, nè l'accelerazione complementare e quella di trascinamento (9). La formulazione generale (1') è pertanto *invariantiva rispetto alla scelta del sottinteso riferimento inerziale,* e in questo senso si uniforma al principio di relatività galileiano.

La formulazione ristretta (1) viene estesa, con la (1'), a tutti i possibili riferimenti solidi $\mathcal{T}'$. Si tratta tuttavia di una *estensione puramente formale,* nel senso che la distinzione tra i riferimenti galileiani e quelli non galileiani non è cancellata nella (1'), ma resta sempre sottintesa. Si vuol dire che all'invarianza formale della (1'), nel passaggio da un riferimento $\mathcal{T}'$ ad un altro qualunque, non si accompagna un'invarianza sostanziale; come accade invece per la formulazione (1), ristretta ai riferimenti inerziali.

In altri termini, se da una parte nessuna esperienza meccanica consente di distinguere due riferimenti inerziali (*principio di relatività*), semplici misure di accelerazione, all'interno di un dato riferimento, consentono di accertare se esso è o non è galileiano. Così, ad esempio, un osservatore in piedi su una piattaforma ruotante, si rende conto della rotazione di questa, specie se si muove radialmente, in quanto avverte una forza che lo spinge verso l'esterno. Tale azione egli non è

(9) Del resto, passando dal riferimento inerziale $\mathcal{T}_*$ ad un altro riferimento dello stesso tipo: $\mathcal{T}'_*$, a parità di $\mathcal{T}'$, le (9) e (10) vengono sostituite dai campi apparenti

$$\mathbf{f}'_\tau \equiv -m\mathbf{a}'_\Omega - m\dot{\boldsymbol{\omega}}'_\tau \times \Omega P + m\omega'^2_\tau P'_* P, \quad \mathbf{f}'_c \equiv -2m\boldsymbol{\omega}'_\tau \times \mathbf{v}',$$

che non differiscono dai precedenti. Infatti, per il moto rigido di $\mathcal{T}'$, si deve intendere $\boldsymbol{\omega}'_\tau \equiv \boldsymbol{\omega}_\tau$, $\mathbf{a}'_\Omega \equiv \mathbf{a}_\Omega$, essendo $\mathcal{T}'_*$ in moto *traslatorio uniforme* rispetto a $\mathcal{T}_*$, nonchè $P'_* \equiv P_*$.

in grado di attribuire ad alcun agente fisico reale, ed è di tipo *apparente*, in quanto cessa non appena la piattaforma è in quiete.

Allo stesso modo, il pelo libero piano di un liquido in quiete in un recipiente cilindrico ad asse verticale, diviene *parabolico* se il recipiente è in rotazione uniforme attorno a detto asse.

Analogamente, un osservatore che si trovi su di un veicolo in moto traslatorio rispetto alla terra, *con accelerazione variabile*, e che lasci cadere un grave, non lo vedrà descrivere una traiettoria rettilinea (10).

In ogni caso, *tornando per brevità alle notazioni senza apice,* da quanto precede segue in definitiva che, nel passaggio da un riferimento inerziale ad un riferimento qualunque $\mathcal{T}$, la legge (1) va sostituita con l'analoga

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}; \tag{12}$$

con l'intesa che **F** *comprenda non soltanto le forze reali, ma anche le forze apparenti di trascinamento e di* CORIOLIS:

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{f} + \mathbf{f}_\tau + \mathbf{f}_c, \tag{13}$$

con

$$\begin{cases} \mathbf{f}_\tau \equiv -m\mathbf{a}_\Omega - m\dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \times \Omega P + m\omega_\tau^2 P_* P \\ \mathbf{f}_c \equiv -2m\boldsymbol{\omega}_\tau \times \mathbf{v}. \end{cases} \tag{14}$$

Nei campi apparenti (14) compaiono naturalmente, insieme alla posizione P del punto e alla sua velocità $\mathbf{v}$ rispetto al riferimento scelto $\mathcal{T}$, gli elementi caratteristici del moto di $\mathcal{T}$ rispetto ad un riferimento inerziale qualsivoglia, attraverso l'accelerazione di un suo punto Ω e la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_\tau$.

7. Legge di una forza. Equazioni differenziali del moto. L'equazione fondamentale (12) può essere direttamente utilizzata per risolvere due tipi di problemi, l'uno inverso dell'altro. Il primo, cosiddetto *problema diretto*, consiste nel determinare, in funzione del tempo, la forza univocamente associata ad un determinato movimento. Tale problema, così formulato, non presenta speciali difficoltà, in quanto si tratta di derivare due volte l'equazione vettoriale di movimento $OP = OP(t)$. In termini scalari, relativi alla terna $\mathcal{T}$ prefissata nello spazio di riferimento, le componenti della forza F^i $(i = 1, 2, 3)$ si esprimono, in funzione del tempo, mediante le formule

(10) Se l'accelerazione è *costante*, ma non ha la direzione dell'accelerazione di gravità, la traiettoria è ancora rettilinea, ma non verticale. Ad esempio, per una goccia che si stacchi dal tetto di una cabina in libera discesa su di un piano inclinato liscio, la traiettoria (relativa) è perpendicolare al pavimento della cabina.

$$F^i = m\ddot{x}^i(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

essendo $x^i(t)$ le coordinate istantanee del punto.

Non è altrettanto immediato il problema diretto, se esso è inteso nel senso di determinare il tipo di forza che caratterizza una prefissata *classe di movimenti*.

Non meno interessante appare il *problema inverso*: assegnata la forza, determinare il moto del punto P su cui essa si esplica. Per una corretta formulazione di tale problema, occorre preventivamente intenderci sul significato della locuzione "assegnare la forza".

Diremo che *una forza* **F** *è assegnata, allorchè sia conosciuta la legge di dipendenza di* **F** *dai vari parametri che la determinano*, brevemente la *legge di forza*.

Così, ad esempio, *la forza di trascinamento* $(14)_1$, che presuppone *assegnato* il moto del riferimento $\mathscr{T}$ rispetto ad un riferimento inerziale, *è* da riguardare come *una ben determinata funzione vettoriale di* P *e di* t, attraverso i vettori $\mathbf{a}_\Omega(t)$ e $\boldsymbol{\omega}_\tau(t)$. Analogamente, *la forza* di CORIOLIS $(14)_2$ *è una funzione vettoriale di* $\mathbf{v}$ *e di* t, attraverso $\boldsymbol{\omega}_\tau(t)$.

In ogni caso, se **F** dipende unicamente dalla posizione del punto su cui agisce: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$, essa si dirà *posizionale*. Sono tali, ad esempio, la forza d'attrazione newtoniana, la forza elastica, la forza centrifuga e così via. La forza di CORIOLIS fornisce, invece, un esempio di forza che non dipende dalla posizione, ma dalla velocità del punto, ed eventualmente dal tempo, se la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_\tau$ è variabile con t. Essa è cioè del tipo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, t)$. Una dipendenza siffatta si può presupporre, nel caso di un punto P che si muova in seno ad un fluido macroscopicamente in quiete, anche per l'azione offerta dal fluido (*resistenza di mezzo*), almeno in condizioni di simmetria per il corpo schematizzato nel punto: $\mathbf{R} = -R(\mathbf{v}) \operatorname{vers} \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$.

Tali leggi si possono generalizzare, pensando a forze che dipendano sia dalla posizione del punto e dalla sua velocità, che dall'istante in cui esse sono applicate, come accade per il campo apparente $\mathbf{f}_\tau + \mathbf{f}_c$ nel suo complesso, almeno in condizioni generali. Pertanto, conoscere la legge di una forza, sullo schema punto materiale, significa conoscere la dipendenza di **F** dai parametri P, $\mathbf{v}$, t:

$$(15) \qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t).$$

Noi supporremo che la funzione a secondo membro della (15) sia continua e derivabile, rispetto a *tutti* i parametri, P, $\mathbf{v}$ e t, quante volte sarà necessario.

Oltre a ciò, se la forza **F** traduce una *azione fisica reale*, in virtù del suo *carattere assoluto* (11), si deve intendere rispettato un requisito essenziale, cioè l'*invarianza della legge di forza*. Si vuol dire che, per una forza reale **f**, la legge di dipendenza dalle variabili P, $\mathbf{v}$, t deve risultare formalmente invariante nel passaggio da un riferimento ad un altro qualunque; ciò che non traspare direttamente dalla (15) per quanto riguarda la dipendenza da $\mathbf{v}$, stante il suo *carattere relativo* al riferimento prescelto. In altri termini, se le funzioni

$$f^i = f^i(x/\dot{x}/t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

indicano le componenti di **f** in un riferimento $\mathscr{T}$, e f'^i $(i = 1, 2, 3)$ le analoghe componenti in un altro riferimento $\mathscr{T}'$, le f'^i si ottengono direttamente dalle f^i, semplicemente sostituendo le antiche variabili con le nuove.

E' chiaro che l'ipotesi di invarianza limita fortemente la scelta della legge (15), per quanto riguarda le forze reali.

In ogni caso, supponendo assegnata la legge di forza, la (12) si presenta come una *equazione differenziale del 2° ordine, di tipo vettoriale*, per la determinazione del moto, cioè dell'incognita $OP = OP(t)$ (O punto qualunque del riferimento scelto):

$$(16) \qquad m\ddot{P} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t).$$

Inoltre tale moto non sarà *univocamente* determinato se non si precisano le *condizioni iniziali*, vale a dire la posizione P_0 e la velocità $\mathbf{v}_0$ ad un prefissato istante t_0:

$$(17) \qquad P = P_0, \qquad \dot{P} = \mathbf{v}_0 \qquad \text{per } t = t_0,$$

ovvero *condizioni equivalenti* a queste.

In termini scalari, una volta fissata la terna $\mathscr{T}$ nello spazio di riferimento scelto, la (16) si tradurrà, per proiezione sugli assi, nel seguente *sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine*

$$(16') \qquad m\ddot{x}^i = F^i(x^1, x^2, x^3; \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3; t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

di tipo normale, cioè risoluto rispetto alle derivate di ordine massimo.

Il problema meccanico è ricondotto così ad un problema di pura analisi, consistente nella risoluzione del sistema (16'), con tutte le complicazioni analitiche connesse, in dipendenza dalla struttura del secondo membro. Come è noto, l'integrale generale di tale sistema, ammesso che sia traducibile in termini finiti, sarà del tipo

$$(18) \qquad x^i = x^i(t; c_1, \ldots, c_6) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

con l'intervento di sei costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_6$.

Pertanto, assegnata la legge di forza, il moto non è determinato univocamente, ma sono possibili per il punto ∞^6 traiettorie, con altrettante leggi di percorrenza.

(11) Cioè invariantivo rispetto ad *ogni* scelta del riferimento, e non nel solo ambito dei riferimenti inerziali.

Per determinare le suddette costanti, cioè per individuare univocamente il moto, è sufficiente assegnare le *condizioni iniziali* (17). Esse si traducono infatti in sei condizioni scalari indipendenti in altrettante incognite:

$$(17') \qquad \begin{cases} x^i(t_0; c_1, c_2, \dots, c_6) = x_0^i \\ \dot{x}^i(t_0; c_1, c_2, \dots, c_6) = v_0^i \qquad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

e, come tali, varranno a determinare le c_j in funzione dei dati iniziali: $c_j = c_j(t_0; x_0^1, x_0^2, x_0^3; v_0^1, v_0^2, v_0^3)$ $(j = 1, 2, \dots, 6)$.

Naturalmente nulla vieta, ai fini della determinazione delle costanti c_j $(j = 1, \dots, 6)$, di assegnare, invece di P_0 e $\mathbf{v}_0$ (posizione e velocità iniziale), altre condizioni equivalenti, ad esempio, pur con qualche cautela, le posizioni P_0 e P_1 occupate dal punto in due determinati istanti t_0 e t_1 (12).

In conclusione, da un punto di vista strettamente operativo, in un problema di dinamica del punto si tratterà di procedere come segue. Scelta preliminare dello spazio di riferimento, e conseguente specificazione del moto di trascinamento, cioè del moto di questo rispetto ad un riferimento inerziale convenientemente scelto. Specificazione della legge per le forze reali e per le eventuali forze apparenti di trascinamento e di CORIOLIS, nonchè delle condizioni iniziali. Risoluzione analitica del problema.

Prima di passare a qualche caso concreto, illustrativo del procedimento descritto, anche per renderci meglio conto delle ipotesi sottintese in tale schematizzazione, è opportuno esaminare l'insieme dei *postulati dinamici* che si può porre a base della Meccanica, in conformità dello schema microscopico adottato (13).

8. Postulato fondamentale sulle accelerazioni. Principio di additività. Rinunciando, almeno in forma esplicita, alle direttive della teoria newtoniana, prendiamo ora in considerazione non già un corpo puntiforme, ma un corpo esteso $\mathcal{N}$, in presenza di altri corpi naturali. Il moto di $\mathcal{N}$ risulta dal movimento dei suoi elementi costitutivi, tutti puntiformi per ammissione esplicita. Pertanto, diciamo ϵ il generico elemento di $\mathcal{N}$, senza per il momento distinguere, nell'ambito delle azioni fisiche che interessano ϵ, quelle dovute alla presenza degli elementi che fanno direttamente parte di $\mathcal{N}$, da tutte le altre.

---

(12) Si tratta, in sostanza, di restringere il campo di moto ad un opportuno intorno dei punti P_0 e P_1, fissati genericamente; in modo che sia *univocamente* determinato, compatibilmente con l'assegnata legge di forza, il movimento che porta il punto P a transitare per P_0 e P_1 rispettivamente, agli istanti fissati t_0 e t_1.

(13) Cfr. A. SIGNORINI, *Meccanica Razionale con elementi di statica grafica*, Vol. II, PERRELLA - Roma, Pagg. 12 - 22.

E' chiaro che, da questo punto di vista, il caso generale si riduce a quello dell'*unico elemento* ϵ *in presenza di tutto un insieme* I *di elementi materiali:*

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N,$$

essi stessi puntiformi, e non "lontani" da ϵ, in modo da influire sul suo moto.

Anche in ambito microscopico, non c'è a priori nessuna ragione di rinunciare all'idea geniale di GALILEO che sia l'accelerazione di ϵ, e non la sua velocità, l'elemento cinematico *direttamente* influenzato dalla presenza di I; accelerazione, beninteso, misurata in un riferimento privilegiato $R_* \equiv (\mathcal{T}_*, t)$, la cui esistenza sia magari ammessa da un postulato esplicito (*riferimento inerziale*).

In altri termini, indicata con $\mathbf{a}$ la suddetta accelerazione istantanea, l'idea di GALILEO si riassume nella condizione che $\mathbf{a}$ sia una *funzione vettoriale*, ben determinata, di un certo numero di parametri (masse, posizioni, distanze, ecc.): $p_1, p_2, \dots, p_N$, tra i quali il tempo stesso, riguardanti direttamente *tutti* gli elementi considerati ϵ ed ϵ_i $(i = 1, 2, \dots, N)$:

$$(19) \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}(p_1, p_2, \dots, p_N).$$

Di tali parametri, alcuni, come le masse, andranno riguardati come *costanti strutturali.* Altri invece, come le mutue distanze, saranno per loro natura *variabili*, cioè si presenteranno a loro volta, in ogni fenomeno di moto, come funzioni ben determiante di t.

Naturalmente, il primo membro della (19), pur non dipendendo strettamente da $\mathcal{T}_*$, bensì dalla classe dei riferimenti in moto traslatorio uniforme rispetto a questo, ha significato intrinseco solo in tale classe. Viceversa, la legge a secondo membro ha significato *assoluto*, nel senso che è direttamente legata ai soli elementi ϵ ed ϵ_i considerati e alle loro caratteristiche intrinseche (singole e mutue), niente affatto dipendenti dallo spazio assunto come riferimento, inerziale o non. Si vuol dire più precisamente che, anche se per la sua traduzione in termini espliciti, tale legge richiede la specificazione del riferimento spaziale, essa è necessariamente *invariantiva* rispetto alla scelta incondizionata di questo.

In ogni caso, l'idea di GALILEO, pur essenziale, non basta da sola a specificare nè gli argomenti p, nè la struttura della funzione a secondo membro della (19). Tale specificazione comincia a delinearsi, non appena si accetti il *postulato del parallelogramma delle accelerazioni;* cioè l'ipotesi che, decomposto comunque I in due sottoinsiemi parziali I' ed I'' disgiunti, l'accelerazione di ϵ, in presenza dell'*intero* I, sia pari alla somma vettoriale delle accelerazioni $\mathbf{a}'$ ed $\mathbf{a}''$, che competerebbero allo stesso elemento se esso fosse in presenza delle singole parti I' ed I'' separatamente.

Invero, tale postulato, indicata con $\mathbf{a}_s$ l'accelerazione che avrebbe ϵ se fosse in presenza del *solo* elemento ϵ_s, si traduce nella condizione che la funzione $\mathbf{a}$

2° membro della (19) verifichi la seguente proprietà di additività:

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{a}(p_1, p_2, \ldots, p_{N'}) \equiv \sum_{s=1}^{N} \mathrm{a}_s(p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_{n_s}^{(s)}),$$

con l'intesa che, per ogni s fissato, i parametri $p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_{n_s}^{(s)}$ siano, tra i parametri originari, solo quelli che riguardano ϵ ed ϵ_s.

Per riconoscere la validità della decomposizione strutturale (20), indicata con A_s $(s = 1, 2, \ldots, N-1)$ l'accelerazione che avrebbe ϵ se fosse in presenza dei soli elementi $\epsilon_{s+1} \ldots \epsilon_N$, cominciamo col supporre $I' \equiv \epsilon_1$. Si avrà allora

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{A}_1,$$

nonchè, procedendo in maniera analoga per i vari A_s,

$$\mathrm{A}_s = \mathrm{a}_{s+1} + \mathrm{A}_{s+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, N-1),$$

con l'intesa che sia $\mathrm{A}_N = 0$, subordinatamente al principio d'inerzia. E' chiaro che, sommando le relazioni precedenti membro a membro, si ottiene direttamente la (20), c.d.d.

9. Elementi isolati: postulati per le accelerazioni, e massa dinamica. La proprietà di additività di cui alla (20) riduce in definitiva, per quanto riguarda la specificazione dell'accelerazione di ϵ, il caso generale: ϵ in presenza di un insieme I comunque complesso, al caso in cui I sia, esso stesso, costituito da un solo elemento di materia.

Consideriamo pertanto il caso di due *qualunque* elementi puntiformi *isolati* ϵ ed ϵ', dei quali diremo P e P' rispettivamente le posizioni attuali, $\rho = |PP'|$ la distanza, nonchè $\mathrm{u} \equiv PP'/\rho$ il versore di PP'. L'adattamento della terza legge di NEWTON allo schema microscopico impone, per le accelerazioni a ed a' dei due elementi rispetto ad un riferimento inerziale, i seguenti *postulati:*

a) *Il rapporto a/a' delle grandezze delle accelerazioni è invariante:*

$$\text{(21)} \qquad a/a' = \text{inv.} \qquad \forall \epsilon, \epsilon'.$$

Si vuol dire che, a differenza delle singole accelerazioni a ed a', le quali dipenderanno generalmente da varie circostanze (posizioni dei due elementi, divario di velocità, condizione fisica, ecc.), il loro rapporto dipende solo dalla costituzione dei due elementi considerati, è cioè una *caratteristica assoluta* di questi.

b) Ad *ogni* elemento di materia ϵ si può associare, in modo univoco, un *invariante positivo m: massa di ϵ*, in modo che sia rispettata la condizione che segue. *Per una qualunque coppia di elementi* ϵ ed ϵ' e per *ogni loro moto, il rapporto m'/m delle masse coincide con il rapporto inverso delle accelerazioni,*

invariante in base al postulato precedente:

$$\text{(22)} \qquad \frac{m'}{m} = \frac{a}{a'} \qquad \forall \epsilon, \epsilon'.$$

c) *Gli orientamenti delle accelerazioni* a *ed* a' *sono opposti,* cioè a ed a' hanno la medesima direzione ma differiscono per i versi; ciò che, con l'intervento del postulato di cui alla (22), si traduce nella condizione vettoriale

$$\text{(23)} \qquad m\mathrm{a} + m'\mathrm{a}' = 0.$$

d) *La direzione comune delle accelerazioni* a *ed* a' *è quella della congiungente i due punti P e P',* ferma restando l'indeterminazione per i versi. Si ha cioè, tenuto anche conto del precedente postulato:

$$\text{(24)} \qquad \mathrm{a} = \pm a\mathrm{u}, \qquad \mathrm{a}' = \mp a'\mathrm{u} \qquad \forall \epsilon, \epsilon',$$

con i segni superiori o inferiori, a seconda che l'effetto della presenza dell'uno elemento sull'altro sia di tipo attrattivo o repulsivo.

Si noti esplicitamente che il postulato b) corrisponde ad una *definizione dinamica di massa,* in quanto basata su misure di accelerazioni, sia pure ipotetiche, essendo relative a due elementi di materia isolati. Come è naturale, tali masse sono definite *numericamente*, attraverso i rapporti (22), a meno di un comune fattore, disponibile finchè non si fissi l'unità di misura, ovvero il valore numerico di una *massa campione.*

10. Vettore rappresentativo di una forza. Principio di reazione. Una volta introdotto il concetto di massa, riprendiamo la definizione (20), tenendo conto che, per l'accelerazione a_s di ϵ, il postulato d), come dalla (24), ne specifica la direzione:

$$\text{(25)} \qquad \mathrm{a}_s = \pm\, a_s \mathrm{u}_s,$$

essendo u_s il versore della congiungente PP_s.

Ciò premesso, è del tutto spontaneo definire *vettore rappresentativo della forza,* o più semplicemente *forza esplicata da ϵ_s su ϵ*, il prodotto della massa di ϵ per la sua accelerazione a_s, conseguente alla sola presenza di ϵ_s:

$$\text{(26)} \qquad \mathrm{f}_s \equiv m\mathrm{a}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, N).$$

Più precisamente, si parlerà di *valore attuale* o di *legge* di f_s, a seconda che si pensi al valore istantaneo dell'accelerazione a_s, ovvero alla sua espressione in funzione dei parametri $p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_{n_s}^{(s)}$ di cui al secondo membro della (20).

In ogni caso si avrà, come dalla (25),

$$\text{(27)} \qquad \mathrm{f}_s = \varphi_s \mathrm{u}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, N),$$

con

(28) $$\varphi_s \equiv \pm\, ma_s = \left\langle \begin{array}{l} \varphi_s(t) \\ \varphi_s(p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_{n_s}^{(s)}), \end{array}\right.$$

a seconda che si faccia riferimento al valore attuale della forza, ovvero alla sua legge esplicita.

In modo del tutto analogo, si chiamerà *forza esplicata su ϵ da I*, il prodotto della massa di ϵ per la sua accelerazione a, quale risultato diretto della presenza dell'insieme I:

(29) $$\mathbf{f} \equiv m\mathbf{a};$$

con la conclusione che la proprietà di additività dell'accelerazione a, di cui alla (20), si traduce nel principio del parallelogramma delle forze:

(30) $$\mathbf{f} = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{f}_s,$$

e la specificazione della legge di forza per f viene ricondotta a quella delle leggi parziali $\mathbf{f}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$.

E' chiaro che, in termini di forze, anzichè di accelerazioni, le (23) e (24) traducono direttamente il principio di reazione sullo schema microscopico: *per due qualunque elementi di materia isolati, ϵ ed ϵ', le mutue azioni costituiscono sempre una coppia di braccio nullo*, ovvero

(31) $$\mathbf{f} = -\mathbf{f}' \qquad OP \times \mathbf{f} = -OP' \times \mathbf{f}'.$$

Passando dai singoli ϵ ed ϵ' a due insiemi di elementi di materia, I ed I', costituenti nel complesso un *sistema isolato*, cioè estremamente "lontano" da altri elementi materiali, il principio di reazione si modifica totalmente. Si vuol dire, più precisamente, che le mutue azioni dinamiche di I ed I' non si riassumono in una coppia di braccio nullo, ma in due sistemi di vettori applicati: Σ e Σ' rispettivamente, costituenti nel complesso un *insieme di tante coppie di braccio nullo*. Ne consegue che Σ e Σ' costituiscono complessivamente un sistema di vettori *riducibili a zero*, ovvero Σ e $-\Sigma'$ sono mutuamente riducibili, cioè avranno *risultante e momento risultante opposti:*

(32) $$\mathbf{R} = -\mathbf{R}', \qquad \mathbf{M}_0 = -\mathbf{M}_0';$$

ciò che non autorizza a ritenere che ciascuno dei due sistemi Σ e Σ' sia riducibile ad *un* vettore applicato.

Tuttavia, anche se, in via eccezionale, tale circostanza si presentasse, cioè Σ e Σ' fossero entrambi riducibili ad un vettore, non c'è nessun motivo di ritenere che

l'azione dinamica di I su I', e viceversa, dipenda *esclusivamente* da tali vettori. Invero, la nozione di riducibilità coinvolge soltanto gli elementi globali: risultante e momento risultante; laddove un insieme di forze, dal punto di vista dinamico, solo eccezionalmente può essere sostituito da un insieme di vettori ad esso riducibile. Tale sostituzione sarà accettabile, in maniera sistematica, solo per i corpi rigidi.

11. Principio di invarianza della legge di una forza. L'aver ricondotto, per quanto riguarda la specificazione delle forze, il caso generale di un corpo naturale in presenza di altri corpi a quello, concettualmente più semplice, di due elementi di materia isolati, pur essendo un notevole passo avanti, non è ancora risolutivo. Invero, rimane ancora completamente aperto il problema della determinazione esplicita della legge di forza in quest'ultimo caso; cioè la specificazione non soltanto dei parametri, ma della struttura stessa della funzione φ_s di cui alle (27) - (28):

(33) $$\varphi_s = \varphi_s(p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_{n_s}^{(s)}).$$

Si tratta di una scelta che, caso per caso, può essere fatta solo in base a suggerimenti desunti da esperienze e osservazioni, eventualmente attraverso processi induttivi. In ogni caso, la legge formulata deve necessariamente uniformarsi alla proprietà di avere carattere invariantivo rispetto alla scelta del riferimento spaziale: *principio di invarianza delle leggi di forza.* A tale principio si uniforma, ad esempio, la legge di gravitazione universale:

(34) $$\varphi_s = f\frac{mm_s}{\rho_s^2},$$

essendo $f > 0$ la *costante di attrazione newtoniana.* Ad essa corrisponde per ϵ, come dalle (27) e (30), un'attrazione totale

(35) $$\mathbf{f} = m\mathbf{G},$$

essendo

(36) $$\mathbf{G} \equiv f\sum_{s=1}^{N}\frac{m_s}{\rho_s^2}\,\mathbf{u}_s \qquad \left(\mathbf{u}_s \equiv \frac{PP_s}{\rho_s}\right),$$

il *campo gravitazionale in P per unità di massa,* funzione ben determinata, oltre che delle masse attraenti m_s, dei punti P e P_s $(s = 1, 2, \ldots, N)$.

Una legge di forza, del tutto analoga alla (34), vale per particelle cariche — *legge elettrostatica* di COULOMB —, con le cariche q e q_s in luogo delle masse, e il segno meno o più a secondo membro, a seconda che le cariche siano dello stesso segno o di segno opposto.

Un insieme I di particelle cariche dello stesso segno dà luogo, pertanto, ad un campo elettrostatico in P, per unità di carica q, pari a

$$\text{(37)} \qquad \mathbf{E} = \mp K \sum_{s=1}^{N} \frac{q_s}{\rho_s^2} \mathbf{u}_s .$$

Se poi l'insieme I è costituito da *particelle materiali cariche,* si avrà a rigore, nel generico punto P, la sovrapposizione dei due campi $\mathbf{G}$ ed $\mathbf{E}$. Tuttavia, come è ben noto dalla Fisica, il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ di gran lunga prevale sul concomitante campo gravitazionale $\mathbf{G}$. Ne consegue che la legge (34) acquista un reale significato solo per particelle allo *stato neutro*; e neppure *troppo vicine* [14], in quanto, per ragioni attinenti alla complessa struttura delle molecole, sono ancora di tipo essenzialmente elettromagnetico le *forze molecolari.* Si vuol dire le azioni esplicate tra elementi di materia estremamente vicini, sia che facciano parte di un medesimo corpo naturale, sia che appartengano a corpi a contatto (forze di coesione, di adesione, ecc.).

In ogni caso, dato il significato invariantivo non soltanto della distanza $\rho_s = |PP_s|$:

$$\text{(38)} \qquad \rho_s^2 = PP_s \cdot PP_s ,$$

ma anche della sua derivata temporale $\dot{\rho}_s$ [15]:

$$\text{(39)} \qquad \dot{\rho}_s = \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}),$$

(subordinatamente alla scelta di una scala *assoluta* dei tempi), è perfettamente legittima una qualunque legge di forza del tipo

$$\text{(40)} \qquad \varphi_s = \varphi_s(\rho_s, \dot{\rho}_s, t),$$

essendo il secondo membro una *funzione arbitraria* dei tre parametri indicati.

Viceversa, è agevole riconoscere che la (40) corrisponde alla *più generale* legge di forza soddisfacente il principio di invarianza rispetto alla scelta del riferimento; almeno nell'ambito di una dipendenza del tipo

$$\text{(41)} \qquad \varphi_s = \varphi_s(P, P_s, \mathbf{v}, \mathbf{v}_s, t),$$

ovvero, in termini di parametri scalari,

$$\text{(41')} \qquad \varphi_s = \varphi_s(x/x_s/\dot{x}/\dot{x}_s/t).$$

Invero, data l'invarianza ammessa, scegliamo il riferimento $\mathcal{T}$, comunque disponibile, con la condizione che esso, istante per istante, abbia origine in P ed uno degli assi, ad esempio x^1, orientato come PP_s. Dovendosi intendere, con tale scelta, le variabili x^i ed x_s^i tutte identicamente nulle, insieme alle loro derivate, tranne

$$x_s^1 \equiv \rho_s \ \text{e} \ \dot{x}_s^1 \equiv \dot{\rho}_s ,$$

è chiaro che il secondo membro della (41') si riduce ad una ben determinata funzione dei tre soli parametri ρ_s, $\dot{\rho}_s$ e t, quindi del tipo (40); ciò che prova l'asserto.

Una volta accertato che *la* (40) *corrisponde alla più generale legge di forza reale sullo schema microscopico* [16], a parte naturalmente l'intervento di parametri *scalari* da ritenere *costanti* in ogni moto, appare chiaro in che senso debba ritenersi $\mathbf{f}_s$, ovvero la forza totale $\mathbf{f}$, come una ben determinata funzione di P, $\mathbf{v}$ e t.

Più precisamente, una volta fissato il riferimento $\mathcal{T}$, la forza reale $\mathbf{f}$ si riduce ad una ben determinata funzione del tipo (15), *non appena si intenda conosciuto* (in $\mathcal{T}$) *il moto di tutto l'insieme I,* cioè il movimento di *tutti* gli elementi di materia che, con la loro presenza, possono influenzare dinamicamente ϵ. Invero, conoscendo a priori la legge di moto degli elementi costituenti I: $OP_s = OP_s(t)$, lo scalare φ_s, nonchè le singole $\mathbf{f}_s$ di cui alla (27) e con esse la forza totale $\mathbf{f}$ di cui alla (30), vengono in definitiva a presentarsi come funzioni note di P, $\mathbf{v}$ e t.

Si dice anche che, nelle ipotesi suddette: conoscenza preventiva del moto di I o condizione equivalente, *il problema del movimento di ϵ è ristretto a tale elemento di materia.*

---

[14] Cioè a distanza superiore al cosiddetto "raggio di azione molecolare", dell'ordine di grandezza di 10^{-5} cm.

[15] La (39) segue direttamente dalla (38) per derivazione rispetto al tempo [cfr. (3) di III,2.1], ed è chiaro che il secondo membro, a differenza del divario $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}$ delle velocità dei due punti, *non* dipende dalla scelta del riferimento. Del resto, passando da un riferimento inerziale $\mathcal{T}_*$ ad un altro riferimento *qualunque* $\mathcal{T}'$, in base al teorema dei moti relativi, si ha successivamente

$$\mathbf{v}_s - \mathbf{v} = \mathbf{v}_s' + \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega}_\tau \times \Omega P_s - \mathbf{v}' - \mathbf{v}_\Omega - \boldsymbol{\omega}_\tau \times \Omega P = \mathbf{v}_s' - \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}_\tau \times PP_s ;$$

ciò che conferma la suddetta invarianza: $(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_s = (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{u}_s = \text{inv.}$.

[16] Di questo tipo è, ad esempio, la formulazione della legge di gravitazione, con la correzione proposta da G. ARMELLINI fin dal 1937:

$$\varphi_s = f \frac{m m_s}{\rho_s^2} (1 + f' \dot{\rho}_s)$$

essendo $f' > 0$ una seconda costante universale [cfr. *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di* NEWTON, Rend. Acc. Lincei, **26**, 209 - 215 (1937)].