

**Esercitazioni Istituzioni di Matematiche in Geologia:
Rette, Piani e Ortogonalità**

La retta per il punto (x_0, y_0) con coefficiente angolare m : $y - y_0 = m(x - x_0)$.
La retta per (x_0, y_0) ortogonale a quella precedente è $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$. Il coefficiente angolare della retta per i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Costruire le rette che passano per il seguente punto e è parallela (ortogonale) alla seguente rette:

1-7. $(1, 3)$, $2x + 3y = -7$; $(9, -3)$, $4x - 3y = 7$; $(2, 5)$, $2x = 7$; $(3, -9)$,
 $y = 4 - 3x$; $(5, -2)$, $y = 6$; $(1, -5)$, $4x + 7y = -12$; $(8, 11)$, $x = 6 - 5y$.

Calcolare il prodotto scalare e l'angolo tra i seguenti vettori:

8-13. $(4, 3)$ e $(3, -4)$; $(1, 2 - \sqrt{3})$ e $(1, 1, \sqrt{3})$; $(1, 4, 2)$ e $(2, 8, 4)$; $(3, 5, -1)$ e
 $(4, -1, 7)$; $(1, 1, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$; $(6, 3, 0)$ e $(1, -2, 2)$.

Consideriamo i due piani di equazione

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Consideriamo la matrici dei coefficienti (2×3) e quella estesa (2×4) :

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\begin{cases} \text{rg}(C) = \text{rg}(E) = 2 \implies \text{Intersezione} = \text{retta}, \\ \text{rg}(C) = 1, \text{rg}(E) = 2 \implies \text{Piani paralleli}, \\ \text{rg}(C) = \text{rg}(E) = 1 \implies \text{Lo stesso piano}. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti piani sono paralleli, coincidono e hanno una retta in comune.

14-21. $2x + 3y - z = 5$ e $3x + y - 2z = 1$; $x + 2y + z = 3$ e $2x - y = 4$;
 $2x + y - 3z = 1$ e $-4x - 2y + 6z = 5$; $x + y - 2z = 3$ e $2z - x - y = -3$;
 $x + y = 3$ e $x - y - z = 2$; $x + y + z = 1$ e $3 - x - y - z = 0$; $x + 2z = 3$
e $2x + 3y - z = 1$; $x + 2y - z = 2$ e $-x - 2y + z = -2$.