



# FISICA MATEMATICA 2

Corso di 6 Crediti  
Corso di Laurea Magistrale  
in Matematica  
A.A. 2013-2014

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Cagliari

Viale Merello 92, 09123 Cagliari

070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 328-0089799 (cell.)

[cornelis110553@gmail.com](mailto:cornelis110553@gmail.com)

<http://bugs.unica.it/~cornelis>

**oppure:** <http://krein.unica.it/~cornelis>



# Indice

<b>I</b>	<b>Equazioni di Hamilton</b>	<b>1</b>
1	Equazioni del moto di Hamilton . . . . .	1
2	Trasformazioni canoniche . . . . .	6
3	Parentesi di Poisson e di Lagrange . . . . .	10
4	Lagrangiana per i Sistemi Continui . . . . .	13
5	Hamiltoniana per i Sistemi Continui . . . . .	17
6	Esempi . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Punti di equilibrio</b>	<b>21</b>
1	Sistema autonomo generalizzato . . . . .	21
2	Derivata di Lie e costanti del moto . . . . .	22
3	Classificazione dei punti di equilibrio . . . . .	23
4	Esempi . . . . .	26
<b>III</b>	<b>Stabilità secondo Liapunov</b>	<b>29</b>
1	Stabilità secondo Liapunov . . . . .	29
2	Stabilità di sistemi autonomi sulla retta . . . . .	30
3	Stabilità di sistemi lineari a coefficienti costanti . . . . .	31
4	Funzione di Liapunov e linearizzazione . . . . .	36
5	Stabilità e loro applicazioni . . . . .	43
6	Stabilità dei sistemi dinamici discreti . . . . .	50
<b>IV</b>	<b>Biforcazioni e cicli-limite</b>	<b>65</b>
1	Teorema di Poincaré-Bendixson . . . . .	65
2	Applicazioni ai sistemi non lineari . . . . .	74
<b>V</b>	<b>Frattali</b>	<b>89</b>
1	Insieme di Cantor e le sue varianti . . . . .	89
2	Caratteristiche dei frattali . . . . .	93
3	Dimensione di Hausdorff . . . . .	95

<b>VI Equazioni Integrabili</b>	<b>101</b>
1 Storia di alcune equazioni integrabili . . . . .	101
2 Generazione di equazioni integrabili . . . . .	105
3 Superfici solitoniche . . . . .	108
4 Inverse scattering transform per la KdV . . . . .	111
5 Inverse scattering transform per la NLS . . . . .	119
<b>A 3-ciclo implica caos</b>	<b>125</b>
<b>B Gruppi di Lie</b>	<b>131</b>
1 Algebre di Lie . . . . .	131
2 Algebra di Lie di un gruppo di matrici . . . . .	132
3 Alcuni esempi dettagliati . . . . .	135
<b>C Forma Normale di Jordan</b>	<b>139</b>
1 Catene di Jordan . . . . .	139
2 Forme normali di Jordan: Matrici complesse . . . . .	141
3 Forme normali di Jordan: Matrici reali . . . . .	142
<b>D Esempi ed esercizi</b>	<b>145</b>
1 Esempi . . . . .	145
2 Esercizi . . . . .	147
<b>Bibliografia</b>	<b>157</b>

# Capitolo I

## Equazioni di Hamilton

### 1 Equazioni del moto di Hamilton

Nella formulazione lagrangiana il moto di un sistema ad  $n$  gradi di libertà viene descritto dalle  $n$  equazioni

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{I.1})$$

dove  $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$  è la lagrangiana. Lo stato del sistema viene rappresentato da un unico punto nello *spazio delle configurazioni*  $n$ -dimensionale le cui coordinate sono le coordinate generalizzate  $q_i$ . Descrivere il moto del sistema significa seguire questo punto lungo la sua traiettoria nello spazio delle configurazioni. Tutte le  $n$  coordinate devono essere indipendenti e non devono essere presenti equazioni di vincolo. Se le  $n$  coordinate non fossero indipendenti si dovrebbe, prima di impostare il problema, ridurre il numero delle incognite ad  $m < n$ .

Nella formulazione hamiltoniana si cercherà di descrivere il moto con un sistema di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine. Le  $2n$  equazioni del moto descriveranno l'evoluzione del punto rappresentativo del sistema in uno spazio di dimensione  $2n$ , detto *spazio delle fasi*, le cui coordinate saranno le  $2n$  variabili indipendenti associate al sistema. La scelta naturale, ma non l'unica possibile, per raddoppiare le coordinate indipendenti del problema, è quella di scegliere metà di esse come le  $n$  coordinate generalizzate  $q_i$ . Come rimanenti coordinate scegliamo i *momenti coniugati* o *generalizzati*  $p_i$  definite da:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (\text{I.2})$$

Le variabili  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  sono generalmente note come *variabili canoniche*.

La cosiddetta trasformazione di Legendre da  $(q, \dot{q}, t)$  a  $(q, p, t)$  agisce come segue. Il differenziale della lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  è

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Definendo l'*hamiltoniana* come

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{I.3})$$

e differenziando il secondo membro della (I.3), si ottiene

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

D'altra parte, il differenziale dell'*hamiltoniana* è dato da:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Di conseguenza, otteniamo le  $2n + 1$  equazioni

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.4a})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.4b})$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (\text{I.4c})$$

Le equazioni (I.4a) e (I.4b) sono note come le *equazioni di Hamilton*. Esse costituiscono un sistema di  $2n$  equazioni del moto del primo ordine e sostituiscono le  $n$  equazioni del secondo ordine di Lagrange.

Nello studio di un problema concreto la costruzione dell'hamiltoniana deve comunque passare attraverso la formulazione lagrangiana. Il procedimento formale richiede una sequenza piuttosto impegnativa di passaggi:

- a. Dopo aver scelto le coordinate generalizzate  $q_i$ , si costruisca la lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t) = T - V$ .
- b. Attraverso le definizioni (I.2) si ricavano i momenti generalizzati in funzione di  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $t$ .
- c. Utilizzando la (I.3) si costruisce l'hamiltoniana, che risulta (in questo stadio) essere una funzione di  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $p$  e  $t$ .
- d. Invertendo le (I.2) si ricavano le  $\dot{q}_i$  in funzione di  $(q, p, t)$ .
- e. Eliminando  $\dot{q}$  dall'espressione per l'hamiltoniana, si arriva ad un'hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$ . Soltanto da questo punto si possono derivare le equazioni di Hamilton.

**Esempio I.1 (campo elettromagnetico)** Sia

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - q \left( V(\vec{r}) - \frac{1}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \right),$$

dove  $m$  e  $q$  sono la massa e la carica della particella,  $c$  è la velocità della luce e  $V = V(\vec{r})$  e  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$  sono i potenziali elettrici e magnetici. Le tre equazioni di Eulero-Lagrange si riducono a:

$$m\ddot{\vec{r}} = -q \left( \nabla V + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \left( \dot{\vec{r}} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) \right) = q\vec{E} + \frac{q}{c}(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}),$$

dove  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono i campi elettrici e magnetici. Le coordinate generalizzate sono  $\vec{r} = (x, y, z)$ , mentre i momenti generalizzati sono:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_1.$$

In altre parole,  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}$ . Quindi l'hamiltoniana è data da:

$$H = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 + qV(\vec{r}) = \frac{1}{2m} \left| \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right|^2 + qV(\vec{r}).$$

Le sei equazioni di Hamilton si riducono a:

$$\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} = m\dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{p}} = -q\nabla V + \frac{q}{mc}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \cdot \nabla A.$$

□

**Esempio I.2 (Toda lattice periodico)** Consideriamo la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + V(q_2 - q_1) + V(q_3 - q_2) + \dots + V(q_n - q_{n-1}) + V(q_1 - q_n),$$

dove

$$V(r) = e^{-r} + r - 1 = \frac{1}{2}r^2 + O(r^3), \quad V'(r) = 1 - e^{-r} = r + O(r^2), \quad r \rightarrow 0.$$

Allora le equazioni di Hamilton sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_j, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} = V'(q_{j+1} - q_j) - V'(q_j - q_{j-1}) \\ &= e^{-(q_j - q_{j-1})} - e^{-(q_{j+1} - q_j)}, \end{aligned}$$

essendo  $q_0 = q_n$  e  $q_{n+1} = q_1$ . Di conseguenza, otteniamo la cosiddetta equazione non lineare della Toda lattice

$$\ddot{q}_j = \begin{cases} e^{-(q_1 - q_n)} - e^{-(q_2 - q_1)}, & j = 1, \\ e^{-(q_j - q_{j-1})} - e^{-(q_{j+1} - q_j)}, & j = 2, \dots, n-1, \\ e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{-(q_1 - q_n)}, & j = n. \end{cases}$$

Quest'equazione coincide con l'equazione di Eulero-Lagrange. Si vede subito che  $H$  e  $p_1 + \dots + p_n$  sono costanti del moto. □

Una coordinata si dice *ciclica* se non compare esplicitamente nella lagrangiana. In virtù delle equazioni di Eulero-Lagrange, se  $q_j$  è una coordinata ciclica, allora il momento generalizzato  $p_j$  è una costante del moto, poichè

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0.$$

Inoltre, se  $q_j$  è ciclica, allora non compare esplicitamente nemmeno nell'hamiltoniana, infatti, sfruttando le equazioni di Eulero-Lagrange, si ha

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Un'altra legge di conservazione segue dalla (I.4c). Infatti

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},\end{aligned}$$

e, se il tempo  $t$  non compare esplicitamente in  $H$  (o in  $L$ ), allora l'hamiltoniana  $H$  è una costante del moto.

Infine supponiamo che le coordinate generalizzate  $q_1, \dots, q_n$  e i momenti generalizzati  $p_1, \dots, p_n$  non siano indipendenti ma invece siano sottoposti ad  $m$  (con  $m < n$ ) vincoli

$$\psi_k(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Introducendo i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  e l'hamiltoniana estesa

$$\begin{aligned}H_e(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, t) &= H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \lambda_k \psi_k(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t),\end{aligned}$$

otteniamo le seguenti equazioni di Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_e}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.5a})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H_e}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.5b})$$

$$0 = \frac{\partial H_e}{\partial \lambda_j} = \psi_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (\text{I.5c})$$

Introduciamo ora la formulazione simplettica delle equazioni di Hamilton. Consideriamo le nuove variabili  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{2n})$  nel seguente modo:

$$\eta_i = \begin{cases} q_i, & i = 1, \dots, n, \\ p_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Allora

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)_i = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial H}{\partial p_{i-n}} = \dot{q}_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Di conseguenza, le equazioni di Hamilton si possono scrivere nel seguente modo:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad (\text{I.6})$$

dove

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -I_n & 0_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{J}$  si dice *simplettica* nel senso che

$$\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -I_{2n}.$$

Inoltre,  $\det \mathbf{J} = 1$ .

## 2 Trasformazioni canoniche

Eseguiamo una trasformazione simultanea delle coordinate e dei momenti indipendenti  $q_i$  e  $p_i$  in un nuovo sistema  $P_i$  e  $Q_i$  mediante un sistema di equazioni invertibili

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t), \\ P_i = P_i(q, p, t), \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

che costituisce una trasformazione puntuale dello spazio delle fasi. Passando da coordinate canoniche  $q$  e  $p$  a coordinate canoniche  $Q$  e  $P$ , la trasformazione si dice *canonica* se esiste una funzione  $K(Q, P, t)$  tale che

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (\text{I.8})$$

La funzione  $K$  gioca il ruolo dell'hamiltoniana nel nuovo sistema di coordinate. Si può dimostrare l'esistenza di una funzione generatrice  $F = F_1(q, Q, t)$  tale che

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Una trasformazione canonica del tipo (I.7) si dice *ristretta* se la funzione generatrice  $F = F_1(q, Q, t)$  non dipende esplicitamente da  $t$ . In tal caso  $K = H$  per tutte le trasformazioni canoniche ristrette.

**Esempio I.3 (oscillatore armonico)** Per opportune costanti  $m$  (massa) e  $k$  si ha

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2 + m^2\omega^2q^2}{2m},$$

essendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Ponendo

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q), \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos(Q),$$

risulta

$$H = \omega P,$$

per cui  $Q$  è una variabile ciclica. Quindi  $\dot{P} = 0$  e

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega.$$

Di conseguenza,  $Q = \omega t + \alpha$ . Infine,

$$q = \sqrt{\frac{2H}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha), \quad p = \sqrt{2mH} \cos(\omega t + \alpha).$$

□

Discutiamo ora le trasformazioni canoniche ristrette

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p), \\ P_i = P_i(q, p), \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

nell'ambito della formulazione simplettica. Tale trasformazione

$$(q, p) \mapsto (Q, P)$$

determina che

$$\boldsymbol{\eta} = (q, p) \mapsto \boldsymbol{\zeta} = (Q, P), \quad (\text{I.10})$$

essendo

$$\eta_i = \begin{cases} q_i, & i = 1, \dots, n, \\ p_{i-n}, & i = n + 1, \dots, 2n; \end{cases}$$

$$\zeta_i = \begin{cases} Q_i, & i = 1, \dots, n, \\ P_{i-n}, & i = n + 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Definendo la matrice quadrata  $\mathbf{M}$  di ordine  $2n$  come:

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \quad M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j},$$

otteniamo

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (\text{I.11})$$

Siccome

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{2n} M_{ji} \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}$$

e dunque

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}^T \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}},$$

arriviamo alle nuove equazioni di Hamilton

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \quad (\text{I.12})$$

dove nella terza uguaglianza si è fatto uso della(I.6).

Da quanto precedentemente detto per le funzioni generatrici, nel caso di trasformazioni canoniche ristrette, la nuova hamiltoniana è uguale alla vecchia espressa nelle nuove variabili:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \quad (\text{I.13})$$

La trasformazione  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$  sarà canonica se e solo se la matrice  $\mathbf{M}$  verifica la condizione

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}. \quad (\text{I.14})$$

**Proposizione I.4** *L'insieme delle matrici reali  $2n \times 2n$*

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{\mathbf{M} : \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}\}$$

*costituisce un gruppo non abeliano. Inoltre,  $\mathbf{M} \in Sp(2n, \mathbb{R})$  se e solo se  $\mathbf{M}^T \in Sp(2n, \mathbb{R})$ .*

Il gruppo  $Sp(2n, \mathbb{R})$  si chiama il *gruppo simplettico*. Si può dimostrare che tutte le matrici appartenenti a  $Sp(2n, \mathbb{R})$  hanno determinante uguale a  $+1$ .<sup>1</sup> Il caso  $n = 1$  è particolarmente elementare. In tal caso la matrice reale  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  appartiene a  $Sp(2, \mathbb{R})$  se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

oppure: se e solo se  $ad - bc = 1$ . Quindi  $Sp(2, \mathbb{R})$  coincide con il gruppo  $SL_2(\mathbb{R})$  delle matrici reali di ordine 2 con determinante uguale a 1.

---

<sup>1</sup> $Sp(2n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie connesso e non compatto. Una matrice reale  $A$  di ordine  $2n$  appartiene alla sua algebra di Lie  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$  se e solo se  $A^T = \mathbf{J} A \mathbf{J}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . Allora

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) \mathbf{J} (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)^T &= (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) \mathbf{J} (\mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_1^T) \\ &= \mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 \mathbf{J} \mathbf{M}_2^T) \mathbf{M}_1^T = \mathbf{M}_1 \mathbf{J} \mathbf{M}_1^T = \mathbf{J}, \end{aligned}$$

e quindi  $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ .

Sia ora  $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . Allora, essendo  $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$ , si ha

$$(-\mathbf{J}) \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = (-\mathbf{J}) \mathbf{J} = I_{2n},$$

e quindi  $-\mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{J}$  è l'inversa di  $\mathbf{M}^T$ . Dunque

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} (\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{M}^T (-\mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{J}) (\mathbf{J}) = \mathbf{J},$$

essendo  $\mathbf{J}^2 = -I_{2n}$ . Di conseguenza,  $\mathbf{M}^T \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ .

Sia ora  $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . Allora, utilizzando che  $\mathbf{M}^T \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{M}^{-1})^T &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{M}^T)^{-1} \\ &= -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{M}^T)^{-1} = -(\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M})^{-1} = -(\mathbf{J})^{-1} = \mathbf{J}, \end{aligned}$$

e quindi  $\mathbf{M}^{-1} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . □

È chiaro che  $\det \mathbf{M} = \pm 1$  per ogni  $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . Infatti, se  $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  e quindi  $\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}$ , si ha  $1 = \det \mathbf{J} = (\det \mathbf{M})^2 \det \mathbf{J} = (\det \mathbf{M})^2$ . Di conseguenza, la misura di un elemento di volume nello spazio delle fasi è invariante rispetto alle trasformazioni canoniche ristrette. Infatti, la matrice jacobiana della trasformazione  $\boldsymbol{\eta} \mapsto \boldsymbol{\zeta}$  è data da

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \quad M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j},$$

e tale matrice ha determinante uguale ad  $\pm 1$ . Quindi la misura di qualunque regione nello spazio delle fasi è un invariante canonico.

Introducendo il prodotto scalare indefinito

$$\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} = (\mathbf{J} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}^T \mathbf{J} \mathbf{m}, \quad \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

si vede che il gruppo  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  consiste nelle matrici  $\mathbf{M}$  che sono  $\mathbf{J}$ -ortogonali. Infatti,

$$\{\mathbf{M} \mathbf{m}, \mathbf{M} \mathbf{n}\} = (\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{J} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}, \quad \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

### 3 Parentesi di Poisson e di Lagrange

**a. Parentesi di Poisson.** La *parentesi di Poisson* di due funzioni  $u$  e  $v$  delle variabili canoniche  $(q, p)$  viene definita da

$$\begin{aligned} [u, v]_{q,p} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = [u, v]_{\boldsymbol{\eta}}. \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Poichè

$$\begin{cases} [q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p}, \\ [q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{jk} = -[p_j, q_k]_{q,p}, \end{cases}$$

otteniamo la matrice quadrata delle parentesi di Poisson

$$[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}]_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}. \quad (\text{I.16})$$

Dimostriamo ora che ogni parentesi di Poisson è un invariante canonico.

**Proposizione I.5** *La parentesi di Poisson di due variabili  $u$  e  $v$  non cambia sotto una trasformazione canonica ristretta.*

*Dimostrazione.* Sia  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$  una trasformazione canonica ristretta. Allora

$$\begin{aligned} [u, v]_{\boldsymbol{\eta}} &= \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \left[ \mathbf{M}^T \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \mathbf{J} \mathbf{M}^T \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = [u, v]_{\boldsymbol{\zeta}}, \end{aligned}$$

come affermato. □

Grazie alla Proposizione I.5, si può scrivere  $[u, v]$  per la parentesi di Poisson  $[u, v]_{\boldsymbol{\eta}}$  senza mettere in evidenza le variabili canoniche. Elenchiamo ora le proprietà algebriche della parentesi di Poisson.

**Teorema I.6** *Le parentesi di Poisson hanno le seguenti proprietà algebriche:*

$$[u, u] = 0, \quad (\text{I.17a})$$

$$[u, v] = -[v, u], \quad (\text{antisimmetria}) \quad (\text{I.17b})$$

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w], \quad (\text{bilinearità}) \quad (\text{I.17c})$$

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w], \quad (\text{I.17d})$$

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (\text{identità di Jacobi}) \quad (\text{I.17e})$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti.

*Dimostrazione.* La (I.17b) è immediata dalla (I.15) e implica la (I.17a). Inoltre, la bilinearità della parentesi di Poisson è immediata dalla (I.15). Inoltre,

$$\begin{aligned} [u, w]_{\eta} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial uv}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial uv}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right] v + u \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right] \\ &= [u, w]v + u[v, w], \end{aligned}$$

che dimostra la (I.17d).

La dimostrazione della identità di Jacobi comporta a molti calcoli. Infatti,

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] &= \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} [v, w] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[ \sum_{k,l} \frac{\partial v}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial w}{\partial \eta_l} \right] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial w}{\partial \eta_l} + \frac{\partial v}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_l} \right], \\ [v, [w, u]] &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} [w, u] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[ \sum_{k,l} \frac{\partial w}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial u}{\partial \eta_l} \right] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial u}{\partial \eta_l} + \frac{\partial w}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_j \partial \eta_l} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[w, [u, v]] &= \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} [u, v] \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[ \sum_{k,l} \frac{\partial u}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial v}{\partial \eta_l} \right] \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial v}{\partial \eta_l} + \frac{\partial u}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_j \partial \eta_l} \right].
\end{aligned}$$

Raccogliendo i termini con le derivate parziali seconde di  $w$ , otteniamo

$$\sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial v}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_l} + \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial u}{\partial \eta_l}.$$

Cambiando i pedici  $(i, j, k, l) \mapsto (k, l, j, i)$  nel secondo termine, otteniamo

$$\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \frac{\partial v}{\partial \eta_k} [J_{ij} + J_{ji}] J_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_l}.$$

Poichè  $J_{ij} + J_{ji} = 0$ , risulta infine la (I.17e). □

**b. Parentesi di Lagrange.** La *parentesi di Lagrange* di due variabili  $u$  e  $v$  rispetto alle variabili  $\boldsymbol{\eta} = (q, p)$  è definita da:

$$\{u, v\}_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}. \quad (\text{I.18})$$

In tal caso

$$\begin{aligned}
\{u, v\}_{\boldsymbol{\zeta}} &= \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial v} = \left[ \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} \\
&= \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} = \{u, v\}_{\boldsymbol{\eta}}.
\end{aligned}$$

Quindi la parentesi di Lagrange di due variabili  $u$  e  $v$  non cambia sotto una trasformazione canonica ristretta.

Utilizzando la definizione (I.18), risultano le seguenti identità:

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{i,j}.$$

Quindi

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \{q_i, q_j\}_{i,j=1}^n & \{q_i, p_j\}_{i,j=1}^n \\ \{p_i, q_j\}_{i,j=1}^n & \{p_i, p_j\}_{i,j=1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \quad (\text{I.19})$$

Dalle equazioni (I.16) e (I.19) e dall'invarianza delle due parentesi rispetto alle trasformazioni canoniche ristrette otteniamo

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\}[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}] = \mathbf{J}\mathbf{J} = -I_{2n}. \quad (\text{I.20})$$

**c. Quantità conservate.** Sia  $u = u(q, p, t)$  una qualsiasi quantità. Allora

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

In notazioni simplettiche si ha:

$$\frac{du}{dt} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (\text{I.21})$$

Quindi *una quantità  $u$  che non dipende esplicitamente dal tempo è una costante del moto se e solo se  $[u, H] = 0$* . In particolare, l'hamiltoniana  $H$  è una costante del moto se essa non dipende esplicitamente dal tempo.

**Proposizione I.7** *Siano  $u$  e  $v$  quantità che non dipendono esplicitamente dal tempo. Allora la loro parentesi di Poisson è una costante del moto se lo sono  $u$  e  $v$ .*

*Dimostrazione.* Applicando l'identità di Jacobi (I.17e), risulta:

$$[[u, v], H] = -[H, [u, v]] = [v, [H, u]] + [u, [v, H]] = -[v, [u, H]] + [u, [v, H]] = 0,$$

essendo  $[u, H] = 0 = [v, H]$ . □

## 4 Lagrangiana per i Sistemi Continui

Lasciamoci guidare dal seguente

**Esempio I.8** Consideriamo un sistema composto da una catena biinfinita di oscillatori (ciascuno di massa  $m$ ) che si possono muovere solo lungo l'asse della catena. Indicando lo spostamento della  $i$ -esima particella dalla sua posizione di equilibrio con  $q_i$ , l'energia cinetica e quella potenziale sono date da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} m \dot{q}_i^2, \quad V = \frac{k}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (q_{i+1} - q_i)^2,$$

essendo  $k$  una costante positiva. In tal caso la lagrangiana

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [m\dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a \left[ \frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} aL_i, \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

dove  $a$  è la distanza di equilibrio tra i singoli oscillatori. Le infinite equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} \right) + ka \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} \right) = 0.$$

In altre parole,

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \left( \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (\text{I.23})$$

Facendo tendere  $a \rightarrow 0^+$  per ottenere un continuo di oscillatori,  $m/a$  si riduce alla massa lineare del sistema continuo. D'altra parte,

$$\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2} \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{q(x+a) - 2q(x) + q(x-a)}{a^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

dove  $x$  è la coordinata spaziale. Infine la legge di Hooke specifica che l'allungamento per unità di lunghezza  $\xi$  è proporzionale alla forza  $F$  che si esercita sull'asta:

$$F = K\xi,$$

dove  $K$  è il cosiddetto modulo di Young. Si ha:

$$F = k(q_{i+1} - q_i) = ka \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right) \rightarrow Kq_x,$$

dove  $ka \rightarrow K$  se  $a \rightarrow 0^+$ . Di conseguenza, per  $a \rightarrow 0^+$  la (I.23) tende all'equazione differenziale parziale

$$\mu \ddot{q} - Kq_{xx} = 0. \quad (\text{I.24})$$

Per  $a \rightarrow 0^+$ , l'espressione (I.22) per la lagrangiana tende a

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mu \dot{q}^2 - K \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(q, q_x, \dot{q}, x, t),$$

essendo  $\mathcal{L}$  la densità lagrangiana. □

In generale, il *principio di Hamilton* per i sistemi continui consiste nel determinare i punti stazionari dell'integrale di azione

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \mathcal{L},$$

dove

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, \dot{q}, x, t).$$

La variazione dell'integrale di azione  $I$  si applica solo a  $q$  e alle sue derivate, lasciando invariati il punto iniziale  $(x_1, t_1)$  e quello finale  $(x_2, t_2)$ . Ponendo

$$q(x, t; \alpha) = q(x, t; 0) + \alpha \zeta(x, t),$$

dove  $\zeta(x, t)$  è qualunque funzione regolare che si annulla negli estremi  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$ , otteniamo mediante due integrazioni per parti

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \frac{\partial q_x}{\partial \alpha} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial q}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \right], \end{aligned}$$

essendo uguale a zero la variazione di  $q$  negli estremi. Di conseguenza, arriviamo all'*equazione di Eulero-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} = 0. \quad (\text{I.25})$$

Nella (I.25) il posto degli  $n$  gradi di libertà è stato preso dal termine contenente la derivata rispetto a  $x$ . Ci sono infiniti gradi di libertà.

Se invece

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_{xx}, \dot{q}, x, t),$$

il calcolo della variazione dell'integrale di azione diventa

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \frac{\partial q_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{xx}} \frac{\partial q_{xx}}{\partial \alpha} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial q}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{xx}} \right]. \end{aligned}$$

Di conseguenza, l'equazione di Eulero-Lagrange è data da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{xx}} = 0. \quad (\text{I.26})$$

Infine, se la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_{xx}, q_{x\dots x}, \dot{q}, x, t),$$

con la derivata rispetto a  $x$  fino all'ordine  $m$ , allora l'equazione di Eulero-Lagrange ha la forma

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial^j q}{\partial x^j}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (\text{I.27})$$

essendo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial^j q}{\partial x^j}}$$

la cosiddetta *derivata funzionale* di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $q$ .

Se ci sono  $n$  variabili spaziali  $x_1, \dots, x_n$  e la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_{x_1}, \dots, q_{x_n}, \dot{q}, x_1, \dots, x_n, t),$$

con le derivate parziali fino al primo ordine, l'equazione di Eulero-Lagrange è data da:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{x_i}} = 0, \quad (\text{I.28})$$

essendo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{x_i}}$$

la derivata funzionale di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $q$ . La (I.28) è facilmente generalizzabile al caso in cui la lagrangiana dipende dalle derivate parziali rispetto ad  $x_1, \dots, x_n$  fino all'ordine  $m$ , ma la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange conterrà le derivate miste.

Se la lagrangiana  $\mathcal{L}$  dipende da  $r$  coordinate generalizzate **indipendenti**  $q_1, \dots, q_r$  e le sue derivate parziali prime, risultano le  $r$  equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}_j}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [q_j]_x} = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (\text{I.29})$$

Tali equazioni sono facilmente generalizzabili al caso in cui la lagrangiana dipende da  $r$  coordinate generalizzate indipendenti e loro derivate parziali fino all'ordine  $m$ .

## 5 Hamiltoniana per i Sistemi Continui

Supponiamo di avere un sistema continuo descritto dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, [q_1]_{x_1}, \dots, [q_1]_{x_r}, \dots, [q_n]_{x_1}, \dots, [q_n]_{x_r}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, x_1, \dots, x_r, t),$$

dove ci sono  $n$  coordinate generalizzate  $q_1, \dots, q_n$  e  $r$  variabili spaziali  $x_1, \dots, x_r$ . Introduciamo le *densità di momento*  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e la *densità hamiltoniana*  $\mathcal{H}$  da:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.30a})$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (\text{I.30b})$$

Utilizzando le  $n$  equazioni (I.30a) per esprimere  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  in  $p_1, \dots, p_n$ , si ottiene la prima equazione di Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n \left( p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \right) = \dot{q}_i, \quad (\text{I.31})$$

dove  $i = 1, \dots, n$ . D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n \left( p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la (I.29) per  $r$  variabili spaziali. Utilizzando la (I.30a) e l'identità

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} = \sum_{j=1}^m \left( p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}},$$

otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i + \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}},$$

Quindi abbiamo dimostrato la seconda equazione di Hamilton

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} = -\dot{p}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.32})$$

essendo

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}}$$

la derivata funzionale di  $\mathcal{H}$  rispetto a  $q$ .

## 6 Esempi

Discutiamo alcuni esempi significativi.

**Esempio I.9 (NLS)** Consideriamo la densità Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -i[q_x r_x + (qr)^2],$$

dove  $x \in \mathbb{R}$  e  $(q, r)$  sono le coordinate Hamiltoniane. Dalla (I.32) seguono le seguenti equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_x} = -2iq^2 r + iq_{xx}, \\ -\dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -2iqr^2 + ir_{xx}. \end{aligned}$$

Le due equazioni hanno la forma

$$iq_t + q_{xx} - 2q^2 r = 0, \quad (\text{I.33a})$$

$$-ir_t + r_{xx} - 2qr^2 = 0, \quad (\text{I.33b})$$

le cosiddette *equazioni nonlineari di Schrödinger (NLS)*. Nel cosiddetto caso defocusing si ha  $r = q^*$ , quindi

$$iq_t + q_{xx} - 2|q|^2 q = 0.$$

Nel caso focusing si ha  $r = -q^*$ , quindi

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0.$$

□

**Esempio I.10 (KdV)** Consideriamo ora la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_x q_t + (q_x)^3 + \frac{1}{2}(q_{xx})^2.$$

Dalla (I.26) segue

$$\frac{1}{2}(q_x)_t + \frac{1}{2}(q_t)_x - 3(q_x^2)_x + (q_{xx})_{xx} = 0.$$

Ponendo  $u = q_x$ , si ha l'equazione di Korteweg-de Vries (KdV):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (\text{I.34})$$

□

**Esempio I.11 (mKdV)** Consideriamo ora la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_x q_t - \frac{1}{2}(q_x)^4 + \frac{1}{2}(q_{xx})^2.$$

Dalla (I.26) segue

$$\frac{1}{2}(q_x)_t + \frac{1}{2}(q_t)_x + 2(q_x^3)_x + (q_{xx})_{xx} = 0.$$

Ponendo  $u = q_x$  si ha l'equazione di Korteweg-de Vries modificata (**mKdV**):

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{I.35}$$

□



# Capitolo II

## Punti di equilibrio

In questo capitolo studieremo la tipologia dei punti di equilibrio dei sistemi dinamici autonomi  $\dot{y} = f(y)$ . In particolare, studieremo in maniera approfondita i punti di equilibrio del sistema dinamico  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , dove  $A$  è una matrice reale  $2 \times 2$  non dipendente da  $t$ . Infine, discuteremo l'oscillatore armonico in presenza di forze di attrito.

### 1 Sistema autonomo generalizzato

Consideriamo un sistema autonomo

$$\dot{y} = f(y),$$

dove  $f$  è localmente lipschitziana<sup>1</sup> in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ . È possibile analizzare le soluzioni del sistema mediante le loro immagini nello spazio dei vettori  $y$ , il cosiddetto spazio delle fasi.

**Definizione II.1** Data una curva  $t \rightarrow \varphi(t)$ , chiamiamo *orbita*, *traiettoria* o *caratteristica* l'immagine di  $\varphi$ .

Essa gode delle seguenti proprietà:

- i) un'orbita corrisponde ad una famiglia di soluzioni del tipo:

$$y(t) = \varphi(t + c),$$

con  $c \in \mathbb{R}$ , traslate nel tempo. È, dunque, fissata un'orientazione dell'orbita, comune a tutte le soluzioni corrispondenti;

---

<sup>1</sup> $f$  si dice lipschitziana se  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \text{cost.} |x_1 - x_2|$  per ogni coppia di punti  $x_1, x_2$ . Nel caso di Lipschitzianità locale (al contrario di quella globale) la costante dipende dal sottointervallo in cui si considera la  $f$ . Per esempio, le funzioni che hanno una derivata (localmente) limitata, sono lipschitziane.

- ii) due orbite non possono intersecarsi. Lo spazio delle fasi è, pertanto, unione di orbite disgiunte.<sup>2</sup>

Le traiettorie possono essere di tre tipi:

- a) **punti di equilibrio.** Se  $y_0 \in \Omega$  è tale che  $f(y_0) = 0$ , allora  $y_0$  è detto *punto di equilibrio* (o *punto critico*, *punto singolare*, *punto di equilibrio*) del sistema. Esso rappresenta l'orbita della soluzione costante

$$\varphi(t) = y_0.$$

- b) **cicli** (o curve semplici e chiuse). Si chiamano *cicli* le orbite delle soluzioni periodiche  $\varphi = \varphi(t)$ , per le quali esiste  $T > 0$  tale che

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

- c) **curve semplici non chiuse.** Si chiamano *curve semplici non chiuse* le orbite delle soluzioni  $\varphi = \varphi(t)$ , per le quali non esiste  $T > 0$  tale che

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2 Derivata di Lie e costanti del moto

È opportuno introdurre i concetti di derivata lungo una traiettoria del sistema (o derivata di Lie) e di integrale primo o costante del moto.

**Definizione II.2** Sia  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , e  $E \in C^1(\Omega)$ .

- a) La derivata di  $E$  lungo le traiettorie del sistema è data da

$$\dot{E}(y) = \langle \nabla E(y), f(y) \rangle, \quad y \in \Omega.$$

- b) Se  $\dot{E}(y) = 0$  per ogni  $y \in \Omega$ ,  $E$  si chiama *integrale primo o costante del moto* per il sistema.

---

<sup>2</sup>Senza l'ipotesi di Lipschitzianità, le orbite si possono intersecare. Per esempio, per  $c \geq t_0$  tutte le funzioni  $y(t; c) = \begin{cases} (t - c)^2, & t \geq c, \\ 0, & t \leq c, \end{cases}$  verificano il problema di Cauchy  $\dot{y} = 2y^{1/2}$ ,  $y(t_0) = 0$ .

L'integrale primo gode delle seguenti proprietà:

- i)  $E$  è un integrale primo per il sistema se e soltanto se ogni orbita è interamente contenuta in un unico insieme di livello di  $E$  o, equivalentemente, se e soltanto se  $E$  è costante su ogni soluzione del sistema.
- ii) Se la semi-orbita destra (rispettivamente, sinistra) è contenuta in un compatto, la soluzione è prolungabile a  $+\infty$  (rispettivamente,  $-\infty$ ). E, dunque, se il sistema ammette un integrale primo i cui insiemi di livello sono limitati in  $\mathbb{R}^n$ , le soluzioni esistono in tutto  $\mathbb{R}$ .

Un esempio tipico proviene dalla meccanica Newtoniana. Scrivendo l'equazione differenziale

$$\ddot{y} = f(y), \tag{II.1}$$

nella forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = f(y_1), \end{cases}$$

otteniamo, per ogni zero  $\xi$  della funzione Lipschitziana  $f$ , un punto di equilibrio  $(\xi, 0)$ . Si verifica facilmente che

$$E(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 - \int_0^{y_1} f(\tau) d\tau$$

è una costante del moto. Infatti,

$$\frac{d}{dt}E(y_1(t), y_2(t)) = y_2\dot{y}_2 - f(y_1)\dot{y}_1 = 0.$$

Le orbite si calcolano moltiplicando la (II.1) per  $2\dot{y}$  e integrando. Si ottiene

$$(\dot{y})^2 - \dot{y}(0)^2 = 2 \int_0^y f(\tau) d\tau,$$

il che si converte facilmente nell'equazione differenziale a variabili separabili

$$\dot{y} = F(y), \quad F(y) = \pm \sqrt{\dot{y}(0)^2 + 2 \int_0^y f(\tau) d\tau}.$$

### 3 Classificazione dei punti di equilibrio

Ricordando la teoria delle forme canoniche di Jordan, presentiamo una classificazione dei punti di equilibrio sul piano con l'aiuto delle forme canoniche di

Jordan. A tale scopo, consideriamo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

dove  $A$  è una matrice reale di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Seguendo l'analisi di Poincaré, presentiamo una classificazione delle radici caratteristiche di  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A,$$

dove  $\text{Tr } A = a_{11} + a_{22}$  è la traccia della matrice  $A$ . Possiamo effettuare una trasformazione lineare non singolare, ponendo

$$x = Ky, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \det(K) \neq 0,$$

e modificando il sistema di partenza nel seguente:

$$\frac{dy}{dt} = Jy,$$

dove  $J = K^{-1}AK$  è la forma canonica di Jordan.

Se le radici di  $A$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , sono distinte, allora risulta che

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Se  $\lambda_1 = \lambda_2$  è una radice doppia di  $A$  e  $A$  non è un multiplo della matrice d'identità, allora  $J$  è data da

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Se, inoltre, le radici caratteristiche,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , sono reali e distinte, allora tutte le soluzioni reali sono date da

$$y = y_1 + y_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Dunque

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1} = \lambda c e^{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad c = \frac{c_2}{c_1}.$$

Partendo da due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione  $\dot{y} = Ay$ , discutiamo ora i grafici della funzione

$$t \mapsto (y_1(t), y_2(t))$$

nei diversi casi. Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno lo stesso segno, allora ogni traiettoria è di tipo *parabolico* e l'origine è detto *nodo*. In particolare, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono entrambe negative, ogni traiettoria, per  $t \rightarrow +\infty$ , tende verso l'origine, detto *nodo stabile*. Inoltre, ogni traiettoria risulta essere tangente nell'origine all'asse  $y_2 = 0$  nel caso in cui  $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ , e all'asse  $y_1 = 0$  nel caso in cui  $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ . Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono entrambe positive, ogni traiettoria, per  $t \rightarrow -\infty$ , tende verso l'origine, detto *nodo instabile*. Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  presentano segni opposti, con  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$  e  $c_1 c_2 \neq 0$ , ogni traiettoria è di tipo *iperbolico*. Le due traiettorie sull'asse  $y_1 = 0$  tendono verso l'origine per  $t \rightarrow +\infty$ , e quelle sull'asse  $y_2 = 0$  vi tendono per  $t \rightarrow -\infty$ . Ogni altra traiettoria tende asintoticamente all'asse  $y_2 = 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Al crescere di  $t$ , ogni punto si muove inizialmente verso l'origine, poi, dopo aver raggiunto una minima distanza, esso si allontana asintoticamente verso l'asse  $y_2 = 0$ . In questo caso, l'origine è detto *punto di sella*, che è un punto di equilibrio instabile. Se le due radici,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , sono uguali, allora tutte le soluzioni reali del sistema sono date da

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t},$$

e dunque

$$y_1 = (c + t)y_2, \quad \frac{dy_1}{dy_2} = c + t,$$

dove  $c = (c_1/c_2)$ . Se  $\lambda_1 < 0$ , le traiettorie tendono verso l'origine per  $t \rightarrow +\infty$ , e nell'origine sono tangenti all'asse  $y_2 = 0$ . Se  $\lambda_1 > 0$ , si verifica il contrario. In entrambi i casi, l'origine è detto *nodo degenerato*.

Se le radici caratteristiche di  $A$  sono complesse coniugate:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta},$$

il sistema di equazioni differenziali diventa

$$\frac{dw}{dt} = R w, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

tutte le soluzioni sono date da

$$w_1 = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t), \quad w_2 = e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t).$$

Nel caso in cui  $\alpha = 0$ , le traiettorie formano una famiglia di cerchi concentrici con i centri nell'origine. L'origine è detto *centro*. Nel caso in cui  $\alpha < 0$ , ogni

traiettoria è una spirale che si avvicina all'origine per  $t \rightarrow +\infty$ , in verso orario se  $\beta > 0$ , in verso antiorario se  $\beta < 0$ . L'origine è detto *fuoco stabile*. Se  $\alpha < 0$ , ogni traiettoria si avvolge su se stessa a spirale, avvicinandosi all'origine per  $t \rightarrow -\infty$ . L'origine è detto *fuoco instabile*. Supponiamo che  $\det(A) = 0$ , ovvero che il sistema di partenza sia singolare. Se il rango della matrice  $A$  è zero, allora ogni punto è un punto di equilibrio del sistema. Se  $A$  ha rango uno, allora tutti i punti di equilibrio, ovvero tutte le soluzioni non banali di  $Ax = 0$ , giacciono su una linea retta e tutte le traiettorie non singolari appartengono ad una famiglia di rette parallele, ognuna delle quali contiene uno ed un solo punto di equilibrio.

## 4 Esempi

In questo paragrafo discutiamo tre esempi importanti.

**Esempio II.3** Analizziamo, nel piano delle fasi, l'equazione delle piccole oscillazioni del pendolo in presenza di forze dissipative:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0, \quad \omega > 0, \quad (\text{II.2})$$

in prossimità della soluzione di equilibrio  $x(t) = 0$ ,  $\dot{x}(t) = 0$ . Il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - ky. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -k \end{pmatrix},$$

dove  $\text{Tr } A = -k$ ,  $\det A = \omega^2$ ,  $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det A = k^2 - 4\omega^2$ .

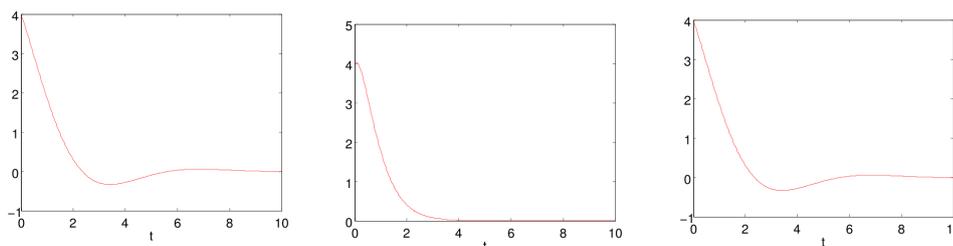


Figura II.1: Grafici delle funzioni  $x(t)$  per  $x(0) = 2$  e  $\dot{x}(0) = 1$  nei casi  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k = 3$ , scegliendo  $\omega = 1$ .

Distinguiamo i seguenti casi:

- a.  $\Delta < 0$ ,  $0 < k < 2\omega$ . L'origine è un fuoco. Il pendolo compie oscillazioni smorzate, avvicinandosi alla posizione di equilibrio, tanto più lentamente quanto più piccolo è il coefficiente d'attrito,  $k$ . Poichè  $\text{Tr } A = -k$  per  $0 < k < 2\omega$ , il fuoco è asintoticamente stabile. Infatti,

$$x(t) = x(0)e^{-kt/2} \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4\omega^2 - k^2}\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{k}{2}x(0)\right]e^{-kt/2} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4\omega^2 - k^2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - k^2}}.$$

- b.  $\Delta = 0$ ,  $k = 2\omega$ . L'origine è un nodo ad una tangente (la direzione della tangente è quella della bisettrice del secondo e del quarto quadrante). Infatti,

$$x(t) = e^{-\omega t} \{x(0) + [\dot{x}(0) + \omega x(0)]t\}.$$

- c.  $\Delta > 0$ ,  $k > 2\omega$ . L'origine è un nodo asintoticamente stabile a due tangenti. Se il coefficiente d'attrito è sufficientemente grande, il pendolo non compie oscillazioni smorzate, ma va direttamente alla posizione di equilibrio. Infatti,

$$x(t) = x(0)e^{-kt/2} \cosh\left(\frac{t}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega^2}\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{k}{2}x(0)\right]e^{-kt/2} \frac{\sinh\left(\frac{t}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega^2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega^2}}.$$

□

**Esempio II.4** Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = -x + \frac{2y}{\log(x^2 + y^2)}, \quad \dot{y} = -y - \frac{2x}{\log(x^2 + y^2)}.$$

L'origine è un nodo singolare del corrispondente sistema ottenuto trascurando i termini logaritmici:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Considerando nuovamente il sistema originale e, passando alle coordinate polari, otteniamo

$$\dot{r} = -r, \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{\log r},$$

da cui

$$r = r_0 e^{-t}, \quad \theta = \theta_0 + \log(t - \log r_0), \quad t > \log r_0.$$

Allora si ha che  $r \rightarrow 0$  e  $\theta \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$  e l'origine è un fuoco stabile del sistema. Osserviamo, dunque, che, con l'aggiunta di termini lineari infinitesimali nel sistema, possiamo variare il comportamento delle soluzioni nelle vicinanze dell'origine. □

**Esempio II.5** Consideriamo il sistema dinamico in coordinate polari

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta).$$

Quindi lungo le orbite è crescente l'angolo polare  $\theta$  e, per  $0 < r < 1$ , la distanza dall'origine  $r$ , mentre la distanza dall'origine  $r$  è decrescente per  $r > 1$ . I punti di equilibrio (in coordinate cartesiane) sono  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , ambedue instabili. Il punto  $(1, 0)$  è un attrattore con bacino di attrazione  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . L'instabilità del punto di equilibrio  $(1, 0)$  risulta dal fatto che ogni suo intorno contiene delle orbite che si allontanano da  $(1, 0)$ . Si noti che il tempo di viaggio lungo un'orbita

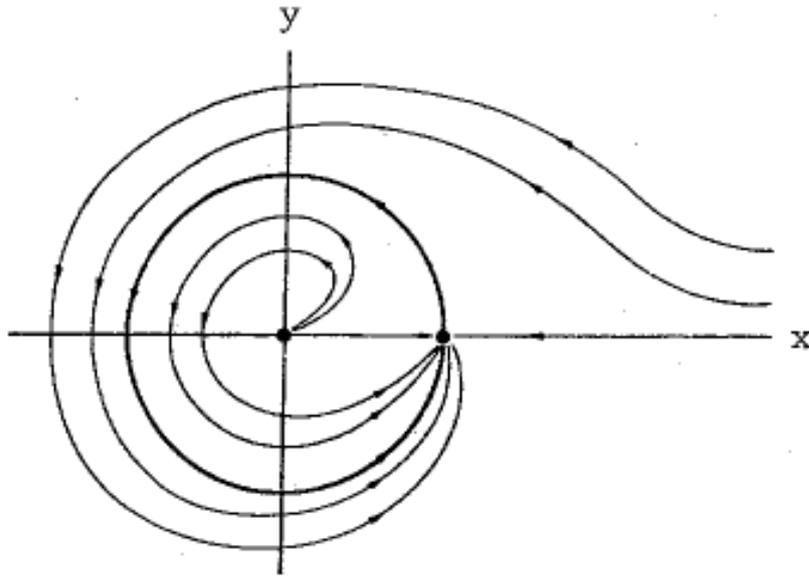


Figura II.2: Orbite per un sistema dinamico con due punti di equilibrio instabili (vedi [27]).

chiusa che parte da  $(1, 0)$  e ci ritorna, è dato da

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2(\frac{1}{2}\theta)} = [-2\cotg(\frac{1}{2}\theta)]_0^{2\pi} = +\infty.$$

□

# Capitolo III

## Stabilità secondo Liapunov

In questo capitolo verrà discussa in modo approfondito la nozione di stabilità secondo Liapunov.<sup>1</sup> Dopo aver introdotto il concetto di stabilità, verranno catalogati i diversi casi rilevanti al sistema dinamico lineare  $\dot{x} = Ax$ , dove  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ . Verrà quindi dimostrato che, sotto opportune condizioni, un sistema dinamico nonlineare è stabile se e solo se lo è la sua linearizzazione. Infine discuteremo tre applicazioni: il pendolo semplice, le oscillazioni smorzate ed il modello preda-predatore di Lotka-Volterra.

### 1 Stabilità secondo Liapunov

Nello studio di sistemi dinamici, il concetto di stabilità risulta essere tra i più importanti sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista applicativo. Sappiamo che un processo di evoluzione temporale di uno stato di un sistema fisico può essere descritto matematicamente da un campo vettoriale nello spazio delle fasi. Un punto dello spazio delle fasi definisce un determinato stato del sistema, e in questo punto il vettore indica la velocità con cui varia lo stato del sistema. Abbiamo visto che i punti in cui il vettore risulta essere nullo sono detti *punti di equilibrio* e lo stato non varia nel tempo. Sappiamo anche che i sistemi che descrivono processi di evoluzione di un fenomeno dipendono da alcuni parametri (o dati iniziali). Se applichiamo una piccola variazione nei dati, essa produce una variazione nella soluzione, trasformando un particolare sistema in un altro.

Ecco la nozione intuitiva di stabilità: una sorta di “continuità” per cui un piccolo cambiamento sui dati produce un piccolo e controllabile cambiamento della soluzione. Diamo, ora, la definizione di *stabilità secondo Liapunov*.

---

<sup>1</sup>Il cognome Liapunov del matematico russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), viene scritto in molti modi. È molto diffusa, in particolare nel mondo anglosassone, la scrittura Lyapunov.

Consideriamo il sistema

$$\dot{y} = f(y),$$

e sia  $\varphi = \varphi(t; 0, \xi)$  una soluzione del sistema definita nell'intervallo  $[0, +\infty)$ .

**Definizione III.1** La soluzione  $\varphi(t; 0, \xi)$  si dice *stabile secondo Liapunov* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tale che se  $\|\eta - \xi\| < \delta$ , allora la soluzione  $\psi(t) = \psi(t; 0, \eta)$  è definita in  $[0, +\infty)$  e  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ , per ogni  $t$  appartenente all'intervallo  $[0, +\infty)$ . Se inoltre  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi$  si dice *asintoticamente stabile*. Ovvero: si ha una soluzione stabile se, sotto una piccola variazione di  $\xi$ , per tutto il tempo si rimane vicino alla soluzione  $\varphi(t; 0, \xi)$ ; si ha una soluzione asintoticamente stabile se, sotto una piccola variazione di  $\xi$ , la distanza della soluzione  $\varphi$  tende a zero all'infinito. Ora, se un punto di equilibrio  $\varphi(t) = y_0$  [dove  $f(y_0) = 0$ ] è asintoticamente stabile, l'insieme dei punti  $\xi \in \Omega$  tale che  $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow y_0$  per  $t \rightarrow +\infty$  è detto *bacino di attrazione* di  $y_0$ .

Se il bacino di attrazione è tutto  $\Omega$ ,  $y_0$  è detto *globalmente asintoticamente stabile* in  $\Omega$  (spazio delle fasi).

## 2 Stabilità di sistemi autonomi sulla retta

Sia data un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$\dot{x} = f(x), \tag{III.1}$$

dove la  $f$  è di classe  $C^1(\mathbb{R})$ . Ricordando che, da un punto di vista applicativo, si può pensare ad un'equazione differenziale come un modello per la descrizione di un determinato fenomeno in evoluzione, ad essa si possono affiancare delle condizioni iniziali, che definiscono un problema di Cauchy, di cui il teorema di esistenza delle soluzioni assicura l'attendibilità del modello, mentre l'unicità fornisce l'unica possibilità di evoluzione del fenomeno. Supponiamo, allora, che siano note alcune condizioni iniziali. Siano

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, \quad f(x) \neq 0 \text{ per } x \neq x_1, x_2, \quad f'(x_1) < 0 \text{ e } f'(x_2) > 0.$$

Sull'asse orizzontale o *asse delle fasi*, si può visualizzare l'andamento di  $x = x(t)$ . Tra le ordinate vengono collocati i valori di  $f(x)$ : se risulta che la  $f$  è positiva, allora  $x$  sta crescendo, e, dunque, il suo movimento, sull'asse orizzontale, procede verso destra. Se la  $f$  risulta negativa, si verifica il contrario. Considerando i dati iniziali e quanto è stato detto sopra, si trova che  $x_2$  è instabile: partendo da un punto ad esso vicino, da esso ci si allontana.

Consideriamo  $x_1$ . Dimostriamo che una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con  $x_1 < x_0 < x_2$ , o,  $x_0 < x_1 < x_2$ , esiste per qualunque  $t \geq t_0$  e che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1.$$

Supponiamo che  $x_1 < x_0 < x_2$ . Osserviamo che, essendo la  $f$  negativa tra  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x(t)$  risulta decrescente per  $t \geq t_0$ . Consideriamo, ora, l'intervallo massimale di definizione di  $x(t)$ ,  $[t_0, \tau)$ . Poichè  $x(t) > x_1$ , allora esiste finito  $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t)$ . Se fosse  $\tau < +\infty$ , allora la soluzione si potrebbe prolungare oltre  $\tau$  e l'intervallo  $[t_0, \tau)$  non sarebbe più massimale. Quindi,  $\tau = +\infty$ . Sia, ora,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$ . Poichè  $\dot{x} = f(x)$  e la  $f$  è continua, allora risulta che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = f(\bar{x}).$$

D'altra parte, l'esistenza di due limiti finiti implica che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0,$$

da cui si deduce che  $f(\bar{x}) = 0$  e, quindi, che  $\bar{x} = x_1$ . In altre parole,  $x_1$  è asintoticamente stabile.

### 3 Stabilità di sistemi lineari a coefficienti costanti

Sia dato il sistema a coefficienti costanti

$$\dot{y} = Ay,$$

dove  $A$  è una matrice reale di ordine  $n$ . Indichiamo con  $\lambda_i$  gli autovalori di  $A$ , dove  $i = 1, \dots, n$ . Vale il seguente teorema:

**Teorema III.2** *Abbiamo i seguenti tre casi:*

- i) L'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile se e soltanto se  $Re(\lambda_i) < 0$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$ . La stabilità è globale in  $\mathbb{R}^n$ .*
- ii) L'origine è stabile, ma non asintoticamente se e soltanto se  $Re(\lambda_i) \leq 0$  e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari (cioè, la dimensione dell'autospazio è pari alla molteplicità **algebraica** dell'autovalore).*
- iii) L'origine è instabile negli altri casi.*

**Dimostrazione.** i) Ci ricordiamo che, dato il sistema  $\dot{z} = Az$ , se l'equazione caratteristica  $\det(A - \lambda I_N) = 0$  possiede le radici  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  di molteplicità rispettivamente  $m_1, \dots, m_n$  [dove  $m_1 + \dots + m_n = N$ ], la soluzione generale del sistema ha forma

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m_j} t^{i-1} e^{\lambda_j t} \mathbf{c}^{ij}, \quad (\text{III.2})$$

dove  $\mathbf{c}^{ij}$  sono opportuni vettori. Da questa formula segue che ogni soluzione  $\varphi$  è somma di termini del tipo  $t^h e^{\lambda_j t} \mathbf{c}$ , dove  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ . Se  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  per ogni  $\lambda_j$ ,  $\varphi(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  e, per questo motivo, 0 è asintoticamente stabile, con bacino d'attrazione coincidente con  $\mathbb{R}^N$ . Viceversa, se 0 è asintoticamente stabile, allora non possono esistere autovalori con parte reale non negativa. In tal caso esisterebbero, infatti, soluzioni che non tendono a 0 per  $t \rightarrow +\infty$ .

ii) Se vale la condizione sugli autovalori, i termini dell'espressione della soluzione (III.2) hanno la forma

$$t^h e^{\lambda_j t} \mathbf{c}, \quad (h \geq 0), \quad \text{se } \text{Re}(\lambda_j) < 0,$$

oppure

$$e^{i \text{Im}(\lambda_j) t} \mathbf{c}, \quad \text{se } \text{Re}(\lambda_j) = 0.$$

I primi tendono a 0 per  $t \rightarrow +\infty$ , i secondi sono neutralmente stabili. Viceversa, se 0 è stabile, i termini dell'espressione (III.2) possono essere soltanto del tipo sopra indicato e, per questo motivo, vale la condizione indicata sugli autovalori.

iii) Se esistono autovalori con parte reale positiva oppure immaginari puri con forma di Jordan non banale, allora esistono soluzioni del tipo

$$\varphi(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{c} \quad \text{o} \quad \varphi(t) = (\mathbf{c} + t\mathbf{c}_1 + \dots + t^{k_j-1} \mathbf{c}_{k_j-1}) e^{i \text{Im}(\lambda_j) t},$$

la cui norma tende all'infinito, per  $t \rightarrow +\infty$ . ■

Discutiamo ora, come esempio, il caso bidimensionale. Sia dato un sistema omogeneo bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

dove  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ , in modo tale che l'origine sia l'unico punto di equilibrio del sistema. Indichiamo con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  gli autovalori di  $A$ , soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A = 0,$$

dove  $\text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$  e  $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ .

Distinguiamo i seguenti casi a seconda che la matrice  $A$  possieda:

- i) due autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  reali e distinti;
- ii) due autovalori reali e coincidenti;
- iii) due autovalori complessi coniugati.

Inoltre, a seconda dei relativi segni degli autovalori, avremo ulteriori sottocasi.

- i) **Autovalori reali e distinti.** Il sistema presenta le due soluzioni linearmente indipendenti

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}^1, \quad e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}^2,$$

dove  $\mathbf{h}^1$  e  $\mathbf{h}^2$  sono autovettori reali corrispondenti rispettivamente agli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Ogni soluzione sarà del tipo

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}^2,$$

dove  $c_1, c_2$  sono costanti reali. Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria, partendo da un qualunque punto dello spazio delle fasi, si avvicina indefinitamente all'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo stabile**.
- 2)  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ . L'origine è instabile. La soluzione, partendo da un qualunque punto dello spazio delle fasi [tranne l'origine], si allontana indefinitamente dall'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo instabile**.
- 3)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . L'origine è instabile. Osservando il grafico, per  $c_2 = 0$ , le traiettorie rettilinee  $\gamma_1^\pm$  guidano il punto mobile, rappresentante la soluzione, ad avvicinarsi indefinitamente all'origine. Per  $c_1 = 0$ , le traiettorie  $\gamma_2^\pm$  lo inducono ad allontanarsi indefinitamente. Il punto di equilibrio è detto **colle** o **sella**.

ii) **Autovalori reali uguali.** Indichiamo con  $\lambda$  l'autovalore doppio della matrice  $A$ , supponendo che  $A$  non coincida con  $\lambda I_2$  e quindi non sia diagonalizzabile. La soluzione sarà del tipo

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{c}_1 + t e^{\lambda t} \mathbf{c}_2,$$

dove  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$  sono due vettori costanti tali che  $A\mathbf{c}_1 = \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ . Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1)  $\lambda < 0$ . L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria si avvicina indefinitamente all'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo stabile**.
- 2)  $\lambda > 0$ . L'origine è instabile: tutte le traiettorie si allontanano indefinitamente dall'origine. Il punto 0 è detto **nodo instabile**.

iii) **Autovalori complessi coniugati.** Indichiamo con

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

gli autovalori complessi coniugati della matrice  $A$ . La coppia di soluzioni linearmente indipendenti è data da

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \mathbf{h}, \quad e^{(\alpha-i\beta)t} \bar{\mathbf{h}}.$$

A questa coppia di soluzioni sostituiamo la seguente coppia di soluzioni reali:

$$\varphi^1(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{h}^1 - \sin(\beta t) \mathbf{h}^2), \quad \varphi^2(t) = e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \mathbf{h}^1 + \cos(\beta t) \mathbf{h}^2),$$

dove abbiamo posto  $\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2)$ , con  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^2$ . La soluzione generale in forma reale è data da

$$\varphi(t) = c_1 \varphi^1(t) + c_2 \varphi^2(t) = e^{\alpha t} [\cos(\beta t)(c_1 \mathbf{h}_1 + c_2 \mathbf{h}_2) + \sin(\beta t)(c_2 \mathbf{h}_1 - c_1 \mathbf{h}_2)],$$

dove  $c_1, c_2$  sono costanti arbitrarie. Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1)  $\alpha = 0$ . L'origine è stabile. Le traiettorie sono delle ellissi. Il punto 0 è detto **centro**.
- 2)  $\alpha < 0$ . L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine con un andamento a spirale. Il punto 0 è detto **fuoco stabile**.
- 3)  $\alpha > 0$ . L'origine è instabile. Le traiettorie si allontanano indefinitamente dall'origine. Il punto 0 è detto **fuoco instabile**.

Riassumiamo, ponendo  $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det(A)$ , quanto descritto sopra con il seguente schema:

i)

$$\Delta > 0 : \begin{cases} \det(A) > 0, \text{Tr } A < 0 : & \text{asintoticamente stabile,} \\ \det(A) > 0, \text{Tr } A > 0 : & \text{instabile,} \\ \det(A) > 0 : & \text{colle o sella, instabile.} \end{cases}$$

ii)

$$\Delta = 0 : \begin{cases} b^2 + c^2 > 0 : & \text{nodo,} \\ b = c = 0, \text{Tr } A < 0 : & \text{nodo a stella, asintoticamente stabile,} \\ b = c = 0, \text{Tr } A > 0 : & \text{instabile.} \end{cases}$$

iii)

$$\Delta < 0 : \begin{cases} \text{Tr } A = 0 : & \text{centro, neutralmente stabile,} \\ \text{Tr } A < 0 : & \text{fuoco asintoticamente stabile,} \\ \text{Tr } A > 0 : & \text{fuoco instabile.} \end{cases}$$

Giù presenteremo in modo grafico alcuni esempi di punti di equilibrio: centro, fuoco stabile, nodo stabile, nodo a stella e colle.

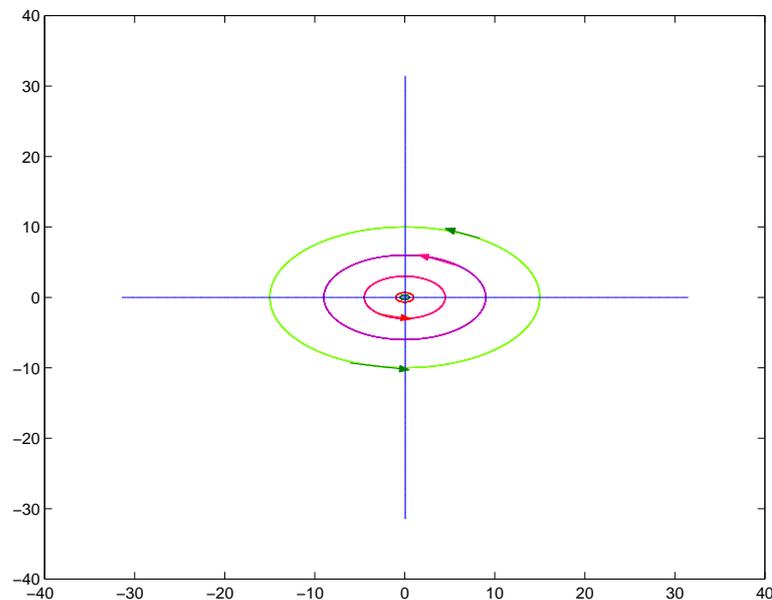


Figura III.1: Centro con orientazione positiva.

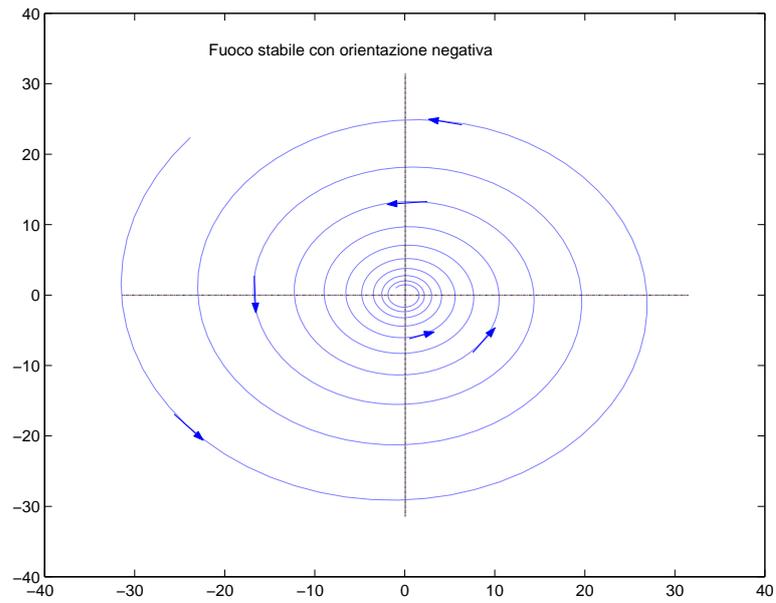


Figura III.2: Fuoco stabile con orientazione positiva.

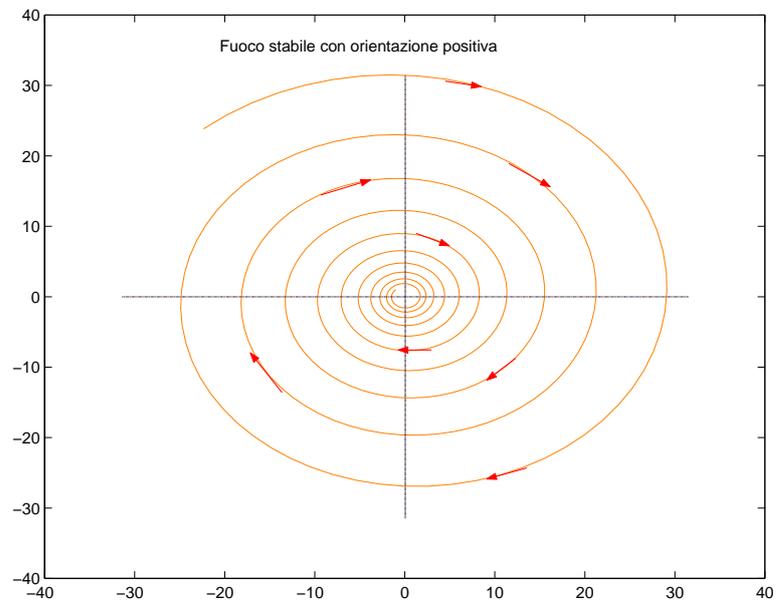


Figura III.3: Fuoco stabile con orientazione negativa.

## 4 Funzione di Liapunov e linearizzazione

Tra i metodi utilizzati nell'analisi della stabilità dell'origine, vi è quello di Liapunov che deve la sua formulazione al classico teorema di Lagrange (1788):

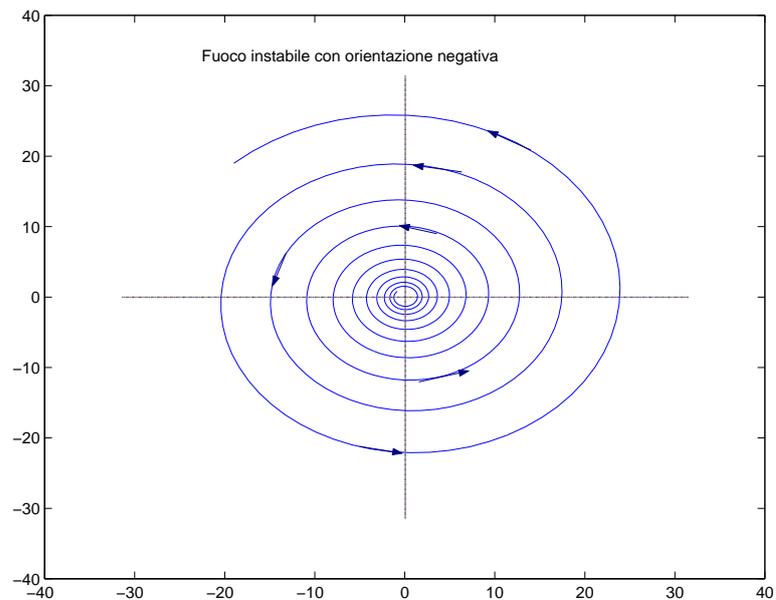


Figura III.4: Fuoco instabile con orientazione negativa.

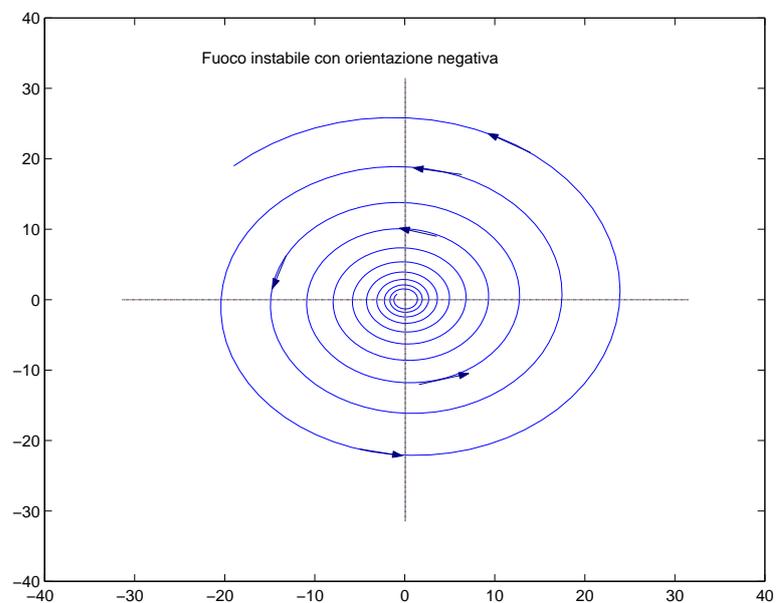


Figura III.5: Fuoco instabile con orientazione positiva.

*Se in un sistema meccanico conservativo l'energia potenziale ha un minimo focale forte, allora in quel punto l'equilibrio è stabile.*

Dunque, nell'ambito dei sistemi meccanici conservativi si può arrivare alla ricerca della stabilità, studiando le proprietà dell'energia potenziale. Analogamente, nel

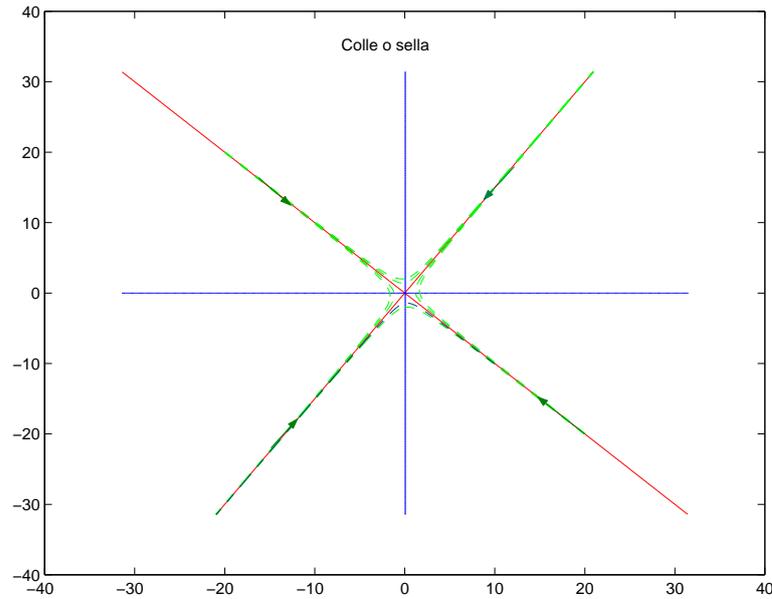


Figura III.6: Colle o sella.

**metodo di Liapunov** risulta rilevante lo studio di una funzione scalare (detta **funzione di Liapunov**), che generalizza l'energia totale.

Per questa funzione vale il seguente teorema:

**Teorema III.3 (Liapunov)** *Sia  $0$  un punto di equilibrio del sistema dinamico*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)),$$

dove, per un aperto  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$  contenente  $0$ ,  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è localmente lipschitziana e  $\mathbf{F}(0) = 0$ . Supponiamo che, per un aperto  $A$  con  $0 \in A \subset \Omega$ , esista una cosiddetta funzione di Liapunov  $H : A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- i)  $H$  è di classe  $C^1$  in  $A$ ;
- ii)  $H(y) > 0$  per ogni  $y \in A \setminus \{0\}$ ;
- iii) vale una delle seguenti condizioni:
  - a)  $\mathbf{F} \cdot \nabla H \leq 0$  in  $A$ ;
  - b)  $\mathbf{F} \cdot \nabla H < 0$  in  $A \setminus \{0\}$ ;
  - c)  $\mathbf{F} \cdot \nabla H > 0$  in  $A \setminus \{0\}$ .

Allora il punto di equilibrio  $0$  è stabile se vale la (a), asintoticamente stabile se vale la (b), o non stabile se vale la (c).

Prima di dimostrare il teorema di Liapunov, discutiamo un esempio significativo. Siano  $a, b, c, d$  quattro costanti reali con  $a < 0$  e consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - cy, \\ \dot{y}(t) = cx + ay. \end{cases}$$

Ponendo  $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  risulta

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x(ax - cy) + y(cx + ay) \\ &= a(x^2 + y^2) = 2aH \leq 0, \end{aligned}$$

dove vale il segno uguale se e solo se  $x = y = 0$ . Quindi

$$H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0))e^{2at} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

per ogni  $(x(0), y(0))$ . Quindi  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  se  $t \rightarrow +\infty$ , che mostra la **stabilità asintotica** del punto di equilibrio 0. Si osservi che

$$\mathbf{F} \cdot \nabla H = x(ax - cy) + y(cx + ay) = \dot{H}(t) < 0$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x - 2y^2, \\ \dot{y}(t) = xy - y^3, \end{cases}$$

per cui 0 è un punto di equilibrio. Ponendo  $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ , risulta

$$\dot{H}(t) = x\dot{x} + 2y\dot{y} = -x(x + 2y^2) + 2y(xy - y^3) = -(x^2 + 2y^4) \leq 0,$$

dove vale il segno uguale se e solo se  $x = y = 0$ . Quindi 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Si osservi che

$$\mathbf{F} \cdot \nabla H = -x(x + 2y^2) + 2y(xy - y^3) = \dot{H}(t) < 0$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Infine, consideriamo il sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H,$$

dove  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  e la funzione hamiltoniana ha la forma

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}),$$

$T$  è una forma quadratica definita positiva e  $\mathbf{q} = 0$  è un minimo stretto dalla funzione  $V$ . In tal caso  $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$  è un punto di equilibrio,  $H$  è definita positiva in un intorno di  $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $\dot{H}(t) = 0$ . Quindi la  $H$  è una funzione di Liapunov e l'origine è un punto di equilibrio **stabile**.

Ora, enunceremo i lemmi, di particolare rilievo nello studio della funzione di Liapunov, attraverso i quali si arriva alla dimostrazione del teorema sopra citato.

**Lemma III.4 (di intrappolamento delle orbite)** *Sia  $H$  una funzione di Liapunov con  $\dot{H} < 0$  in  $A \setminus \{0\}$ . Sia  $\Gamma$  un aperto limitato tale che la sua chiusura sia contenuta in  $A$ , cioè  $\bar{\Gamma} \subset A$  e  $\xi \in \Gamma$ . Supponiamo che  $H(\xi) < a$  e  $H(y) \geq a$  per ogni  $y \in \partial\Gamma$  (frontiera dell'insieme  $\Gamma$ ), dove  $a$  è una costante positiva. Allora esiste la soluzione  $\varphi(t; 0, \xi)$  per  $t \geq 0$  e  $\varphi(t; 0, \xi) \in \Gamma$  per ogni  $t \geq 0$  (ossia, la soluzione  $\varphi$  non può uscire da  $\Gamma$ ).*

**Dimostrazione.** Osserviamo che stiamo discutendo il caso b) del teorema di Liapunov. Supponiamo, per assurdo, che  $\varphi(t; 0, \xi)$  esca da  $\Gamma$ . Poniamo  $t^* = \inf\{t \geq 0 : \varphi(t) \notin \Gamma\}$  = “primo tempo di uscita” da  $\Gamma$ . Per la continuità di  $\varphi$ , si ha  $\varphi(t^*) \in \partial\Gamma$ ; inoltre, per la definizione di  $t^*$ ,  $\varphi(t) \in \Gamma$  per  $0 \leq t < t^*$ . Allora, ponendo  $\phi(t) = H(\varphi(t))$ , avremo

$$\phi(0) = H(\varphi(0)) = H(\xi) < a, \quad \dot{\phi}(t) = (H \circ \varphi)'(t) \leq 0$$

e

$$\phi(t^*) = H(\varphi(t^*)) \geq a.$$

Contraddizione. Dunque,  $\varphi$  non può uscire da  $\Gamma$ . In base alle proprietà delle orbite viste nel capitolo precedente,  $\varphi$  esiste per ogni  $t \geq 0$ . ■

**Lemma III.5 (di escursione delle orbite)** *Sia  $\Gamma$  un aperto limitato tale che  $\bar{\Gamma} \subset A$ . Supponiamo che  $H(y) \geq a$  e  $\dot{H}(y) \leq -b < 0$ , per ogni  $y \in \Gamma$ , dove  $a$  e  $b$  sono delle costanti positive. Se  $\xi \in \Gamma$  e  $\varphi(t; 0, \xi)$  è definita per  $t \geq 0$ , allora  $\varphi(t; 0, \xi)$  esce da  $\Gamma$ .*

**Dimostrazione.** Supponendo, per assurdo, che  $\varphi(t; 0, \xi) \in \Gamma$  per ogni istante  $t \geq 0$ , si ha

$$a \leq H(\varphi(t)) = \int_0^t \dot{H}(\varphi(s)) ds + H(\xi) \leq -bt + H(\xi).$$

Per  $t \rightarrow +\infty$ ,  $-bt + H(\xi) \rightarrow -\infty$ . Contraddizione. ■

**Lemma III.6 (di attrattività dell'origine)** *Sia  $\Gamma_0$  un aperto limitato,  $\bar{\Gamma}_0 \subset A$ ,  $0 \in \Gamma_0$ . Sia  $H$  una funzione di Liapunov con  $\dot{H} < 0$  in  $A \setminus \{0\}$ . Se  $\xi \in \Gamma_0$  e  $\varphi(t; 0, \xi) \in \Gamma_0$  per  $t \geq 0$ , allora  $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Dimostrazione.** Osserviamo che stiamo discutendo il caso b) del teorema di Liapunov. Essendo  $\dot{H} < 0$  in  $A \setminus \{0\}$ ,  $\phi(t) = H(\varphi(t))$  è strettamente decrescente. Mostriamo che  $H(\varphi(t)) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Se così non fosse, ponendo  $0 < \mu = \limsup_{t \rightarrow +\infty} H(\varphi(t))$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \mu > 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  e  $\phi(t) \geq \mu$  per  $t \geq 0$ . Essendo  $H(0) = 0$ , esiste un intorno  $B_\delta(0)$  tale che, se  $y \in \overline{B_\delta(0)}$ ,  $H(y) \leq \frac{\mu}{2}$ . Si noti che allora  $\xi \in \Gamma_0 \setminus \overline{B_\delta(0)}$ . Siano  $a > 0$  il minimo di  $H$  e  $-b < 0$  il massimo di  $\dot{H}$  su  $\overline{\Gamma_0} \setminus B_\delta(0)$ . In base al lemma precedente,  $\varphi(t; 0, \xi)$  deve uscire da  $\Gamma = \Gamma_0 \setminus \overline{B_\delta(0)}$ . Non può, tuttavia, uscire attraverso  $\partial\Gamma_0$  per ipotesi e neppure attraverso  $\partial B_\delta(0)$  poichè se  $\varphi \in \overline{B_\delta(0)}$ ,  $H(\varphi(t)) \leq \frac{\mu}{2}$ . Contraddizione.

Dunque,  $H(\varphi(t)) \rightarrow 0$ , il che implica  $\varphi(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . ■

**Osservazioni III.7** *Quindi, se si riesce a trovare un aperto  $\Gamma_0 \subset \Omega$ , limitato e contenente l'unico punto di equilibrio 0, in cui sono intrappolate le orbite e  $\dot{H}$  è definita negativa, allora  $\Gamma_0$  è contenuto nel bacino di attrazione di 0.*

**Dimostrazione** del Teorema III.3. Sia  $\epsilon > 0$  tale che  $B_\epsilon(0) \subset A$ . Poniamo  $\Gamma = B_\epsilon(0)$  e  $a = \min_{\partial\Gamma} H$ . Essendo  $\partial\Gamma$  un compatto e  $H$  continua e definita positiva,  $a$  è ben definito e positivo. Poichè  $H(0) = 0$ , esiste  $B_\delta(0)$  tale che  $H(y) \leq \frac{a}{2}$ , ogni  $y \in B_\delta(0)$ . In base al lemma sull'intrappolamento delle orbite, per ogni  $\xi \in B_\delta(0)$ ,  $\varphi(t; 0, \xi)$  esiste e non esce da  $B_\delta(0)$ . Per questo motivo, 0 è stabile. Se  $\dot{H} < 0$ , l'asintotica stabilità segue dal lemma sull'attrattività dell'origine con  $\Gamma_0 = B_\epsilon(0)$ . ■

Valgono, dunque, le seguenti proposizioni:

**Proposizione III.8** *Sia  $\Omega = \mathbb{R}^n$  e 0 l'unico punto di equilibrio per il sistema*

$$\dot{y} = f(y).$$

*Se  $\frac{d}{dt}H(y(t)) < 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $H(y) \rightarrow +\infty$  per  $\|y\| \rightarrow +\infty$ , allora l'origine è globalmente asintoticamente stabile.*

**Dimostrazione.** Sia  $\xi$  qualunque punto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\xi \neq 0$ , e  $H(\xi) = a > 0$ . Poichè  $H(y) \rightarrow +\infty$  per  $\|y\| \rightarrow +\infty$ , esiste una sfera  $B_r(0)$  di raggio  $r$  abbastanza grande, tale che  $H(y) \geq 2a$  per  $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$ . In particolare,  $H(y) \geq 2a$  su  $\partial B_r(0)$ . Ma allora, in base al lemma di intrappolamento delle orbite,  $\varphi(t; 0, \xi)$  esiste per  $t \geq 0$  e non esce da  $B_r(0)$ . Essendo  $\dot{H} < 0$  in tutto  $\mathbb{R}^n$ , segue dal lemma di attrattività dell'origine che  $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Essendo  $\xi$  arbitrario, il bacino di attrazione di 0 è  $\mathbb{R}^n$ . ■

Si è già detto, in precedenza, che la ricerca della funzione di Liapunov potrebbe presentare delle difficoltà. Esiste, però, un altro metodo di procedere

nella ricerca della stabilità. Tale metodo consiste nella sostituzione del sistema di partenza non lineare con un sistema lineare approssimante in modo tale da utilizzare la teoria lineare e trasferire le nuove informazioni ottenute sul sistema linearizzato. L'approssimazione è, però, valida solo localmente, ovvero nell'intorno del punto di equilibrio considerato.

Sia, ora, dato un sistema autonomo

$$\dot{y} = f(y), \quad (\text{III.3})$$

dove  $f \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e tale che  $f(0) = 0$ . Si suppone che la matrice jacobiana di  $f$  in 0,  $Df(0)$ , sia non singolare. Allora, si può scrivere

$$f(y) = Df(0)y + g(y), \quad (\text{III.4})$$

dove  $g(y) = o(\|y\|)$  per  $y \rightarrow 0$ . Ponendo  $A = Df(0)$ , si consideri il sistema

$$\dot{z} = Az \quad (\text{III.5})$$

che prende il nome di *sistema linearizzato*.

Ne segue

**Teorema III.9 (Oskar Perron (1880-1975))** *Sia la (III.5) la linearizzazione del sistema dinamico (III.3). Allora*

1. *Se 0 è asintoticamente stabile per il sistema (III.5), allora lo è anche per il sistema (III.3).*
2. *Se esiste un autovalore della matrice A nella (III.5) con parte reale positiva, allora 0 è instabile per il sistema (III.3).*

La dimostrazione di questo teorema fa ricorso al seguente lemma:

**Lemma III.10** *Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora esiste una matrice Q simmetrica e definita positiva tale che  $QA + A^TQ$  è definita negativa. In altre parole, esiste un prodotto scalare  $[x, y] = \langle Qx, y \rangle$  rispetto a cui è definita negativa la matrice A.*

**Dimostrazione** del Teorema III.9. Poichè 0 è asintoticamente stabile per il sistema (III.5), tutti gli autovalori di A presentano parte reale negativa. Consideriamo la matrice Q del lemma sopra enunciato e la forma quadratica definita positiva

$$H(y) = \langle Qy, y \rangle.$$

Calcoliamo la derivata di  $H$  lungo le traiettorie del sistema non lineare (III.3):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(y(t)) &= \langle Qy, \dot{y} \rangle + \langle Q\dot{y}, y \rangle \\ &= \langle Qy, Ay + g(y) \rangle + \langle Q[Ay + g(y)], y \rangle \\ &= \langle [QA + A^T Q]y, y \rangle + 2\langle Qy, g(y) \rangle,\end{aligned}\tag{III.6}$$

dove abbiamo utilizzato la simmetria di  $Q$ . Usando  $g(y) = c(y)y$  per  $c(y) \rightarrow 0$ , si ottiene:

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) \leq [-\delta + c(y)]\|y\|^2$$

per un'opportuna costante  $\delta > 0$ . Di conseguenza, esiste un intorno di 0 su cui

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) \leq -\frac{1}{2}\delta\|y\|^2.$$

Per il teorema di Liapunov, 0 è asintoticamente stabile. ■

Si è così dimostrata anche la seconda parte del Teorema di Perron.

**Proposizione III.11** *Se esiste un autovalore di  $A$  con parte reale positiva, allora 0 è instabile per il sistema (III.3).*

## 5 Stabilità e loro applicazioni

**1. Pendolo semplice.** Consideriamo ora l'equazione del moto del pendolo semplice di lunghezza

$$\ell\ddot{\theta} = -g\sin(\theta),\tag{III.7}$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il pendolo e la verticale,  $g$  l'accelerazione gravitazionale sulla superficie della Terra e  $\ell$  la lunghezza del pendolo. Moltiplicando la (III.7) per  $d\theta/dt$  e integrando rispetto a  $\theta$  arriviamo all'equazione

$$\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2 = \frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos a),$$

dove  $a$  è l'angolo positivo per cui  $(d\theta/dt) = 0$ . Nella Figura 5 abbiamo tracciato le orbite chiuse, le orbite eterocliniche (collegando i punti di sella) e le orbite

aperte. Il periodo  $T$  delle orbite chiuse ha la forma

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \int_{-a}^a \frac{d\theta}{\sqrt{2g(\cos \theta - \cos a)/\ell}} \\
 &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^a \frac{d\theta}{\sqrt{4(\sin^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)}} \\
 &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \phi d\phi}{\cos \frac{1}{2}\theta \sqrt{4(\sin^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a \sin^2 \phi)}} \\
 &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K(\sin^2 \frac{1}{2}a) \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16}a^2 + O(a^4) \right),
 \end{aligned}$$

dove

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi}}, \quad 0 \leq m < 1,$$

si chiama integrale ellittico completo di prima specie [1, 17.3.1]. Si osservi che abbiamo applicato la sostituzione  $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}a \sin \phi$ .

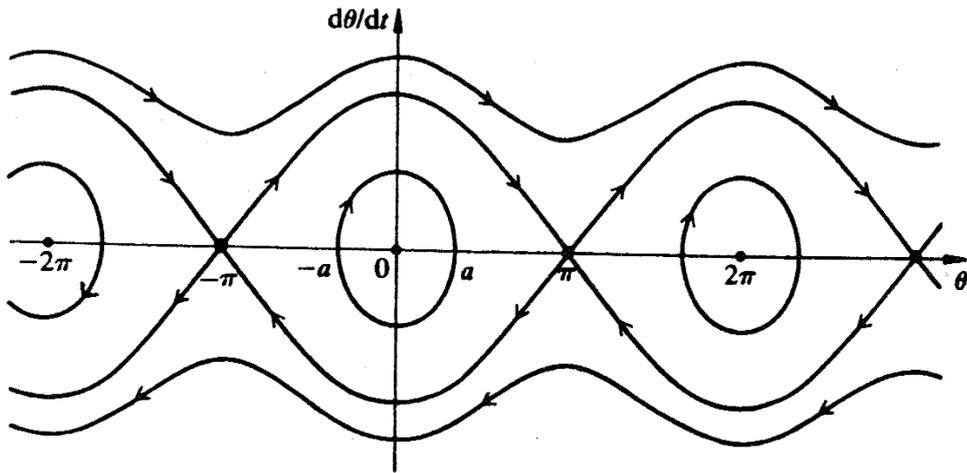


Figura III.7: Diagramma delle fasi del pendolo nel piano  $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ .

Applichiamo ora il teorema di Liapunov. Riscrivendo l'equazione del moto del pendolo, (III.7), si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -(g/\ell) \sin \theta_1, \end{cases}$$

e ponendo

$$H(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1],$$

otteniamo  $H(\theta_1, \theta_2) > 0$  per  $(0, 0) \neq (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $H'(t) = 0$ . Quindi  $(0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.

Spesso il sistema (III.7) viene linearizzato nel seguente modo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta. \quad (\text{III.8})$$

In tal caso la (III.8) si trasforma nel sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -(g/\ell)\theta_1, \end{cases}$$

con funzione di Liapunov

$$H(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/2\ell)\theta_1^2.$$

Siccome  $H(\theta_1, \theta_2) > 0$  per  $(0, 0) \neq (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $H'(t) = 0$ , l'origine  $(0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile, che non è asintoticamente stabile.

**2. Pendolo semplice vincolato ad un piano che subisce una rotazione costante.** In tal caso

$$\ell\ddot{\theta} = -g \sin(\theta) + \frac{1}{2}\ell\omega^2 \sin(2\theta),$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il pendolo e la verticale,  $g$  è l'accelerazione gravitazionale,  $\ell$  la lunghezza del pendolo e  $\omega$  la velocità angolare. Scriviamo l'equazione del moto nella forma

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -(g/\ell) \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1). \end{cases}$$

Nei punti di equilibrio  $(\theta_1, \theta_2)$  abbiamo  $\theta_2 = 0$  e

$$\sin(\theta_1) \left\{ -\frac{g}{\ell} + \omega^2 \cos(\theta_1) \right\} = 0.$$

Quindi i punti di equilibrio sono  $(\theta_0, 0)$  per  $\sin \theta_0 = 0$  o per  $\cos \theta_0 = (g/\ell\omega^2)$ .

Per studiare l'andamento delle orbite intorno all'origine introduciamo la funzione di Liapunov

$$\begin{aligned} H(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1] + \frac{1}{2}\omega^2 \cos^2(\theta_1) \\ &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)[1 - \cos \theta_1] + \frac{1}{2}\omega^2 \{1 + [1 - \cos(\theta_1)]^2\} \geq 0, \end{aligned}$$

dove  $(g/\ell) \geq \omega^2$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\theta_1(t), \theta_2(t)) &= \theta_2\dot{\theta}_2 + \left\{\frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1)\right\} \dot{\theta}_1 \\ &= \left\{\dot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1)\right\} \dot{\theta}_1 = 0. \end{aligned}$$

Quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile se  $(g/\ell) \geq \omega^2$ .

**3. Oscillazioni smorzate e fenomeno della risonanza.** Abbiamo già visto, nel capitolo precedente, l'oscillatore armonico con attrito. Ora, consideriamo l'equazione che modella un sistema meccanico, in cui le forze in gioco sono rappresentate da una forza elastica  $(-ky)$ , da un attrito proporzionale alla velocità del sistema  $(-h\dot{y})$  e da una sollecitazione esterna, dipendente dal tempo  $(F(t))$ , cioè si consideri l'equazione

$$m\ddot{y} = -ky - h\dot{y} + F(t),$$

dove  $m > 0$  è la massa. In un primo momento, calcoliamo l'integrale generale del sistema meccanico, sul quale, oltre alla forza di tipo elastico, agisce una resistenza di tipo viscoso, ossia proporzionale alla velocità, che, come vedremo, tenderà a smorzare o, addirittura, ad eliminare le oscillazioni del moto. Quindi, l'equazione del moto è data da

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2y = 0,$$

dove  $\delta = h/2m$ . L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

che presenta due radici

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

Analizziamo i seguenti casi:

i)  $\delta > \omega$ , ovvero la resistenza è elevata. Le radici,  $\lambda_1, \lambda_2$ , risultano essere reali negative e distinte. L'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

dove  $c_1, c_2$  sono due costanti arbitrarie. Il moto non è oscillatorio.

ii)  $\delta = \omega$ . Allora risulta che  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta < 0$  e l'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t},$$

dove  $c_1, c_2$  sono due costanti arbitrarie. Il moto non è oscillatorio.

iii)  $\delta < \omega$ . Allora risulta che

$$\lambda_1 = -\delta + i\nu, \quad \lambda_2 = -\delta - i\nu,$$

dove  $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ . L'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = A e^{-\delta t} \cos(\nu t + \alpha),$$

dove  $A$  e  $\alpha$  sono due costanti arbitrarie. Il sistema esegue infinite oscillazioni attorno al centro con una frequenza  $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$  ed un'ampiezza  $A e^{-\delta t}$ , che diventa sempre più piccola con il trascorrere del tempo. Questo tipo di oscillazioni sono dette *smorzate*.

Ora, supponiamo che sul sistema agisca anche una forza esterna. L'equazione del moto non è più omogenea, ma è data da

$$m\ddot{y} = -ky - h\dot{y} + F(t), \quad m \neq 0.$$

Ponendo  $f(t) = F(t)/m$ , l'equazione diventa

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = f(t).$$

La soluzione generale è data da

$$y(t) = \varphi(t) + \psi(t),$$

dove  $\varphi(t)$  è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e  $\psi(t)$  è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Possiamo considerare una sollecitazione esterna del tipo

$$f(t) = B \cos(\gamma t).$$

Se  $\gamma = 0$ , la forza esterna è una costante  $B$ . Diversamente, essa risulta essere armonica con frequenza  $\nu = \gamma/2\pi$ .

Analizziamo i seguenti casi:

- i) Supponiamo che la resistenza sia nulla, ovvero  $\delta = 0$ . Allora un integrale particolare presenta la seguente forma:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t & \gamma \neq \omega, \\ \frac{Bt}{2\omega} \sin \omega t & \gamma = \omega. \end{cases}$$

Alle oscillazioni descritte da  $\varphi(t)$  si sovrappongono le *oscillazioni forzate* rappresentate da  $\psi(t)$ , di ampiezza costante (e uguale a  $B/(\omega^2 - \gamma^2)$  se  $\gamma \neq \omega$ ). Se, invece, si verifica che  $\gamma = \omega$ , l'ampiezza delle oscillazioni (uguale a  $Bt/2\omega$ ) aumenta con il trascorrere del tempo: si ha il *fenomeno della risonanza*.

- ii) Sia  $\delta > 0$ . L'integrale particolare è dato da

$$\psi(t) = B\rho \cos [\gamma(t - r)],$$

dove  $\rho = 1/\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\delta^2\gamma^2}$  e  $\tan(\gamma r) = 2\gamma\delta/(\omega^2 - \gamma^2)$ . Poichè l'integrale generale dell'equazione omogenea associata,  $\varphi(t)$ , tende a zero al tendere di  $t$  all'infinito, dopo un moto iniziale transitorio, la situazione di regime è descritta dall'integrale  $\psi(t)$ . Il moto è armonico con ampiezza  $B\rho$  (dove  $\rho$  è una funzione di  $\gamma$ ) e periodo  $\frac{2\pi}{\gamma}$ . Quest'ultima compare quando la frequenza di eccitazione è quasi uguale a quella caratteristica  $\omega$ . Se, invece,  $\delta \geq \frac{1}{2}\omega\sqrt{2}$ , la funzione  $\rho(\gamma)$  è decrescente e non si ha risonanza.

**4. Modello preda-predatore di Lotka-Volterra.** Dopo la prima guerra mondiale, al largo del Mar Adriatico, si riscontrò una diminuzione di una determinata specie di pesci commestibili e un aumento del numero di predatori. La questione fu posta all'attenzione del matematico italiano Vito Volterra [1860-1940], che risolse il problema introducendo il seguente modello divenuto celebre e già studiato precedentemente da Alfred James Lotka [1880-1949], in relazione ad un problema di cinetica chimica.

Indicando con  $x = x(t)$  il numero di prede e con  $y = y(t)$  il numero di predatori, Volterra considerò che il tasso relativo di crescita delle prede era costante in assenza di predatori, ma decrescente linearmente con  $y$ ; il tasso relativo di diminuzione del numero di predatori era costante in assenza di prede, ma crescente linearmente con  $x$ . Il modello proposto fu il seguente:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &= a - by, & \frac{\dot{y}}{y} &= -c + dx, \end{aligned}}$$

dove  $a, b, c, d > 0$ . Poniamo  $F(x, y) = ax - bxy$ ;  $G(x, y) = -cy + dxy$ . I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema  $F(x, y) = G(x, y) = 0$ , cioè  $x = (c/d)$  e  $y = (a/b)$ . L'integrale primo del sistema è

$$E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by.$$

Infatti, moltiplicando  $(\dot{x}/x) = a - by$  per  $(-c + dx)$  e  $(\dot{y}/y) = -c + dx$  per  $(a - by)$  e sottraendo termine a termine, si ottiene

$$\left(-\frac{c}{x} + d\right) \dot{x} - \left(\frac{a}{y} - b\right) \dot{y} = \frac{d}{dt} (-c \log x + dx - a \log y + by) = \dot{E}.$$

Poichè

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{c}{x} + d = 0 \text{ per } x = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{a}{y} + b = 0 \text{ per } y = \frac{a}{b}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{c}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{a}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned}$$

$E$  risulta essere strettamente convessa in  $\mathbb{R}^2$  e il punto  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  è il minimo globale per  $E$ . In particolare, consideriamo come integrale primo definito positivo la funzione

$$H(x, y) = E(x, y) - E\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right),$$

che verifica le condizioni  $H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = 0$ ,  $H(x, y) > 0$  e  $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) \leq 0$  e risulta quindi essere una funzione di Liapunov. Il punto di equilibrio del sistema è stabile ma non asintoticamente. A questo sistema, dunque, non è possibile in modo utile applicare il metodo di linearizzazione.

Gli insiemi di livello  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : E(x, y) = k, k > E(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\}$  sono curve chiuse regolari che racchiudono  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ . Il moto avviene in senso antiorario. L'evoluzione della coppia  $(x(t), y(t))$  avviene con periodo  $T$  dipendente da  $k$ . Quindi,  $x(0) = x(T)$  e  $y(0) = y(T)$ . Calcolando

$$\int_0^T \frac{\dot{x}}{x} dt = \log x(T) \Big|_0^T - \log x(0) \Big|_0^T = 0.$$

$$\int_0^T \frac{\dot{y}}{y} dt = \log y(T) - \log y(0) = 0.$$

$$0 = \int_0^T (a - by) dt = aT - b \int_0^T y dt.$$

Quest'ultima equazione implica  $\frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a}{b}$ ;

$$0 = \int_0^T (-c + dx) dt = -cT + d \int_0^T x dt,$$

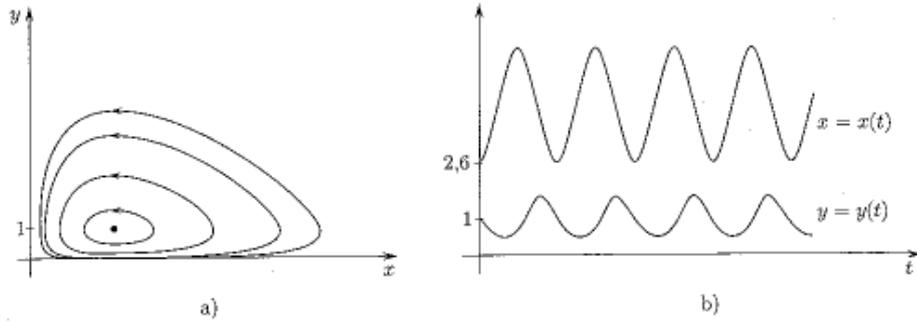


Figura III.8: (a) Orbite del sistema di Lotka-Volterra corrispondenti ai dati iniziali  $(0.5, 1)$ ,  $(0.7, 1)$ ,  $(1.4, 1)$  e  $(2.6, 1)$ . (b) Grafici delle soluzioni dei sistemi di Lotka-Volterra con dati iniziali  $(2.6, 1)$ . Vedi [21, 6].

da cui si ottiene  $\frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{c}{d}$ .

Il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra descrive la competizione tra prede e predatori. Il numero dei predatori è  $y$  e quello di prede è  $x$ . Questa competizione è ciclica. In ogni periodo  $T$  (con  $T$  che dipende dalla curva di livello di  $E$ ) l'aumento delle prede comporta una riduzione del numero di predatori e vice versa, ma in ogni periodo il numero medio di prede e quello di predatori non cambia. Nessuna delle due specie si può estinguere.

## 6 Stabilità dei sistemi dinamici discreti

Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (\text{III.9})$$

dove  $x_n \in \mathbb{R}^m$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua. Allora l'insieme  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  si dice *traiettoria* o *orbita*. Un'orbita si chiama *p-ciclo* se  $x_{n+p} = x_n$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$  ma  $x_0 \notin \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ . Dunque  $p$  denota il periodo minimo.

Un'orbita che consiste in un singolo punto si dice *punto di equilibrio* e, indicato tale punto con  $X$ , esso è soluzione dell'equazione  $F(X) = X$ . Nel caso di un  $p$ -ciclo esistono  $p$  punti diversi  $X_1, X_2, \dots, X_p$  tali che

$$F(X_1) = X_2, F(X_2) = X_3, F(X_3) = X_4, F(X_{p-1}) = F(X_p), F(X_p) = X_1.$$

In tal caso l'orbita consiste di tali  $p$  punti. Ovviamente,  $X_1, \dots, X_p$  sono punti di equilibrio dell'iterato  $p$ -esimo della  $F$  (cioè, della mappa  $F^p$ , dove  $F^1(X) = F(X)$  e  $F^p(X) = F(F^{p-1}(X))$ ).

Un punto di equilibrio  $X$  si dice *asintoticamente stabile* se esiste un intorno  $U$  di  $X$  tale che  $x_n \rightarrow X$  esponenzialmente per ogni  $x_0 \in U$ . Il punto di equilibrio

$X$  si dice *stabile* se esiste un intorno  $U$  di  $X$  tale che ogni orbita con il punto iniziale  $x_0 \in U$  è contenuta in  $U$ .

Un risultato fondamentale è il seguente teorema:

**Teorema III.12 (delle contrazioni)** *Supponiamo che esista una costante  $\delta \in (0, 1)$  tale che*

$$\|F(\xi) - F(\eta)\| \leq \delta \|\xi - \eta\|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

*Allora il sistema dinamico (III.9) ha un singolo punto di equilibrio e quel punto è asintoticamente stabile.*

**Dimostrazione.** Per  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  si consideri l'orbita  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ . Allora

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (\delta^{n+p-1} + \delta^{n+p-2} + \dots + \delta^n) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^m$  e quindi ha limite,  $X$ . Facendo tendere il pedice  $p$  all'infinito, risulta

$$\|x_n - X\| \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|.$$

Inoltre, facendo tendere  $n$  all'infinito nella (III.9) risulta  $X = F(X)$ , cioè  $X$  è un punto di equilibrio che è ovviamente asintoticamente stabile. L'unicità del punto di equilibrio si dimostra facilmente. ■

**Corollario III.13** *Supponiamo che esistano una costante  $\delta \in (0, 1)$  e un intero  $p \in \mathbb{N}$  tali che*

$$\|F^p(\xi) - F^p(\eta)\| \leq \delta \|\xi - \eta\|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

*Allora il sistema dinamico (III.9) ha un singolo punto di equilibrio e quel punto è asintoticamente stabile.*

**Dimostrazione.** Secondo il Teorema delle contrazioni esiste un unico punto fisso  $X$  della mappa  $F^p$ . Definiamo per  $j = 0, 1, \dots, p-1$ ,  $X_j = F^j(X)$ . Allora

$$F^p(X_j) = F^{p+j}(X) = F^j(F^p(X)) = F^j(X) = X_j, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Poichè ovviamente ciascun  $X_j$  è punto fisso di  $F^p$  e questa mappa ha soltanto un singolo punto fisso, risulta  $X_0 = X_1 = \dots = X_{p-1} = X$ . Di conseguenza,  $F(X) = X_1 = X_0 = X$ . Siccome, per  $j = 0, 1, \dots, p-1$  e dato il punto iniziale  $\xi_0$ , le  $p$  successioni  $\{\xi_{j+np}\}_{n=0}^\infty$  convergono tutte ad  $X$ , anche la successione  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  tende ad  $X$ . Ciò dimostra l'asintotica stabilità di  $F$ . ■

Se la mappa  $F$  è differenziabile in un intorno del punto di equilibrio  $X$  e  $\|F'(X)\| < 1$  (essendo  $F'(X)$  la matrice jacobiana in  $X$ ), allora la  $F$  è una contrazione (per qualsiasi  $\delta$  tra  $\|F'(X)\|$  e 1) in un opportuno intorno di  $X$ . Di conseguenza,  $X$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Sia  $F : J \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  derivabile e sia  $X_1, \dots, X_p$  un  $p$ -ciclo di  $F$ . Applicando la regola di derivazione di una funzione composta  $p$  volte in seguito:

$$\begin{aligned}(F^p)'(X) &= F'(F^{p-1}(X))(F^{p-1})'(X) = F'(F^{p-1}(X))F'(F^{p-2}(X))(F^{p-2})'(X) \\ &= F'(F^{p-1}(X))F'(F^{p-2}(X)) \dots F'(F(X))F'(X).\end{aligned}$$

si conclude che il  $p$ -ciclo  $\{X_1, \dots, X_p\}$  è asintoticamente stabile se

$$|F'(X_1)F'(X_2) \dots F'(X_p)| < 1.$$

**1. Metodo di Newton-Raphson.** Questo metodo per determinare gli zeri di una funzione  $f$  di classe  $C^2$  conduce al seguente sistema dinamico:<sup>2</sup>

$$x_{n+1} = F(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (\text{III.10})$$

Osserviamo ora che

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Quindi se  $f(X) = 0$  e  $f'(X) \neq 0$ , esiste un intorno  $U$  di  $X$  in cui  $|F'(x)| < 1$ . In tal caso  $X$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostriamo ora che la convergenza allo zero  $X$  è quadratica. Infatti, scrivendo la (III.10) nella forma

$$x_{n+1} - X = [x_n - X] - \frac{f(x_n) - f(X)}{f'(x_n)},$$

appliciamo il teorema del valor medio e troviamo  $\xi$  tra  $x_n$  e  $X$  tale che  $f(x_n) - f(X) = f'(\xi)[x_n - X]$ . Dunque,

$$x_{n+1} - X = \frac{x_n - X}{f'(x_n)} [f'(x_n) - f'(\xi)].$$

---

<sup>2</sup>La tangente al grafico della funzione  $f$  nel punto  $(x_n, f(x_n))$  deve passare per il punto  $(x_{n+1}, 0)$ .



Figura III.9: Gli attrattori provenienti dall'applicazione del metodo di Newton-Raphson alla funzione  $f(z) = z^4 - 1$  (vedi [14]).

Applicando il teorema del valor medio alla  $f'$  troviamo  $\eta$  tra  $x_n$  e  $\xi$  tale che  $f'(x_n) - f'(\xi) = f''(\eta)[x_n - \xi]$ . Dunque,

$$x_{n+1} - X = \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}[x_n - X][x_n - \xi].$$

Ponendo  $M = \max\{|f''(z)|\}$  e  $m = \min\{|f'(z)|\}$ , otteniamo la stima

$$\|x_{n+1} - X\| \leq \frac{M}{m}\|x_n - X\|^2.$$

Per induzione matematica si dimostra facilmente che

$$\|x_n - X\| \leq \frac{m}{M} \left( \frac{M}{m} \|x_0 - X\| \right)^{2^n}.$$

Quindi  $x_n \rightarrow X$  se  $\|x_0 - X\| < (m/M)$ .

Il metodo di Newton-Raphson può anche essere applicato nel piano complesso. Sia  $f$  una funzione analitica intera.<sup>3</sup> Allora gli zeri complessi della  $f$

<sup>3</sup>Cioè: La funzione  $f$  ha un numero infinito di derivate successive nel piano complesso e la serie di potenze  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} [f^{(j)}(z_0)/j!](z - z_0)^j$  è assolutamente convergente in ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

possono, in principio, essere trovati dal sistema dinamico

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

In generale, si ottiene un calderone di attrattori complicati. Per esempio, per  $f(z) = z^4 - 1$  abbiamo attrattori attorno agli zeri  $\pm 1$  e  $\pm i$ .

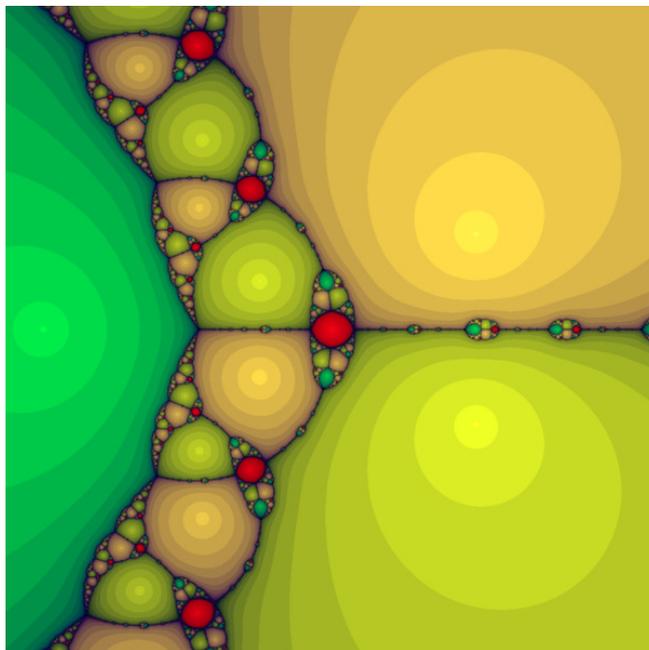


Figura III.10: Gli attrattori provenienti dall'applicazione del metodo di Newton-Raphson alla funzione  $f(z) = z^3 - 2z + 2$  (wikipedia).

## 2. Mappa logistica. Consideriamo la cosiddetta *mappa logistica*

$$x_{n+1} = F(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} rx_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{III.11})$$

dove  $0 \leq x_n \leq 1$  e  $r$  è una costante positiva. Per far appartenere  $x_{n+1}$  all'intervallo  $[0, 1]$  per qualsiasi  $x_n \in [0, 1]$ , bisogna limitarsi alle costanti  $r$  tali che  $0 \leq r \leq 4$ . La mappa logistica (III.11) ha i due punti di equilibrio  $X = 0$  e, per  $1 < r \leq 4$ ,  $X = ((r - 1)/r)$ , per cui  $F(X) = X$ . Ponendo  $F(x) = rx(1 - x)$  e  $x'_n = x_n - X$  si ha

$$X + x'_{n+1} = F(X + x'_n) = F(X) + x'_n F'(X) + O([x'_n]^2), \quad x'_n \rightarrow 0,$$

dove  $F(X) = X$ . Quindi

$$x'_{n+1} = x'_n F'(X) + O([x'_n]^2), \quad x'_n \rightarrow 0,$$

Dunque, se  $|F'(X)| < 1$ , si ha la stabilità asintotica della mappa logistica (nel senso che  $x_n \rightarrow X$  se  $n \rightarrow +\infty$ , qualunque sia  $x_0$ ). Se  $|F'(X)| \leq 1$ , si ha solo la sua stabilità (nel senso che  $x_n$  rimane vicino ad  $X$ ).

Per  $X = 0$  abbiamo  $F'(X) = r(1 - 2X) = r$ . Quindi  $|F'(X)| < 1$  se e solo se  $0 \leq r < 1$ . In altre parole, per  $0 \leq r < 1$  abbiamo  $x_n \rightarrow 0$  qualunque sia  $x_0 \in [0, 1]$ . Quindi il punto di equilibrio  $X = 0$  è asintoticamente stabile se  $0 \leq r < 1$ , e stabile se  $0 \leq r \leq 1$ .<sup>4</sup>

Per  $X = ((r-1)/r)$  abbiamo  $F'(X) = 2 - r$ . Quindi  $|F'(X)| < 1$  se e solo se  $1 < r < 3$ . In altre parole, per  $1 < r < 3$  abbiamo  $x_n \rightarrow ((r-1)/r)$  qualunque sia  $x_0 \in (0, 1)$ . Per  $x_0 = 0$  oppure  $x_0 = 1$  abbiamo  $x_n = 0$  per  $n \geq 2$ . Quindi il punto  $X = ((r-1)/r)$  è asintoticamente stabile se  $1 < r < 3$  e stabile se  $1 \leq r \leq 3$ .<sup>5</sup>

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} F^2(X) &= F(F(X)) = r[rX(1-X)](1 - [rX(1-X)]) \\ &= r^2X(1-X)(1 - rX + rX^2). \end{aligned}$$

Quindi  $X = F^2(X)$  se e solo se

$$X \in \left\{ 0, \frac{r-1}{r}, \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)} \right\}.$$

Le altre due soluzioni dell'equazione  $F^2(X) = X$  appartengono all'intervallo  $[0, 1]$  se e solo se  $3 \leq r \leq 4$ .

Si verifica facilmente che

$$F\left(\frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}\right) = \frac{r+1}{2r} \mp \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}.$$

Inoltre,

$$(F^2)'(X) = F'(F(X))F'(X) = r^2(1 - 2F(X))(1 - 2X).$$

Per  $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}$  troviamo  $(F^2)'(X) = -(r-1)^2 + 5$  il quale verifica  $|(F^2)'(X)| < 1$  se e solo se  $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ . In altre parole, i punti di equilibrio  $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}$  del secondo iterato della mappa logistica sono asintoticamente stabili se e solo se  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$  e stabili se e solo se  $3 \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$ .

La sperimentazione numerica condotta da Mitchell Feigenbaum (1978) [nato nel 1944] ha portato ai seguenti risultati:

---

<sup>4</sup>Per  $r = 1$  e  $x_0 \in (0, 1]$ , si ha:  $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > 0$  e quindi  $x_n \rightarrow X$  per un opportuno punto di equilibrio  $X$ . Siccome 0 è l'unico punto di equilibrio, risulta  $X = 0$ . Quindi 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se  $r = 1$ .

<sup>5</sup>Per  $r = 2$  la (III.11) ha la soluzione esplicita  $x_n = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2x_0)^{2^n}]$ . Tale soluzione tende a  $\frac{1}{2}$  per  $n \rightarrow +\infty$  se e solo se  $0 < x_0 < 1$ . Per  $r = 4$  si ha  $x_n = \sin^2(2^n \theta \pi)$ , dove  $\theta = \frac{1}{\pi} \arcsin(\sqrt{x_0})$ .

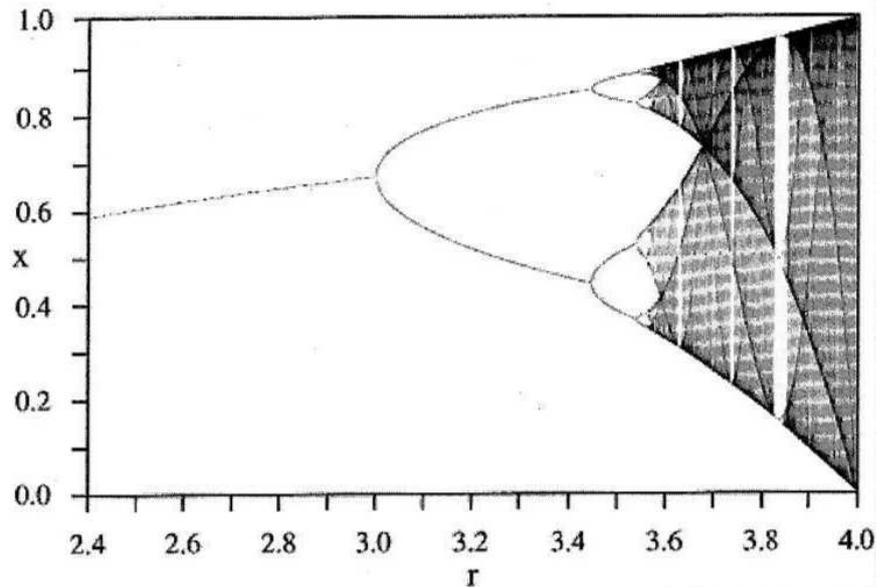


Figura III.11: Diagramma di biforcazione della mappa logistica.

- Per  $0 \leq r < 1$  esiste un singolo punto di equilibrio ( $X = 0$ ) che è asintoticamente stabile.
- Per  $1 < r < 3$  esiste un secondo punto di equilibrio ( $X = ((r - 1)/r)$ ) che è asintoticamente stabile.
- Per  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$  esistono due punti di equilibrio della mappa  $F^2$  ( $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}$ ) che sono asintoticamente stabili. Quindi la mappa logistica ha un 2-ciclo asintoticamente stabile.
- Più generalmente, esiste una successione crescente  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$  nell'intervallo  $[0, 4)$  (dove  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\alpha_3 = 1 + \sqrt{6}$ ) tale che per  $\alpha_{k-1} < r < \alpha_k$  la mappa logistica ha un  $2^{k-2}$ -ciclo asintoticamente stabile.
- Il rapporto delle lunghezze degli intervalli dei valori di  $r$  per cui esiste un  $2^{k-2}$ -ciclo e per cui esiste un  $2^{k-1}$ -ciclo della mappa logistica, hanno un rapporto che tende alla cosiddetta costante di Feigenbaum (4.669202 circa). In altre parole, la costante di Feigenbaum è il seguente limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}.$$

Si ha  $\alpha_4 \approx 3.54409$ . Infatti  $\alpha_k \rightarrow 3.5699456$  (circa) se  $k \rightarrow +\infty$ .

f. Oltre il valor limite di 3.5699456 ci sono intervalli di  $r$  per cui l'iterazione della mappa logistica esibisce un comportamento caotico. Ci sono anche intervalli di  $r$  per cui esistono un 3-ciclo, un 6-ciclo, un 12-ciclo, ecc.

**3. Lo shift di Bernoulli.** Sia  $\sigma : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definita da

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$\theta_{n+1} = \sigma(\theta_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.12})$$

Nel sistema binario (in cui si rappresentano i numeri tramite le due cifre 0 e 1) ogni numero  $\theta \in [0, 1)$  si rappresenta in modo unico come

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{2^j},$$

dove  $d_j \in \{0, 1\}$ . In tal caso  $0.d_1d_2d_3\dots$  è la rappresentazione binaria del numero  $\theta$ . Si verifica facilmente che

$$\sigma(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{j+1}}{2^j}.$$

In altre parole, l'evoluzione del sistema dinamico (III.12) consiste nell'allontanamento della prima cifra dallo sviluppo binario.

Lo sviluppo binario di un numero  $\theta \in [0, 1)$  è finito (nel senso che tutte le cifre tranne un numero finito,  $m$ , sono uguali a zero) se e solo se  $\theta = (q/2^m)$  per opportuni  $m = 1, 2, 3, \dots$  intero e  $q = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1$  dispari. In tal caso

$$\sigma^m(\theta) = 0.$$

D'altra parte, se  $\theta$  è un numero razionale, da un certo punto in poi il suo sviluppo binario sarà periodico:  $\theta_{n+p} = \theta_n$  per  $n \geq s$ . In tal caso

$$\{\theta_s, \theta_{s+1}, \dots, \theta_{s+p-1}\}$$

è un  $p$ -ciclo. Infine, se  $\theta$  è irrazionale, il suo sviluppo binario è aperiodico.

Presentiamo ora alcuni esempi numerici.<sup>6</sup>

$$\theta_0 = \frac{1}{3}, \quad \theta_1 = \frac{2}{3}, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}; \quad (2\text{-ciclo})$$

$$\theta_0 = \frac{1}{7}, \quad \theta_1 = \frac{2}{7}, \quad \theta_2 = \frac{4}{7}, \quad \theta_3 = \frac{1}{7}; \quad (3\text{-ciclo})$$

$$\theta_0 = \frac{1}{5}, \quad \theta_1 = \frac{2}{5}, \quad \theta_2 = \frac{4}{5}, \quad \theta_3 = \frac{3}{5}, \quad \theta_4 = \frac{1}{5}. \quad (4\text{-ciclo})$$

L'unico punto di equilibrio della mappa  $\sigma$  è lo zero. Purtroppo, lo zero può essere approssimato da numeri irrazionali (per esempio,  $\sqrt{2}/2n$ ) e quindi lo zero è un punto di equilibrio instabile. Dallo stesso ragionamento segue che tutti i  $p$ -cicli sono instabili. Ciò implica un comportamento caotico della mappa  $\sigma$ .

**4. Mappa nel piano complesso.** Consideriamo ora la mappa

$$z_{n+1} = \mathbf{F}(z_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{III.13})$$

Ponendo  $z = x + iy$ , potremmo convertire la (III.13) nel sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = F_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

dove abbiamo sfruttato l'equivalenza tra il piano complesso e  $\mathbb{R}^2$ . Per esempio, per  $\mathbf{F}(z) = z^2$  otteniamo al posto della (III.14)

$$\begin{cases} x_{n+1} = [x_n]^2 - [y_n]^2, \\ y_{n+1} = 2x_n y_n. \end{cases}$$

Se  $\mathbf{F}$  è una funzione analitica e  $Z$  è un punto di equilibrio, allora  $Z$  è asintoticamente stabile se  $|\mathbf{F}'(Z)| < 1$  e instabile se  $|\mathbf{F}'(Z)| > 1$ .

Quest'ultimo sistema dinamico ha due punti di equilibrio, ambedue stabili: 0 e  $\infty$  (in  $\mathbb{C}$ ). Siccome  $z_n = [z_0]^{2^n}$  determina l'orbita con punto iniziale  $z_0$ , si ha  $z_n \rightarrow 0$  per  $|z_0| < 1$  e  $z_n \rightarrow \infty$  per  $|z_0| > 1$ . Il cerchio unitario viene trasformato in se stesso. Le radici dell'unità primitive di ordine  $p$  conducono ad un  $p$ -ciclo.<sup>7</sup> Tutti gli altri punti del cerchio unitario producono un'orbita aperiodica che è densa nel cerchio.

Consideriamo il caso  $\mathbf{F}(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ . In tal caso i punti di equilibrio sono  $Z = \pm 1$  (e  $Z = \infty$ ). Siccome  $\mathbf{F}'(\pm 1) = 0$ , i punti di equilibrio  $Z = \pm 1$

<sup>6</sup>Per  $\theta_0 = \frac{1}{N}$  si inizia un  $p$ -ciclo se  $p$  è il numero naturale più piccolo per cui  $2^p - 1$  è divisibile da  $N$ . Quindi  $\frac{1}{31}$  genera un 5-ciclo,  $\frac{1}{9}$  un 6-ciclo,  $\frac{1}{127}$  un 7-ciclo,  $\frac{1}{17}$  un 8-ciclo,  $\frac{1}{73}$  un 9-ciclo,  $\frac{1}{11}$  un 10-ciclo e  $\frac{1}{23}$  e  $\frac{1}{89}$  11-cicli.

<sup>7</sup> $z$  se dice radice dell'unità primitiva se  $z^p = 1$  e  $1 \notin \{z, z^2, z^3, \dots, z^{p-1}\}$ .

sono ambedue stabili. Il semipiano destro aperto ( $\operatorname{Re}(z) > 0$ ) è l'attrattore per  $Z = 1$ , mentre quello sinistro ( $\operatorname{Re}(z) < 1$ ) è l'attrattore per  $Z = -1$ . L'asse immaginario andrà a finire a  $Z = \infty$  dopo uno (per  $z_0 = 0$ ) o due (per  $z_0 \neq 0$ ) passaggi. Siccome ogni numero immaginario può essere approssimato da numeri complessi non immaginari, il punto di equilibrio  $Z = \infty$  è instabile.

Consideriamo ora una mappa più interessante

$$f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

dove  $f$  è un polinomio oppure una funzione razionale, studiata da Pierre Fatou [1878-1929], Gaston Julia [1893-1978] e Benoît Mandelbrot [1924-2010]. Mandelbrot (1980) è stato uno dei primi a studiare tali problemi con l'aiuto di adeguati strumenti informatici. La mappa più studiata è stata la seguente:

$$f(z) = z^2 + c, \tag{III.15}$$

dove  $c \in \mathbb{C}$  è una costante, in particolare il sistema dinamico di equazione

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = [z_n]^2 + c. \tag{III.16}$$

Per questa mappa si definisce *insieme di Mandelbrot* l'insieme  $M$  di tutti i numeri complessi  $c$  per cui la successione  $\{z_n\}_{n=0}^\infty$  è limitata. In tal caso  $\{z_n\}_{n=0}^\infty$  può essere suddivisa in alcune sottosuccessioni aventi come limite uno degli zeri dell'equazione polinomiale  $z = f^n(z)$  di grado  $2^n$ . Per  $c = \pm i$ , la successione  $\{z_n\}_{n=0}^\infty$  consiste di quattro punti, poichè

$$0 \xrightarrow{f} \pm i \xrightarrow{f} -1 \pm i \xrightarrow{f} \mp i \xrightarrow{f} -1 \pm i \xrightarrow{f} \mp i \xrightarrow{f} \dots,$$

quindi  $\{i, -i\} \subset M$ . D'altra parte, per  $c = 1$  abbiamo  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2$ ,  $z_n \geq 1$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e quindi  $z_{n+1} \geq z_n + 1 > z_n$ , che implica che  $z_n \rightarrow +\infty$ . In altre parole,  $1 \notin M$ .

Per  $c > \frac{1}{4}$ , abbiamo

$$z_{n+1} - z_n = (z_n - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{4}) > 0,$$

implicando la monotonia stretta della successione  $\{z_n\}_{n=0}^\infty$  e quindi l'esistenza (finita o infinita) del limite  $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$ . Siccome  $z = z^2 + c$ , risulterebbe  $(z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - c < 0$  e dunque  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  se  $z$  fosse finito. Di conseguenza,  $z_n \rightarrow +\infty$  e quindi  $(\frac{1}{4}, +\infty) \cap M = \emptyset$ .

Per  $c = \frac{1}{4}$  abbiamo  $z_{n+1} = [z_n]^2 + \frac{1}{4}$ . Perciò se  $\frac{1}{4} < z_n < \frac{1}{2}$ , allora  $\frac{1}{4} < z_{n+1} < \frac{1}{2}$ , mentre  $z_{n+1} - z_n = (z_n - \frac{1}{2})^2 > 0$ . Di conseguenza,  $z_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , che è la soluzione dell'equazione  $z = z^2 + \frac{1}{4}$  e perciò  $\frac{1}{4} \in M$ . Inoltre, per  $c = -2$  abbiamo  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = z_3 = \dots = 2$ , e quindi  $-2 \in M$ . Per dimostrare che

$(-\infty, -2)$  non interseca  $M$ , prendiamo  $c < -2$ . In tal caso  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = c < -2$ ,  $z_2 > (-2)^2 - 2 = 2$ ,  $z_3 > (2)^2 - 2$ , dunque  $z_n > 2$  per  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Inoltre,  $z_{n+1} - z_n = (z_n - 2)(z_n + 1) > 0$  per  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Quindi  $\{z_n\}_{n=2}^\infty$  è strettamente crescente con limite  $+\infty$  (poichè in caso contrario il limite sarebbe uno degli zeri 2 e  $-1$  dell'equazione  $z = z^2 - 2$  e questo è impossibile). Di conseguenza,  $c \notin M$  e quindi  $(-\infty, -2) \cap M = \emptyset$ .

I punti fissi della (III.15) sono  $z_\pm = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{1 - 4c}]$ . In questi due punti abbiamo  $f'(z_\pm) = 2z_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$ . Affinchè uno dei punti fissi  $z_\pm$  sia attraente, è necessario e sufficiente che  $|f'(z_\pm)| < 1$  per almeno uno delle  $z_\pm$ , oppure: che  $\sqrt{1 - 4c}$  si trovi all'interno di uno dei due dischi di raggio 1 e centro  $\pm 1$ . Ponendo  $w = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$ , risulta  $c = \frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2]$ . In altre parole, la mappa (III.15) ha un punto fisso attraente se e solo se

$$c \in \left\{ \frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2] : |w| < 1 \right\}.$$

Si vede facilmente che la frontiera di questa regione è una cardiode<sup>8</sup> con una cuspide nel punto di ascissa  $\frac{1}{4}$  e l'estremo sinistro a  $-\frac{3}{4}$ . Di conseguenza, questa regione più la sua frontiera sono contenute nell'insieme di Mandelbrot.

Iterando la (III.16), risulta  $z_{n+2} = [z_n]^4 + 2c[z_n]^2 + c(c + 1)$ . Quindi i punti fissi del secondo iterato  $f^2$  sono gli zeri del polinomio

$$p(z) = z^4 + 2cz^2 - z + c(c + 1) = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1);$$

dunque i punti di periodo 2 sono  $z_\pm^{[2]} = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1 - 4(c + 1)}]$ . Adesso osserviamo che  $(f^2)'(z) = f'(f(z))f'(z) = 4zf(z) = 4z(z^2 + c)$ . Sostituendo  $z = z_\pm^{[2]}$ , si ha  $(f^2)'(z_\pm^{[2]}) = 4(c + 1)$ . Dunque  $\{z_+^{[2]}, z_-^{[2]}\}$  è un attrattore se e solo se  $c$  appartiene al disco  $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta + 1| < \frac{1}{4}\}$ . In altre parole, il disco chiuso di centro  $-1$  e raggio  $\frac{1}{4}$  (che tocca la cardiode nel punto  $-\frac{3}{4}$ ) è contenuto nell'insieme di Mandelbrot. Abbiamo dimostrato che

$$\left[-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right] \subset M \cap \mathbb{R} \subset \left[-2, \frac{1}{4}\right].$$

Si può infatti dimostrare che  $M \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ .

**5. Esempio di una mappa cubica.** Per il parametro  $a \in \mathbb{R}$  consideriamo il sistema dinamico

$$x_{n+1} = f(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} ax_n - [x_n]^3. \quad (\text{III.17})$$

I punti fissi sono 0 per  $a \leq 1$  e  $\{0, \pm\sqrt{a - 1}\}$  per  $a > 1$ . Siccome  $f'(x) = a - 3x^2$ , si ha  $f'(0) = a$  e, per  $a > 1$ ,  $f'(\pm\sqrt{a - 1}) = 3 - 2a$ . Quindi il punto fisso  $z = 0$

<sup>8</sup>Si ha  $|c(\theta)| = \frac{1}{4}\sqrt{5 - 4\cos\theta}$ , dove  $\theta = \arg(c)$ . L'area rinchiusa è  $5\pi/16$ . La lunghezza della cardiode vale  $3K(\frac{2}{3}\sqrt{2})$ , dove  $K(m)$  è l'integrale ellittico di prima specie [1, 17.3.1].

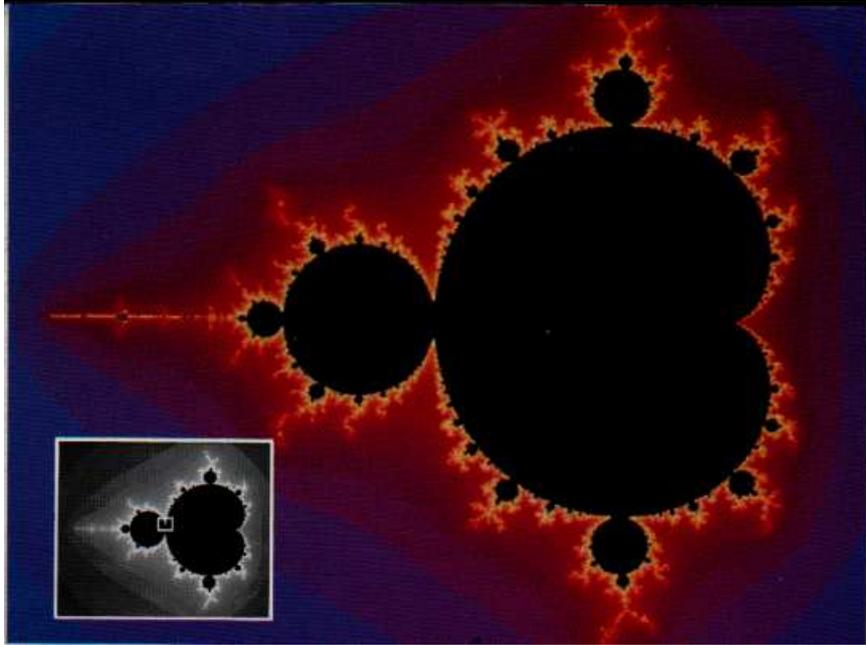


Figura III.12: L'insieme di Mandelbrot per la mappa  $f(z) = z^2 + c$  (vedi [14]). Esso contiene il disco di centro  $-1$  e raggio  $\frac{1}{4}$  attaccato, nel punto  $z = \frac{3}{4}$ , alla regione racchiusa dalla cardioide  $\{\frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2] : |w| = 1\}$ .

è stabile per  $a < 1$  e instabile per  $a > 1$ . I punti fissi  $\pm\sqrt{a-1}$  sono stabili per  $1 < a < 2$  e instabili per  $a > 2$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= a(ax - x^3) - (ax - x^3)^3 \\ &= x \{x^8 - 3ax^6 + 3a^2x^4 - (a^3 + a)x^2 + a^2\}. \end{aligned}$$

Quindi  $f^2(x) = x$  se e solo se

$$\underbrace{x(x^2 - a + 1)}_{\text{punti fissi}}(x^2 - a - 1)(x^4 - ax^2 + 1) = 0.$$

Abbiamo  $f(\pm\sqrt{a+1}) = \pm\sqrt{a+1}$  e  $f'(\pm\sqrt{a+1}) = -3 - 2a < -1$  per  $a > -1$ ; dunque il 2-ciclo  $\{\pm\sqrt{a+1}\}$  è instabile. Inoltre, per  $a > 2$  si ha

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}}\right) = \pm\sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}},$$

dove ci sono due coppie di segno indipendenti.

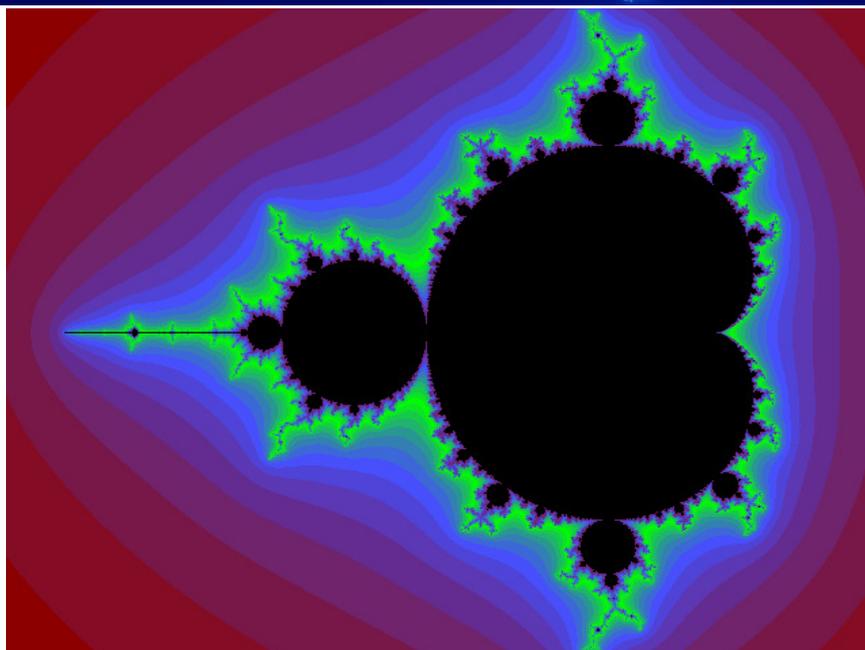
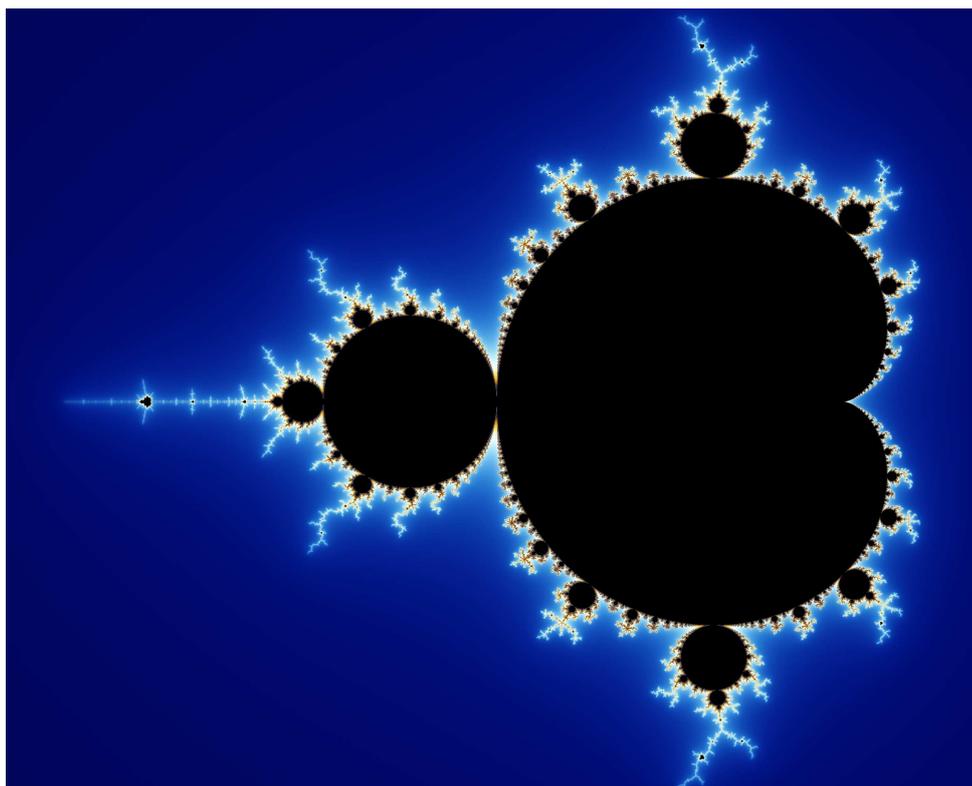


Figura III.13: Due altre rappresentazioni dell'insieme di Mandelbrot per la mappa  $f(z) = z^2 + c$  (vedi Wikipedia).

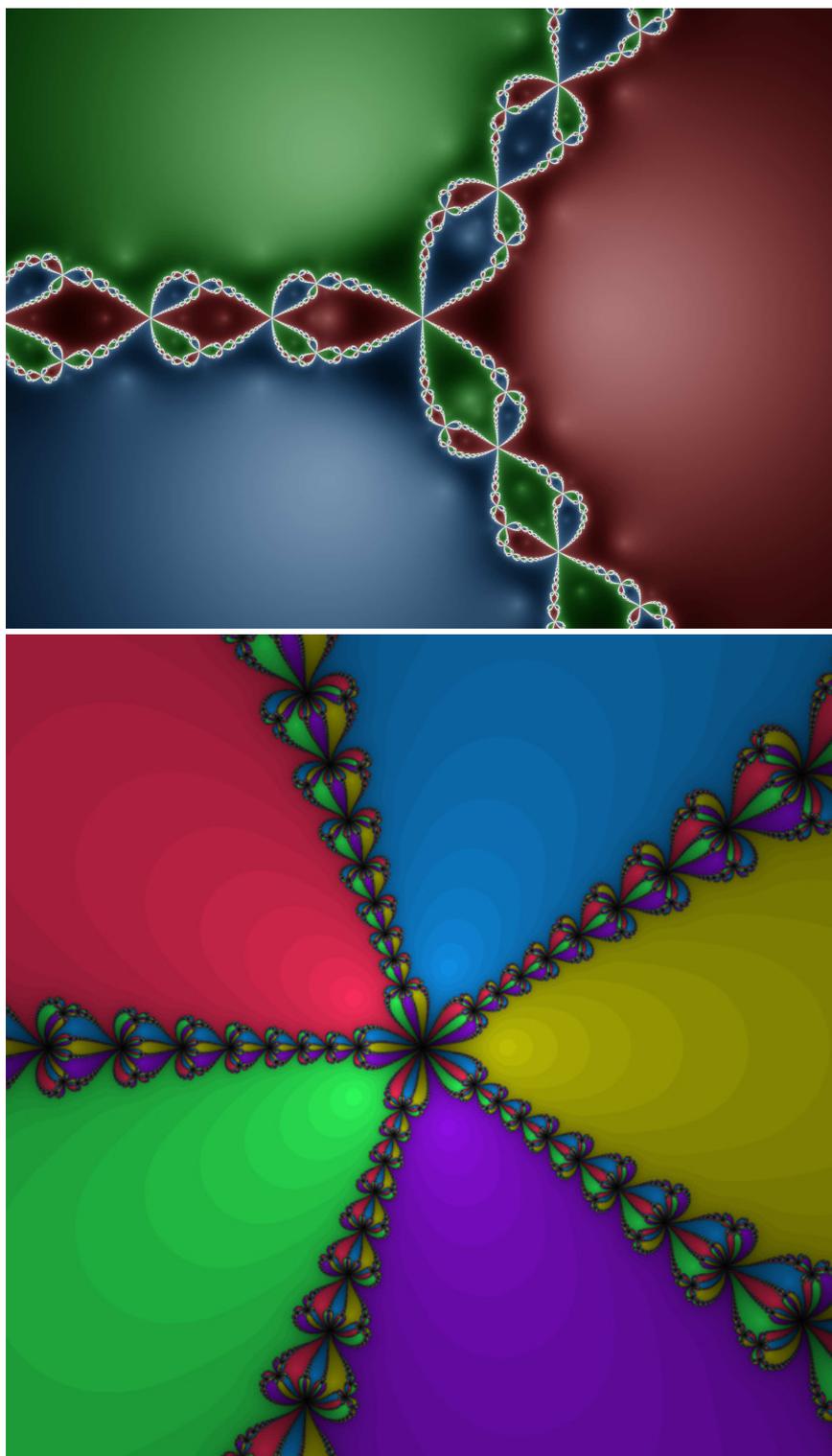


Figura III.14: Bacini di attrazione per calcolare gli zeri dei polinomi  $z^3 - 1$  e  $z^5 - 1$  usando il metodo di Newton-Raphson (wikipedia, *Newton fractal*).



# Capitolo IV

## Biforcazioni e cicli-limite

In questo capitolo discuteremo il teorema di Poincaré-Bendixson che costituisce uno strumento basilare per lo studio dei sistemi dinamici in  $\mathbb{R}^2$  e fornisce un criterio valido per individuare i cicli-limite nel piano. Successivamente, applicheremo questo teorema all'oscillatore di Van der Pol. Infine discuteremo il modello logistico di Verhulst e l'oscillatore di Lorenz.

### 1 Teorema di Poincaré-Bendixson

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad f = (f_1, f_2), \quad f_1, f_2 \in C^1(\Omega), \quad (\text{IV.1})$$

dove  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è un insieme aperto.

**Teorema IV.1 (Criterio di Bendixson)** *Sia  $\Omega$  un aperto semplicemente connesso. Se*

$$\operatorname{div}(f)(x) = \partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x)$$

*non cambia segno in  $\Omega$  e non è identicamente nulla in ogni sottoinsieme aperto di  $\Omega$ , allora il sistema (IV.1) non ammette soluzioni periodiche.*

Nel caso in cui  $f_1$  dipende soltanto da  $x_2$  e  $f_2$  soltanto da  $x_1$  abbiamo  $\operatorname{div}(f) \equiv 0$  in  $\Omega$ , cioè non si verificano le ipotesi del Criterio di Bendixson (Ivar Otto Bendixson [1861–1935]). Ciò vale anche per il pendolo semplice. Nel caso del sistema di Lotka-Volterra la divergenza della  $f$  cambia segno in ogni intorno del punto di equilibrio. In entrambi gli esempi esiste un intorno del punto di equilibrio che consiste in cicli.

D'altra parte, l'oscillatore armonico con attrito (II.2) fornisce un'applicazione del criterio di Bendixson: infatti, in tal caso  $\operatorname{div}(f) = -k < 0$ . Di conseguenza non ne esiste alcuna soluzione periodica.

**Dimostrazione.** Supponiamo, per assurdo, che  $t \rightarrow \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  sia una soluzione periodica del sistema (IV.1), con periodo  $T > 0$ . Indichiamo con  $C$  la curva  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e con  $D$  il dominio delimitato da  $C$ . Poichè  $\Omega$  è semplicemente connesso,  $D \subset \Omega$ . Per il Teorema di Gauss-Green e per le ipotesi date, si ha

$$\begin{aligned} 0 &\neq \iint_D \underbrace{\left( \partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x) \right)}_{\text{non cambia segno}} dx_1 dx_2 = \oint_{+C} (-f_2(x) dx_1 + f_1(x) dx_2) \\ &= \int_0^T (-f_2(x(t))x_1'(t) + f_1(x(t))x_2'(t)) dt \\ &= \int_0^T (-f_2(x(t))f_1(x(t)) + f_1(x(t))f_2(x(t))) dt = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

il che è assurdo. ■

**Esempio IV.2** Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -y^3 + x^2. \end{cases}$$

I suoi punti di equilibrio si ottengono risolvendo le equazioni  $x = y^2$  e  $y^3 = x^2$ , cioè:  $(0, 0)$  [degenere] e  $(1, 1)$  [punto di sella].<sup>1</sup> Abbiamo

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(-x + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^3 + x^2) = -1 - 3y^2 < 0,$$

quindi non ci sono soluzioni periodiche.

Indichiamo con  $\varphi^+ = \varphi^+(x_0) = \{\varphi(t; x_0) : t \geq 0\}$  una semi-orbita positiva.

**Definizione IV.3** Un punto  $P$  è detto *punto limite positivo* per  $\varphi^+$  se esiste una successione monotona crescente  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x_0) = P$ . Indichiamo con  $L(\varphi^+)$  l'insieme di tutti i punti limite positivi.

**Teorema IV.4** *L'insieme  $L(\varphi^+)$  è invariante, cioè*

$$P \in L(\varphi^+) \Rightarrow \varphi(t; P) \in L(\varphi^+), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

*Se  $\varphi^+$  è limitata, allora  $L(\varphi^+)$  è un insieme non vuoto, compatto e connesso.*

---

<sup>1</sup>Le linearizzazioni sono del tipo  $\dot{z} = Az$ , dove  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  per  $(0, 0)$  e  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  per  $(1, 1)$ .

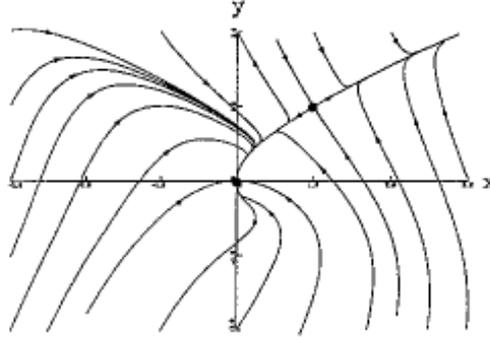


Figura IV.1: Orbite per un sistema dinamico con due punti di equilibrio [27].

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $P \in L(\varphi^+)$ ,  $t_k \rightarrow +\infty$ ,  $P_k = \varphi(t_k; x_0)$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P$ . Fissiamo un  $t \in \mathbb{R}$ . Tenendo conto della dipendenza continua dai dati iniziali, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t + t_k; x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t; \varphi(t_k; x_0)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t; P_k) = \varphi(t; P). \quad (\text{IV.3})$$

Quindi,  $\varphi(t; P) \in L(\varphi^+)$ .

Sia  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(\varphi^+)$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P$ . Questo implica che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\nu > 0$  tale che

$$\delta_k = \|P - P_k\| < \varepsilon, \quad k \geq \nu. \quad (\text{IV.4})$$

Poichè  $P_k \in L(\varphi^+)$ , esiste una successione monotona crescente tale che

$$\|\varphi(t_k; x_0) - P_k\| < \delta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{IV.5})$$

Dalle relazioni (IV.4) e (IV.5) segue che  $\|\varphi(t_k; x_0) - P\| < \varepsilon$  per  $k \geq \nu$ , e quindi  $L(\varphi^+)$  è chiuso.

Ora, supponiamo che  $\varphi^+$  sia limitata. L'insieme  $L(\varphi^+)$  è non vuoto e limitato. Dunque, per il teorema di Heine-Borel,<sup>2</sup> l'insieme  $L(\varphi^+)$  è compatto. Supponiamo, inoltre, che  $L(\varphi^+)$  non sia connesso. Devono allora esistere due insiemi  $M$  ed  $N$  chiusi tali che  $M \cup N = L(\varphi^+)$  e  $M \cap N = \emptyset$ . Poniamo

$$\delta = d(M, N) = \min_{[\xi \in M, \eta \in N]} \|\xi - \eta\| > 0. \quad (\text{IV.6})$$

Allora esistono due successioni  $\{t'_k\}_{k=1}^{\infty}$  e  $\{t''_k\}_{k=1}^{\infty}$  monotone e crescenti tali che per  $k \in \mathbb{N}$ :

$$d(\varphi(t'_k; x_0), M) < \frac{\delta}{2}, \quad (\text{IV.7})$$

<sup>2</sup>Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

$$d(\varphi(t_k''; x_0), N) < \frac{\delta}{2}. \quad (\text{IV.8})$$

Dalle relazioni (IV.6), (IV.7) e (IV.8) e dalla disuguaglianza triangolare, segue che per  $k \in \mathbb{N}$

$$d(\varphi(t_k'; x_0), M) < \frac{\delta}{2}, \quad (\text{IV.9})$$

$$d(\varphi(t_k''; x_0), M) > \frac{\delta}{2}. \quad (\text{IV.10})$$

Quindi, per il teorema degli zeri di una funzione continua, applicato alla funzione continua  $h(t) = d(\varphi(t; x_0), M)$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste un  $t_k \in [t_k', t_k'']$  tale che

$$d(\varphi(t_k; x_0), M) = \frac{\delta}{2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{IV.11})$$

La successione  $\{\varphi(t_k; x_0)\}_{k=0}^{\infty}$  è limitata e quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass,<sup>3</sup> una sua sottosuccessione converge ad un punto  $Q$  che, per la definizione dell'insieme  $L(\varphi^+)$ , deve appartenere a  $L(\varphi^+) = M \cup N$ . Inoltre,  $d(Q, M) = (\delta/2)$  e quindi  $Q \in N$ , il che contraddice la relazione (IV.6).. Quindi,  $L(\varphi^+)$  è connesso. ■

**Teorema IV.5 (Poincaré-Bendixson)** *Sia  $\varphi^+$  limitata e  $L(\varphi^+) \subset \Omega$ . Se  $L(\varphi^+)$  contiene solo punti regolari, cioè*

$$P \in L(\varphi^+) \Rightarrow f(P) \neq (0, 0), \quad (\text{IV.12})$$

*allora vale una delle due seguenti tesi:*

*i)  $\varphi^+ = L(\varphi^+)$  ed essa è un'orbita periodica.*

*ii)  $\varphi^+ \cap L(\varphi^+) = \emptyset$  e  $L(\varphi^+)$  è un'orbita periodica.*

*Di conseguenza, si ha che se  $D$  è un sottoinsieme di  $\Omega$ , aperto e limitato e tale che ogni orbita che entri in  $D$  non possa più uscirne, allora esiste un'orbita periodica in  $D$ .*

Per dimostrare il Teorema IV.5, introduciamo il concetto di trasversale e dimostriamo quattro lemmi preliminari.

**Definizione IV.6** Sia  $\ell$  un segmento chiuso e limitato di una retta nel piano. Diremo che  $\ell$  è *trasversale rispetto a  $\varphi(x)$*  se  $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P))$  non è parallelo ad  $\ell$  per ogni  $P \in \ell$ .

**Lemma IV.7** *Valgono le seguenti proprietà:*

---

<sup>3</sup>Ogni successione limitata in  $\mathbb{R}^n$  ha una sottosuccessione convergente.

- i) se  $P \in \Omega$  è un punto regolare per  $\varphi(x)$  e  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  è un versore non parallelo a  $\varphi(P)$ , allora esiste un segmento trasversale  $\ell$  parallelo a  $\nu$  e tale che  $P \in \ell$ .
- ii) Se  $\ell$  è un segmento trasversale, ogni orbita interseca  $\ell$  trasversalmente. Questo significa che la retta alla quale appartiene  $\ell$  divide il piano  $\mathbb{R}^2$  in due semi-piani  $\pi_+$  e  $\pi_-$  tali per cui si verifica una delle due seguenti alternative:
- a) se  $x(\bar{t}, x^0) \in \ell$ , allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $x(t', x^0) \in \pi_+$  per  $t' \in ]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$  e  $x(t'', x^0) \in \pi_-$  per  $t'' \in ]\bar{t} - \delta, \bar{t}[$ ;
- b) se  $x(\bar{t}, x^0) \in \ell$ , allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $x(t', x^0) \in \pi_-$  per  $t' \in ]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$  e  $x(t'', x^0) \in \pi_+$  per  $t'' \in ]\bar{t} - \delta, \bar{t}[$ .
- iii) Sia  $P_0 \in \ell$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\|P - P_0\| < \varepsilon$  si ha che  $x(t, P) \in \ell$  per un certo  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

**Dimostrazione.** Sia

$$a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2) = 0, \quad a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad (\text{IV.13})$$

l'equazione normale di una retta che passa per il punto  $\bar{x}$ . L'equazione parametrica di un segmento  $\ell$  presenta la seguente forma:

$$x_j(\tau) = \bar{x}_j + \nu_j \tau, \quad j = 1, 2, \quad -\delta' \leq \tau \leq \delta'', \quad \nu_1 = -a_2, \quad \nu_2 = a_1, \quad (\text{IV.14})$$

dove  $\delta', \delta'' > 0$ . Il segmento  $\ell$  è trasversale se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{pmatrix} = a_1 \varphi_2(x) - a_2 \varphi_1(x) = \nu_1 \varphi_1(x) + \nu_2 \varphi_2(x) \neq 0. \quad (\text{IV.15})$$

Se  $\nu_1 \varphi_2(\bar{x}) - \nu_2 \varphi_1(\bar{x}) \neq 0$ , dall'ipotesi di continuità segue che, per  $\delta'$  e  $\delta''$  abbastanza piccoli, vale la relazione (IV.15), e, dunque, la parte i) risulta provata.

Abbiamo definito il segmento trasversale  $\ell$ . Poniamo

$$\pi_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \pm(a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2)) > 0\}. \quad (\text{IV.16})$$

Supponiamo, per assurdo, che  $\ell$  sia trasversale ed esistano due punti  $P, Q \in \ell$  tali che le traiettorie  $\gamma(P)$  e  $\gamma(Q)$  intersecano  $\ell$  nelle direzioni opposte, cioè per un certo  $\delta > 0$  si ha

$$x(t, P) \in \pi_{\pm}, \quad 0 < \pm t < \delta, \quad (\text{IV.17a})$$

$$x(t, Q) \in \pi_{\pm}, \quad 0 < \pm t < \delta. \quad (\text{IV.17b})$$

Osserviamo che per (IV.16) si conclude che (IV.17) equivale a

$$\nu_1 \frac{x_1(t', P) - x_1(t'', P)}{t' - t''} + \nu_2 \frac{x_2(t', P) - x_2(t'', P)}{t' - t''} > 0, \quad (\text{IV.18a})$$

dove  $0 < t' < \delta$  e  $-\delta < t'' < 0$ ,

$$\nu_1 \frac{x_1(t', Q) - x_1(t'', Q)}{t' - t''} + \nu_2 \frac{x_2(t', Q) - x_2(t'', Q)}{t' - t''} < 0, \quad (\text{IV.18b})$$

dove  $0 < t' < \delta$  e  $-\delta < t'' < 0$ . Utilizzando il teorema di Lagrange, la continuità di  $\varphi(x)$ , il teorema della permanenza del segno e considerando che  $x(t, P)$  e  $x(t, Q)$  sono soluzioni di (IV.1), da (IV.18) otteniamo

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) \geq 0, \quad \nu_1 \varphi_1(Q) + \nu_2 \varphi_2(Q) \leq 0.$$

La definizione di trasversale implica

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) > 0, \quad \nu_1 \varphi_1(Q) + \nu_2 \varphi_2(Q) < 0. \quad (\text{IV.19})$$

Queste disuguaglianze ed il teorema per gli zeri di una funzione continua implicano l'esistenza di un punto  $R \in \ell$ , compreso tra  $P$  e  $Q$ , tale che  $\nu_1 \varphi_1(R) + \nu_2 \varphi_2(R) = 0$ . Questo è assurdo, perché  $\ell$  è trasversale. Dunque, anche la parte ii) è dimostrata.

Sia  $(\xi, \eta) \in \Omega$ . L'orbita definita da  $x(t, (\xi, \eta))$  interseca il segmento trasversale se e solo se l'equazione

$$H(t, \xi, \eta) = a_1(x_1(t, (\xi, \eta)) - \bar{x}_1) + a_2(x_2(t, (\xi, \eta)) - \bar{x}_2) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

ammette almeno una soluzione  $t = t(\xi, \eta)$ . Poichè abbiamo  $H(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$  e  $\partial_t H(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \nu_1 \varphi_1(\bar{x}) + \nu_2 \varphi_2(\bar{x}) \neq 0$ , l'applicazione del teorema sulle funzioni implicite permette di stabilire anche la parte iii). ■

**Lemma IV.8** *Sia  $A = \{x(t, \bar{x}) : \underline{t} \leq t \leq \bar{t}\}$  un arco chiuso di un'orbita  $\gamma(\bar{x})$  e sia  $\ell$  un segmento trasversale. Se  $A \cap \ell \neq \emptyset$ , allora  $A \cap \ell$  è un insieme finito e l'ordine dei punti dell'intersezione su  $A$  e su  $\ell$  è lo stesso. Più precisamente, se*

$$A \cap \ell = \{Q_1, \dots, Q_m\}, \quad (\text{IV.21})$$

dove

$$Q_k = x(\tau_k, \bar{x}), \quad k = 1, \dots, m, \quad \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m, \quad (\text{IV.22})$$

allora i vettori

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2}, \overrightarrow{Q_2 Q_3}, \dots, \overrightarrow{Q_{m-1} Q_m} \quad (\text{IV.23})$$

hanno la stessa direzione. Quindi, se l'orbita  $\gamma(\bar{x})$  è chiusa, allora essa non può intersecare  $\ell$  in più di un punto.

**Dimostrazione.** Supponiamo, per assurdo, che  $A \cap \ell$  sia un insieme infinito. Allora esiste una successione  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [\underline{t}, \bar{t}]$  tale che  $t_k \neq t_i$  per  $k \neq i$  e  $P_k = \varphi(t_k) \in \ell$ ,  $\varphi(t) = x(t, \bar{x})$ . Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, considerando una sottosuccessione di  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ , esiste  $\widehat{t} \in [\underline{t}, \bar{t}]$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \widehat{t}$ . Poichè  $\ell$  è chiuso,  $P = \varphi(\widehat{t}) \in \ell$ . Il vettore  $\varphi(\widehat{t})\varphi(t_k)$  è parallelo ad  $\ell$ . Più precisamente, dividendo per  $t_k - \widehat{t} \neq 0$ , si ha

$$\nu_1 \frac{\varphi_1(t_k) - \varphi_1(\widehat{t})}{t_k - \widehat{t}} + \nu_2 \frac{\varphi_2(t_k) - \varphi_2(\widehat{t})}{t_k - \widehat{t}} = 0, \quad (\text{IV.24})$$

per infiniti  $k \in \mathbb{R}$ . Dal fatto che  $\varphi(t)$  è soluzione di (IV.1) e dal teorema di Lagrange, segue che esistono dei  $\theta_k, \rho_k$  compresi tra  $t_k$  e  $\widehat{t}$  tali che

$$\nu_1 \varphi_{1*}(\varphi_1(\theta_k), \varphi_2(\rho_k)) + \nu_2 \varphi_{2*}(\varphi_1(\theta_k), \varphi_2(\rho_k)) = 0, \quad (\text{IV.25})$$

per infiniti  $k \in \mathbb{R}$ . Facendo tendere  $k$  ad infinito, si ottiene

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) = 0,$$

e quest'ultima equazione conduce a una contraddizione, giacché  $\ell$  è un segmento trasversale e  $P \in \ell$ .

Abbiamo dimostrato che  $A \cap \ell$  è un insieme finito e per  $m \in \mathbb{N}$  possiamo scrivere le relazioni (IV.21) e (IV.22). Senza perdita di generalità, con opportune traslazioni e rotazioni sul piano  $O_{x_1 x_2}$  e tenendo conto che nella relazione (IV.23) l'ordine è invariante rispetto alle traslazioni e rotazioni, possiamo supporre che per certi  $\bar{b} > \underline{b} > 0$ :

$$\ell = \{(0, x_2) : \underline{b} \leq x_2 \leq \bar{b}\}, \quad (\text{IV.26})$$

$$A \cap \ell = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}, \quad (\text{IV.27})$$

$$Q_j = (0, b_j) = \varphi(\tau_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad \tau_1 < \dots < \tau_m, \quad (\text{IV.28})$$

dove  $b_k \in [\underline{b}, \bar{b}]$  per  $k = 1, \dots, m$ . Per la simmetria rispetto all'origine e per il lemma precedente, possiamo supporre che le orbite intersechino  $\ell$  in verso antiorario, cioè

$$\varphi_1(P) = \varphi_1(0, x_2) < 0, \quad P = (0, x_2) \in \ell. \quad (\text{IV.29})$$

La relazione (IV.23) diventa

$$b_1 - b_2, \quad b_2 - b_3, \quad \dots, \quad b_{m-1} - b_m, \quad (\text{IV.30})$$

che presentano lo stesso segno.

Si possono avere due possibilità:

$\alpha)$   $b_1 > b_2$ ;

$\beta)$   $b_2 > b_1$ .

Consideriamo il primo caso. Indichiamo con  $J$  la curva regolare di Jordan formata dall'arco:

$$\widehat{Q_1 Q_2} = \{x(t, \bar{x}) : t_1 \leq t \leq t_2\},$$

e del segmento  $[Q_2 Q_1]$ . Per il teorema della curva di Jordan,  $J$  divide il piano  $\mathbb{R}^2$  in due componenti distinte, aventi entrambe  $J$  come frontiera, una delle quali è limitata e l'altra no. Cioè

$$\mathbb{R}^2 \setminus J = D_{int} \cup D_{ext}, \quad D_{int} \cap D_{ext} = \emptyset, \quad (\text{IV.31})$$

dove  $D_{int}$  è la componente interna limitata e  $D_{ext}$  è la componente esterna illimitata. Inoltre, risulta che per ogni curva di Jordan  $S$  si ha

$$S \cap D_{int} \neq \emptyset, \quad S \cap D_{ext} \neq \emptyset \Rightarrow S \cap J \neq \emptyset. \quad (\text{IV.32})$$

Dalla definizione di  $t_1$ , l'arco  $\{\varphi(t) : \underline{t} \leq t \leq t_1\}$  non interseca  $\ell$ . L'arco  $\{\varphi(t) : t_2 \leq t \leq \bar{t}\}$ , per l'unicità delle soluzioni di (IV.1), non può intersecare l'arco  $\widehat{Q_1 Q_2}$ . E non può intersecare il segmento  $[Q_2 Q_1]$  per il lemma precedente. Ci rimane un'unica possibilità: il punto  $Q_3$  deve essere contenuto in  $D_{int}$ , e, dunque,  $Q_2$  si trova tra  $Q_1$  e  $Q_3$ . Si procede di pari passo per  $m > 3$ , fino a quando si arriva alla conclusione (IV.23).

Se  $Q_1 = Q_2$ , l'orbita  $\gamma(\bar{x})$  e l'arco  $\widehat{A}$  sono chiusi. Se, per assurdo,  $\gamma(\bar{x})$  è chiusa e  $\gamma(\bar{x}) \cap \ell$  è costituita da almeno due punti, allora gli argomenti utilizzati per la dimostrazione della relazione (IV.23) mostrano che  $\gamma(\bar{x})$  non è chiusa, e questa è una contraddizione. ■

**Lemma IV.9** *Se  $\gamma^+ \cap L(\gamma^+) \neq \emptyset$ , allora  $\gamma^+$  è periodica e si ha*

$$\gamma^+ = L(\gamma^+).$$

**Dimostrazione.** Sia

$$P_1 = \varphi(t_1) \in \gamma^+ \cap L(\gamma^+), \quad t_1 > 0, \quad \varphi(t) = x(t, x^0). \quad (\text{IV.33})$$

Se  $P_1$  è un punto critico, vale  $\gamma^+ = L(\gamma^+) = \{P_1\}$ .

Supponiamo che  $P_1$  sia regolare. Per il lemma IV.7, esiste un segmento trasversale  $\ell$  tale che  $P_1 \in \ell$ . Poichè  $P_1 \in L(\gamma^+)$ , dalla definizione di  $L(\gamma^+)$  segue che per ogni  $\delta > 0$  esiste  $\hat{t}$  tale che

$$Q = \varphi(\hat{t}) \in B_\delta(P_1), \quad \hat{t} > t_1 + 2. \quad (\text{IV.34})$$

Fissiamo  $Q$ . Sia  $\varepsilon \in ]0, 1[$  e si prenda  $\delta$  tale che venga rispettata la parte iii) del lemma IV.7, in modo che

$$\tilde{P} = \varphi(\tilde{t}) = x(\tilde{t} - \hat{t}, \varphi(\hat{t})) = x(\tilde{t} - \hat{t}, Q) \in \ell \cap \gamma^+ \cap B_\delta(P_1), \quad (\text{IV.35})$$

dove  $|\tilde{t} - \hat{t}| < \varepsilon < 1$ .

Supponiamo che  $\tilde{P} \neq P_1$ . Allora l'arco  $\widehat{P_1\tilde{P}}$ , per il lemma precedente, interseca  $\ell$  in un numero finito di punti, più precisamente, i punti successivi di possibili intersezioni con  $\varphi(t)$ , dove  $t > \max\{\tilde{t}, \hat{t}\}$ . Di conseguenza, possiamo trovare un numero positivo  $\mu$  tale che

$$\|\varphi(t) - P_1\| \geq \mu, \quad t > \max\{\tilde{t}, \hat{t}\}. \quad (\text{IV.36})$$

Questo, però, porta ad un assurdo, perché  $P_1 \in L(\gamma^+)$ . Quindi,  $\tilde{P} = P_1$  e  $\gamma$  è periodica. ■

Gli argomenti utilizzati nella dimostrazione precedente mostrano che se  $\ell$  è un segmento trasversale ed  $\ell \cap L(\gamma^+) \neq \emptyset$ , allora  $\ell \cap L(\gamma^+)$  contiene un solo punto.

**Lemma IV.10** *Se  $L(\gamma^+)$  contiene un'orbita periodica  $C$ , allora  $C = L(\gamma^+)$ .*

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $L(\gamma^+) \setminus C \neq \emptyset$ . Poichè  $L(\gamma^+)$  è connesso e compatto,  $L(\gamma^+) \setminus C$  non è un insieme chiuso, il che implica l'esistenza di un punto  $Q_0 \in C$ , che è un punto di accumulazione per  $L(\gamma^+) \setminus C$ . Sia  $\ell$  un segmento trasversale tale che  $Q_0 \in \ell$ . Ricordando la parte iii) del lemma IV.7, possiamo trovare un  $\delta > 0$ ,  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  e un punto

$$Q \in B_\delta(Q_0) \cap (L(\gamma^+) \setminus C),$$

tale che

$$\bar{Q} = x(\bar{t}, Q) \in \ell. \quad (\text{IV.37})$$

Poichè  $Q \in L(\gamma^+)$ , dall'invarianza di  $L(\gamma^+)$  segue che l'orbita  $\gamma(Q)$  è data da

$$\gamma(Q) = \{x(t, Q) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Dalla relazione (IV.33) si deduce che  $\bar{Q} \in L(\gamma^+)$ . L'unicità delle soluzioni di (IV.1) e il fatto che  $Q \notin C$  comportano

$$\gamma(Q) \cap C = \emptyset$$

e, in particolare,  $\bar{Q} \neq Q_0$ , e questo è assurdo. Quindi, deve essere  $C = L(\gamma^+)$ . ■

Torniamo ora alla dimostrazione del **Teorema di Poincaré-Bendixson**.

**Dimostrazione.** Se  $\gamma^+$  è periodica, lo è anche  $L(\gamma^+)$ . Supponiamo che  $\gamma^+$  non sia periodica. Per la limitatezza di  $\gamma^+$  e per il primo teorema IV.4 segue che  $L(\gamma^+) \neq \emptyset$ . Sappiamo, inoltre, che  $L(\gamma^+)$  è compatto e, per ipotesi, che tutti i suoi punti sono regolari. Fissiamo  $q_0 \in L(\gamma^+)$  e poniamo

$$\gamma_0 = \{x(t, Q) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{IV.38})$$

Dall'invarianza di  $L(\gamma^+)$  segue che  $\gamma_0 \subset L(\gamma^+)$ . Fissiamo  $P_0 \in L(\gamma_0^+)$ . Sia  $\ell$  un segmento trasversale passante per  $P_0$ . L'inclusione  $L(\gamma_0^+) \subset L(\gamma^+)$  comporta

$$\ell \cap L(\gamma^+) = \{P_0\}. \quad (\text{IV.39})$$

D'altra parte, poichè  $P_0 \in L(\gamma_0^+)$ , la parte iii) del lemma IV.7 implica che  $\gamma_0^+ \cap \ell \neq \emptyset$ . Quindi, tenendo conto che  $\gamma_0^+ \subset L(\gamma^+)$  e la relazione (IV.39) si conclude che  $\gamma_0^+ \cap \ell = \{P_0\}$ . Per il Lemma IV.9 e poichè  $P_0 \in \gamma_0^+ \cap L(\gamma_0^+)$ ,  $\gamma_0^+$  (e quindi  $\gamma_0$ ) è periodica.

Essendo  $\gamma_0 = L(\gamma_0^+)$  e usando il lemma IV.10, si conclude che  $\gamma_0 = L(\gamma^+)$ . ■

## 2 Applicazioni ai sistemi non lineari

**1. Biforcazione di Hopf.** Allo studio degli stati di equilibrio è applicabile la teoria di Henri Poincaré [1854-1912] sulla riorganizzazione delle curve in caso di biforcazioni per famiglie generiche di sistemi ad un parametro<sup>4</sup> Quando il parametro del sistema si avvicina ad un valore di biforcazione, uno stato di equilibrio muore, combinandosi in un altro, o viceversa. Tra i due stati che nascono o muoiono insieme, uno è stabile e l'altro è instabile. Al momento del cambiamento, entrambi gli stati di equilibrio si muovono con velocità infinita. Quindi, dato uno stato di equilibrio stabile rappresentante le condizioni di qualche sistema reale (di economia, ecologia, fisica, ecc.), se questo si incontra e collide con uno stato di equilibrio instabile, si trasforma in uno stato del tutto diverso. Al variare del parametro, la condizione di equilibrio, nell'intorno considerato, scompare improvvisamente. La perdita di stabilità di uno stato di equilibrio di un sistema, al variare di un parametro, può avvenire nei due seguenti modi:

- a) al variare del parametro, lo stato di equilibrio genera un ciclo limite (cioè, un'orbita chiusa ed isolata sulla quale, almeno localmente, le altre traiettorie si avvolgono a spirale), ed il punto di equilibrio diventa instabile.

---

<sup>4</sup>Per un numero maggiore di parametri compaiono singolarità più complesse (singolarità di Whitney).

- b) Un ciclo limite instabile collassa in uno stato di equilibrio: il dominio di attrazione si riduce a zero insieme con il ciclo, che, infine, scompare, trasferendo la sua instabilità allo stato di equilibrio.

Nel primo caso, dopo la perdita di stabilità, si ha un fenomeno oscillatorio periodico e l'ampiezza di oscillazione è proporzionale alla radice quadrata della criticità, cioè la differenza tra il valore del parametro e il valore critico in cui l'equilibrio perde la stabilità. Poiché questo comportamento oscillatorio differisce di poco dallo stato di equilibrio, la perdita di stabilità è detta *soffice*. Nel secondo caso, invece, la perdita di stabilità è detta *dura*, perché, prima che si verifichi, il dominio di attrazione diventa piccolo e le perturbazioni generatesi tendono a portar via il sistema da questo dominio, ancor prima che il dominio stesso sia sparito.

Le nuove condizioni rappresentanti il sistema, dopo la perdita di stabilità prendono il nome di *attrattori*, dal momento che diventano dei centri di attrazione per stati iniziali temporanei. Nei lavori della teoria delle catastrofi e delle singolarità, le graduali perdite di stabilità sono chiamate biforcazioni di Hopf, di cui mostriamo un'applicazione qui di seguito.

Determiniamo il ritratto delle fasi del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(a - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = -x + y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ . Troviamo il punto critico del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y + x(a - x^2 - y^2) = 0, \\ -x + y(a - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = -x(a - x^2 - y^2), \\ -x - x(a - x^2 - y^2)^2 = 0 \end{cases}$$

e, dunque,  $(0, 0)$  è l'unico punto critico del sistema.

Passando alle coordinate polari in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(a - \rho^2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

Una traiettoria particolare è data da  $\rho = 0$ , che rappresenta l'origine. Se  $\rho = \sqrt{a}$ , dove  $a > 0$ , essa rappresenta la circonferenza con centro nell'origine e raggio  $\sqrt{a}$ .

Le soluzioni del sistema sono

$$\bullet \quad a < 0 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{-a}(c_1 e^{-2at} - 1)^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta = -t + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $a = 0 \quad \begin{cases} \rho = (2t + c_1)^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta = -t + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
- $a > 0 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{a}(1 + c_1 e^{-2at})^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta = -t + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Studiamo ora la stabilità. La matrice jacobiana del sistema (IV.40) è

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = a^2 + 1, \quad \text{Tr } A = 2a, \quad \Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det(A) = -4 < 0.$$

Risulta, pertanto, che se  $a < 0$ , l'origine è un fuoco stabile, con bacino di attrazione  $\mathbb{R}^2$ . Se  $a = 0$ , l'origine è un centro, che, degenerando nella spirale del fuoco instabile al crescere di  $a$ , diventa un ciclo limite. Se  $a > 0$ ,  $(0, 0)$  è un fuoco instabile. Le orbite delle soluzioni sono delle spirali che per  $t \rightarrow +\infty$ , tendono indefinitamente alla circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = a$ .

Più generalmente, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon x f(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y f(x^2 + y^2), \end{cases}$$

dove  $f \in C^k([0, +\infty[; \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$ ,  $f(0) = a$  ed  $\varepsilon$  è un piccolo parametro reale. È facile verificare che l'unico punto critico del sistema risulta essere l'origine  $(0, 0)$ . Passando alle coordinate polari in  $\mathbb{R}^2$ , otteniamo

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho f(\rho^2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

Poniamo

$$N_f = \{z : z \geq 0, z f(z) = 0\}.$$

Dunque, se  $z \in N_f$  e  $z > 0$  allora il sistema precedente ammette una soluzione periodica, cioè un ciclo definito dalla relazione  $\rho^2 = x^2 + y^2 = z$ , ovvero la circonferenza con centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{z}$  se  $\varepsilon \neq 0$ , giacché  $\varepsilon = 0$  rappresenta il valore di biforcazione.

Supponiamo che  $N_f$  sia finito, cioè

$$N_f = \{z_0, z_1, \dots, z_N\}, \quad 0 = z_0 < \dots < z_N,$$

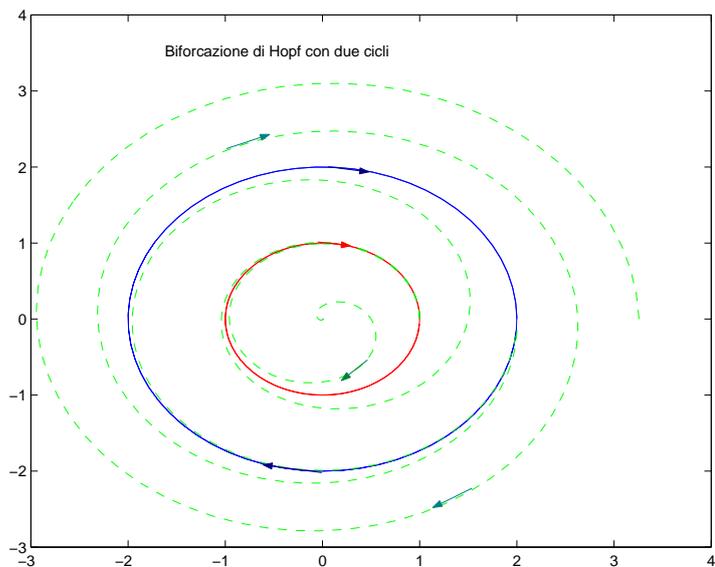


Figura IV.2: Biforcazione di Hopf con due cicli.

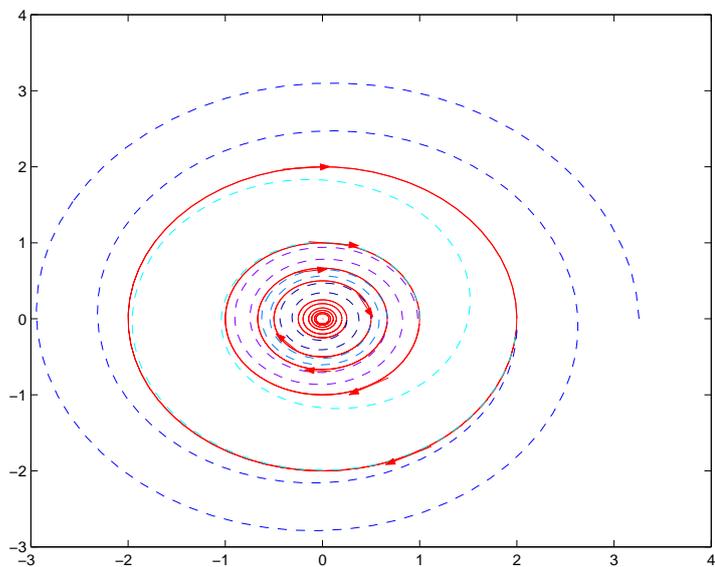


Figura IV.3: Cicli che si stringono intorno all'origine.

per un certo numero naturale  $N$ . In tal caso il sistema ammette esattamente  $N$  cicli definiti dalle circonferenze  $\rho^2 = x^2 + y^2 = z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Se  $N = 0$  non esistono cicli. Il ritratto delle fasi dipende dal segno di  $\varepsilon$  e di  $f(z)$  negli intervalli  $(z_j, z_{j+1})$ , dove  $j = 0, \dots, N - 1$ , se  $N \geq 1$ .

**2. Equazione di Van der Pol.** Consideriamo l'equazione

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \quad (\varepsilon > 0), \quad (\text{IV.41})$$

che può essere pensata come perturbazione dell'oscillatore armonico  $\ddot{y} + y = 0$ , mediante il termine  $\varepsilon(y^2 - 1)$ . Considerando l'energia

$$E(y, \dot{y}) = \frac{(\dot{y})^2 + y^2}{2},$$

si vede che

$$\frac{d}{dt}E(y(t), \dot{y}(t)) = \dot{y}\ddot{y} + y\dot{y} = \dot{y}[\varepsilon(1 - y^2)\dot{y} - y] + y\dot{y} = \varepsilon(1 - y^2)(\dot{y})^2. \quad (\text{IV.42})$$

Quest'ultima espressione mostra come il sistema dissipi energia quando  $|y| > 1$ , mentre fornisce energia quando  $|y| < 1$ .

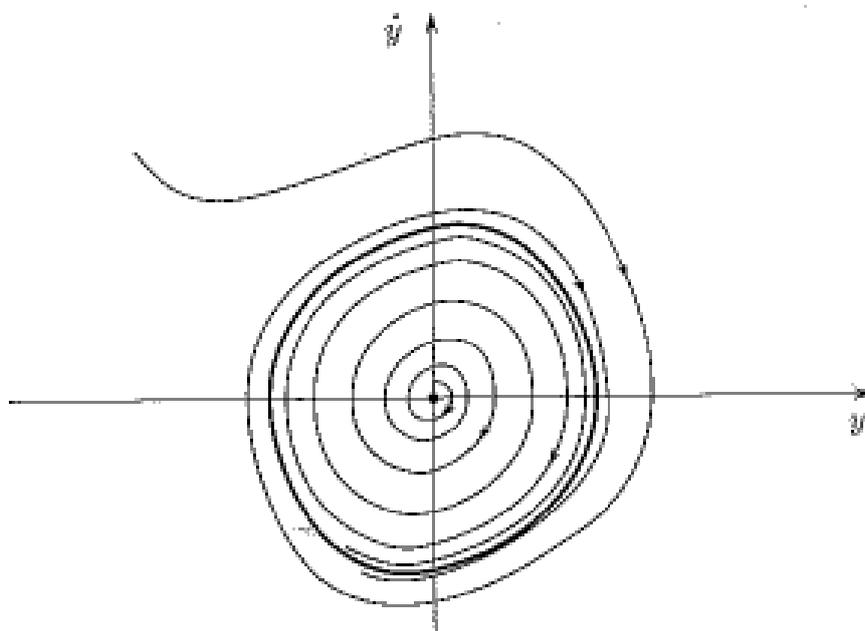


Figura IV.4: Orbite nel piano delle fasi per l'equazione di Van der Pol (Balthasar van der Pol [1889-1959]) con  $\varepsilon = 2$ . La linea spessa indica l'unica orbita chiusa [21, 6].

Seguendo un suggerimento di Liénard [1869-1958], il sistema (IV.41) diventa

$$\begin{cases} \dot{y} = z - \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y), \\ \dot{z} = -y. \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

La corrispondenza  $(y, \dot{y}) \leftrightarrow (y, z)$  tra i punti dei due piani è biunivoca e regolare, cosicché punti di equilibrio ed orbite si corrispondono nei due piani. Il punto di equilibrio è  $(0, 0)$ . Provando a linearizzare, otteniamo

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon y + z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

Al precedente sistema è associata la matrice  $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Poiché  $\text{Tr } A = \varepsilon > 0$ ,  $\det(A) = 1 > 0$ ,  $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det(A) < 0$ , per  $\varepsilon \in (0, 2)$  l'origine è un fuoco instabile e le orbite che partono da un suo intorno si allontanano da essa muovendosi su una spirale.

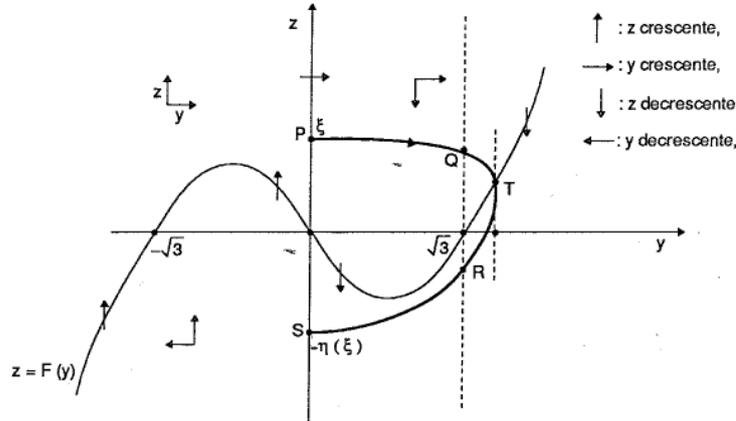


Figura IV.5: Dimostrazione dell'esistenza di una soluzione periodica dell'equazione di Van der Pol [21].

Dimostriamo ora che esiste un unico ciclo stabile, ossia che ogni traiettoria diversa da  $(0, 0)$  tende, per  $t \rightarrow +\infty$ , ad avvolgersi su di esso. Consideriamo il campo vettoriale associato al sistema (IV.44):

$$[z - F(y)]\mathbf{i} - y\mathbf{j} \quad (F(y) = \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y)).$$

L'equazione differenziale della famiglia di traiettorie è data da

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z - F(y)}. \quad (\text{IV.45})$$

La sostituzione  $z \rightarrow -z$  e  $y \rightarrow -y$  lascia invariata l'equazione (IV.45), essendo la funzione  $F(y)$  dispari. Facendo partire l'orbita da un punto  $P = (0, \xi)$ , dopo un tempo finito essa interseca la cubica  $z = F(y)$  in un punto  $T$ . Mentre la variabile  $y$  decresce, l'orbita interseca l'asse  $z$  in un punto  $S = (0, -\eta(\xi))$ , dove  $\eta(\xi) > 0$ .

Ora, se esiste  $\xi > 0$  tale che  $\eta(\xi) = \xi$ , allora si ottiene simmetricamente rispetto all'origine un'altra orbita che si salda con la precedente, dando luogo ad una nuova orbita chiusa. Poichè tutte le orbite chiuse si avvolgono intorno all'origine, i punti fissi dell'applicazione  $\xi \rightarrow \eta(\xi)$  sono in corrispondenza biunivoca con le orbite chiuse.

Dimostriamo l'unicità di questi punti fissi. Consideriamo la funzione di Liapunov  $V(y, z) = y^2 + z^2$  e chiamiamo  $\gamma_\xi$  il tratto di orbita compreso tra  $(0, \xi)$  e  $(0, -\eta(\xi))$ , e  $\tau$  il relativo tempo di percorrenza. Abbiamo

$$\begin{aligned} \delta(\xi) = \eta(\xi)^2 - \xi^2 &= \int_0^\tau \frac{dV}{dt} dt = 2 \int_0^\tau (y\dot{y} + z\dot{z}) dt = \\ &= -2 \int_0^\tau yF(y) dt. \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

Proviamo le seguenti proprietà:

- i)  $\delta(\xi) > 0$  nei punti vicino l'origine;
- ii)  $\delta(\xi)$  è strettamente decrescente;
- iii)  $\delta(\xi) \rightarrow -\infty$  per  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Il verificarsi di queste proprietà ci assicura l'esistenza di un unico punto  $\bar{\xi}$  tale che  $\delta(\bar{\xi}) = 0$ , cioè  $\bar{\xi} = \eta(\bar{\xi})$ . **Dimostriamo ora i)-iii).**

- i) Se  $\xi$  è nelle vicinanze dell'origine, il punto  $T$  si trova nel tratto in cui  $y > 0$  e la funzione  $z = F(y)$  è negativa. Dalla (IV.46) segue che  $\delta(\xi) > 0$ .
- ii) Usando l'espressione (IV.45), possiamo scrivere

$$F(y)dz = -\frac{yF(y)}{z - F(y)} dy. \quad (\text{IV.47})$$

Inoltre:

$$\int_{\gamma_\xi} F(y)dz = \int_{\widehat{PQ}} \dots + \int_{\widehat{QR}} \dots + \int_{\widehat{RS}} \dots \quad (\text{IV.48})$$

Al crescere di  $\xi$ ,  $\widehat{PQ}$  aumenta di quota, mentre  $\widehat{RS}$  si abbassa. Cioè  $z - F(y)$  aumenta in modulo in questi tratti, mentre  $yF(y)$  **resta negativo**. Poiché  $F(y)dz > 0$ , **il contributo di  $\widehat{PQ}$  e  $\widehat{RS}$**  all'espressione (IV.48) deve diminuire. Sul tratto  $\widehat{QR}$ ,  $F$  è positiva e strettamente crescente e  $dz < 0$ . Dunque, al crescere di  $\xi$ , l'integrale  $\int_{\widehat{QR}} F(y)dz$  diminuisce.

iii) Consideriamo il tratto di orbita  $\widehat{QR}$ . Sia  $N$  il punto di intersezione del tratto con l'asse  $y$ . Allora

$$\int_{\widehat{QR}} F(y) dz = - \int_{\widehat{NQ}} F(y) dz + \int_{\widehat{NR}} F(y) dz. \quad (\text{IV.49})$$

Il secondo integrale nella parte a destra di (IV.49) è negativo, poichè  $F(y) \geq 0$  e l'integrazione è diretta verso valori negativi di  $z$ . Quindi

$$\int_{\widehat{QR}} F(y) dz \leq \int_{\widehat{NR}} F(y) dz.$$

Poiché la lunghezza del tratto  $\widehat{NQ}$  tende a  $+\infty$  se  $\xi \rightarrow +\infty$ , si ha  $\int_{\widehat{QR}} F(y) dz \rightarrow -\infty$  se  $\xi \rightarrow +\infty$ .

**3. Modello logistico.** Partiamo dalla seguente equazione alle derivate parziali, nota come *equazione di Burgers*:

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \quad (\text{IV.50})$$

Ponendo  $u(x, t) = v(x + ct)$ , dove  $c > 0$ , si ottiene

$$cv' = v'' + vv',$$

che possiamo scrivere anche nel seguente modo:

$$(cv)' = (v' + \frac{v^2}{2})'.$$

Da quest'ultima equazione si ottiene

$$cv = v' + \frac{v^2}{2},$$

ossia

$$v' = cv(1 - \frac{v}{2c}).$$

La soluzione del corrispondente problema di Cauchy è la seguente:

$$v(t) = \frac{2cv(0)}{[1 - e^{-4c^3t}]v(0) + 2ce^{-4c^3t}}.$$

e le due soluzioni costanti  $v = 0$  e  $v = 2c$ . Si vede subito che  $v(t) \rightarrow 2c$  per  $v(0) \neq 0$ . Quindi il punto di equilibrio  $2c$  è asintoticamente stabile e quello  $v = 0$  è instabile.

In modo analogo discutiamo l'equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo

$$\dot{y} = ay(1 - by), \quad a, b > 0. \quad (\text{IV.51})$$

Le rette  $y = 0$  e  $y = (1/b)$  sono le due soluzioni costanti. Le altre soluzioni si trovano integrando nel seguente modo:

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a dt \rightsquigarrow \log \left| \frac{y}{1 - by} \right| = at + c,$$

ossia

$$y(t) = \frac{y(0)}{by(0) + [1 - by(0)]e^{-at}}.$$

Questa espressione è la soluzione del modello logistico proposto nel 1845 dal matematico Pierre Verhulst (1804-1849). Lo scopo di questo modello è la determinazione del tasso di crescita relativo della popolazione, nell'ipotesi in cui gli unici fattori di evoluzione siano la fertilità e la mortalità. Siano, dunque,  $N(t)$  il numero di individui presenti all'istante  $t$ ;  $\lambda$  il numero di neonati per individuo nell'unità di tempo;  $\mu$  la percentuale di individui che muore nell'unità di tempo. Indichiamo, inoltre, con  $\varepsilon = \lambda - \mu$  il potenziale biologico della popolazione e con  $k$  le risorse dell'ambiente. La legge di evoluzione di Verhulst è data dall'equazione (IV.51), in cui si pone  $a = \varepsilon$ ,  $b = (1/k)$  e  $y = N$ , cioè

$$N'(t) = \varepsilon N(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{k} \right), \quad \varepsilon, k > 0. \quad (\text{IV.52})$$

Il termine  $\varepsilon N(t)$ , che modella la crescita esponenziale della popolazione [secondo la legge di Malthus (1798)], è mitigato dal termine  $-\frac{\varepsilon}{k} N(t)^2$ , che descrive la competizione all'interno della popolazione. La soluzione è, dunque, data da

$$N(t) = \frac{kN(0)}{N(0)[1 - e^{-\varepsilon t}] + ke^{-\varepsilon t}}. \quad (\text{IV.53})$$

Per  $t \rightarrow +\infty$ ,  $N(t) \rightarrow k$ , tranne nel caso  $N(0) = 0$ .

#### 4. Oscillatore di Lorenz. Consideriamo il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = \sigma(y - x), \quad (\text{IV.54a})$$

$$\dot{y}(t) = x(\rho - z) - y, \quad (\text{IV.54b})$$

$$\dot{z}(t) = xy - \beta z, \quad (\text{IV.54c})$$

dove  $\sigma > 0$  si dice numero di Prandtl,  $\rho > 0$  si dice numero di Rayleigh e  $\beta > 0$  è una terza costante fisica positiva. L'oscillatore di Lorenz [27, Cap. 14] è un sistema dinamico di flusso caotico. Tale sistema fu proposto da Edward Lorenz

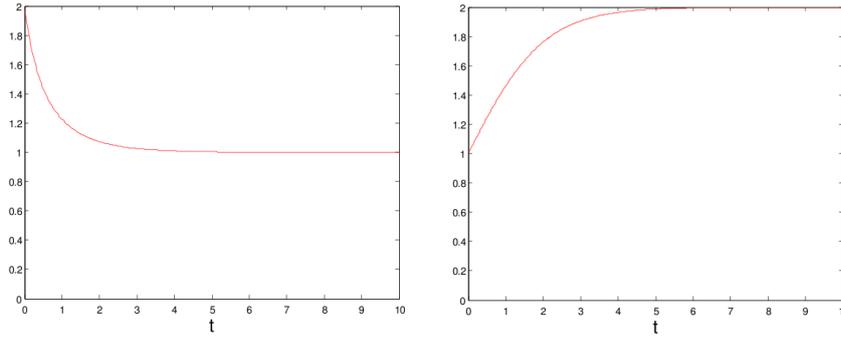


Figura IV.6: Le soluzioni  $N(t)$  del modello di Verhulst per  $N(0) = 2$ ,  $k = 1$  e  $\varepsilon = 1$  [grafico sinistro] e per  $N(0) = 1$ ,  $k = 2$  e  $\varepsilon = 1$  [grafico destro].

nel 1963, semplificando le equazioni di Boussinesq che descrivono le convezioni nell'atmosfera sotto condizioni di riscaldamento da sotto e raffreddamento da sopra.

L'oscillatore di Lorenz ha alcune proprietà elementari:

- Se  $(-x, -y, z)$  è soluzione, lo è anche  $(x, y, z)$ .
- Per  $x = y = 0$  le equazioni (IV.54a) e (IV.54b) diventano tautologie ( $0 = 0$ ), mentre  $\dot{z}(t) = -\beta z$ . Quindi  $x = y = 0$  e  $z(t) = z(0)e^{-\beta t}$  è soluzione delle (IV.54).
- Vale la seguente disuguaglianza:

$$\nabla \cdot (\sigma[y - x], x[\rho - z] - y, xy - \beta z) = -(\sigma + 1 + \beta) < 0.$$

Dunque, considerando un volume iniziale  $v(0)$  che evolve nel tempo, all'istante  $t$  il volume  $v(t)$  è descritto dalla seguente legge:

$$\dot{v}(t) = -(\sigma + 1 + \beta)v(t). \quad (\text{IV.55})$$

In altre parole, il volume  $v(t)$  è decrescente nel tempo  $t$  e quindi il flusso descritto dalle (IV.54) è dissipativo. La (IV.55) implica che qualunque attrattore del sistema dinamico (IV.54) ha volume zero.

Calcoliamo ora i punti di equilibrio  $(X, Y, Z)$  per cui  $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = \dot{z}(t) = 0$ . In tal caso  $X = Y$ . Quindi  $X = Y = Z = 0$  oppure  $Z = \rho - 1$  e  $X^2 = Y^2 = \beta(\rho - 1)$ . In altre parole, per  $0 < \rho \leq 1$  il punto  $(0, 0, 0)$  è l'unico punto di equilibrio. Per  $\rho > 1$  abbiamo inoltre i due punti  $(\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ . La matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

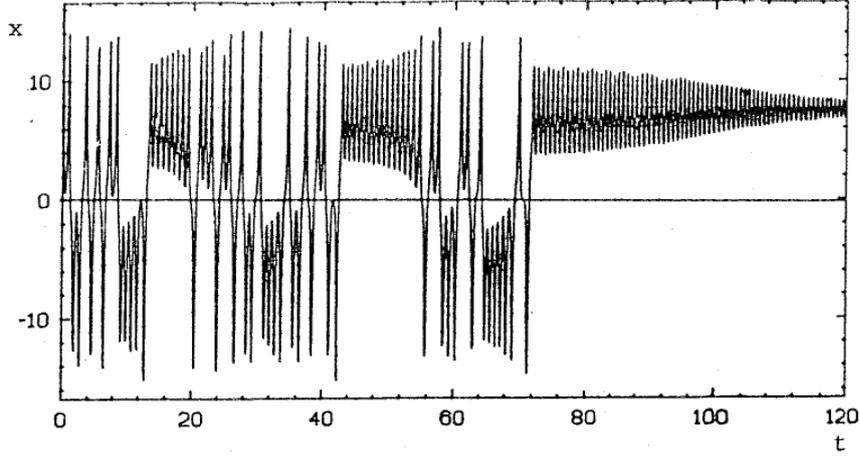


Figura IV.7:  $x(t)$  per  $\sigma = 10$ ,  $\beta = (8/3)$  e  $\rho = 22.4$ . Osserviamo che  $1 < \rho < \rho_H \approx 24.74$  e  $x(t) \rightarrow \sqrt{\beta(\rho - 1)} \approx 7.55$  (Vedi [27, Fig. 14.2]).

ha tre autovalori negativi per  $x = y = z = 0$  se  $0 < \rho < 1$ . Di conseguenza, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile delle (IV.54) se  $0 < \rho < 1$ . Per  $\rho = 1$  gli autovalori sono  $-\beta$ ,  $-(\sigma + 1)$  e 0 e quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile se  $\rho = 1$ . Per  $\rho > 1$  la matrice Jacobiana per  $x = y = z = 0$  ha due autovalori negativi e uno positivo, e quindi l'origine è un punto di equilibrio instabile se  $\rho > 1$ .

Negli altri due punti di equilibrio il polinomio caratteristico della matrice Jacobiana ha la forma

$$p(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^3 + (\sigma + 1 + \beta)z^2 + \beta(\sigma + \rho)z + 2\sigma\beta(\rho - 1).$$

Fattorizzando il polinomio,  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ , si scopre che

$$z_1 + z_2 + z_3 = -(\sigma + 1 + \beta) < 0, \quad (\text{IV.56a})$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \beta(\sigma + \rho) > 0, \quad (\text{IV.56b})$$

$$z_1z_2z_3 = -2\sigma\beta(\rho - 1), \quad (\text{IV.56c})$$

quest'ultimo se  $\rho > 1$ . Inoltre,  $p(z) > 0$  per  $z \geq 0$ ; di conseguenza, se ci sono zeri con parte reale non negativa, essi devono per forza essere due complessi coniugati più uno zero negativo. Se, per un opportuno  $\rho = \rho_H > 1$ , due degli zeri sono uguali a  $z_{1,2} = \pm i\omega$  con  $\omega > 0$ , allora il terzo zero deve valere  $z_3 = -(\sigma + 1 + \beta)$ , poichè la loro somma vale  $-(\sigma + 1 + \beta)$  [vedi la (IV.56a)]. Dalle (IV.56a)-(IV.56b) segue in tal caso

$$z_1z_2 = \omega^2 = \frac{2\sigma\beta(\rho_H - 1)}{\sigma + 1 + \beta} = \beta(\sigma + \rho_H),$$

e quindi  $\rho_H = [\sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)]$ . Di conseguenza, per  $\rho = \rho_H$  c'è una biforcazione di Hopf. Per  $\rho = 1$  gli zeri sono  $\{0, -\beta, -(\sigma+1)\}$ , mentre al crescere di  $\rho$  gli zeri si cambiano in modo continuo e hanno un prodotto  $z_1 z_2 z_3 < 0$ . Ciò implica che per

$$1 < \rho < \rho_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1},$$

tutti e tre zeri del polinomio hanno parte reale negativa e quindi i due punti di equilibrio sono ambedue asintoticamente stabili. Per  $\rho > \rho_H$  il polinomio ha un autovalore negativo e due autovalori con parti reali positivi; in tal caso i due punti di equilibrio sono instabili.<sup>5</sup> Infatti, dividendo il polinomio per  $\rho^3$  si ottiene

$$w^3 + \underbrace{\frac{\sigma + 1 + \beta}{\rho}}_{\rightarrow 0, \rho \rightarrow +\infty} w^2 + \underbrace{\frac{\beta(\sigma + \rho)}{\rho^2}}_{\rightarrow 0, \rho \rightarrow +\infty} w + \underbrace{2\sigma\beta \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)}_{\rightarrow 2\sigma\beta, \rho \rightarrow +\infty},$$

dove  $w = (z/\rho)$ . Quindi per  $\rho \rightarrow +\infty$  gli zeri di  $p(z)$  si comportano asintoticamente come

$$-\rho \sqrt[3]{2\sigma\beta} < 0, \quad \sqrt[3]{2\sigma\beta}\rho \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right\},$$

cioè per  $\rho$  abbastanza grande ci sono due zeri complessi coniugati con parte reale positiva e uno zero negativo. Siccome, al crescere di  $\rho$ , gli zeri possono attraversare l'asse immaginario soltanto per  $\rho = \rho_H$ , segue che per  $\rho > \rho_H$  ci sono due zeri complessi coniugati con parte reale positiva e uno zero negativo.

Consideriamo ora la funzione di Liapunov

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2} (\rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2). \quad (\text{IV.57})$$

In tal caso

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= \rho x \dot{x} + \sigma y \dot{y} + \sigma(z - 2\rho) \dot{z} \\ &= \rho x [\sigma(y - x)] + \sigma y [x(\rho - z) - y] + \sigma(z - 2\rho) [xy - \beta z] \\ &= -\sigma \{ \rho x^2 + y^2 + \beta(z - \rho)^2 - \beta\rho^2 \} \\ &= -\sigma\beta\rho^2 \left\{ \left( \frac{x}{\sqrt{\rho\beta}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\rho\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left( \frac{z - \rho}{\rho} \right)^2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sia  $m$  il massimo della funzione di Liapunov  $H$  nell'ellissoide

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \frac{x}{\sqrt{\rho\beta}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\rho\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left( \frac{z - \rho}{\rho} \right)^2 \leq 1 \right\} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dot{H}(t) \geq 0 \}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Quest'ultimo fatto si può dimostrare usando il Teorema di Routh-Hurwicz [13, Sec. XV.6].

Un tale massimo viene assunto sulla frontiera  $\partial E$ .<sup>6</sup> Partendo dal punto iniziale  $\vec{x}(0)$  con  $H(\vec{x}(0)) > m$  [cioè,  $\vec{x}(0) \notin E$ ], il valore della  $H$  deve scendere lungo l'orbita. Ad un opportuno istante  $t_0 > 0$  l'orbita attraversa la frontiera dell'ellissoide  $E$  e da quel momento in poi l'orbita ci resta dentro. In altre parole, il flusso ha un attrattore (di volume zero) che si trova all'interno dell'ellissoide  $E$  (ma può avere una struttura estremamente complicata).

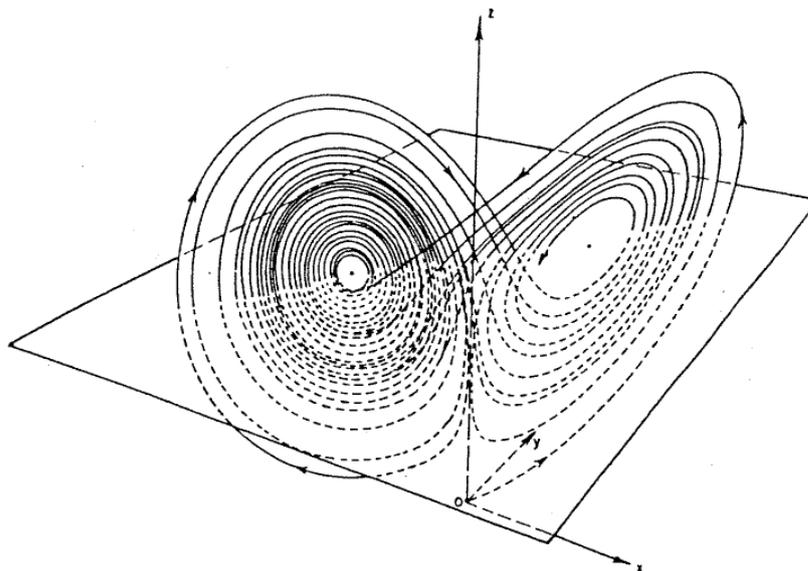


Figura IV.8:  $\vec{x}(t)$  per  $\sigma = 10$ ,  $\beta = (8/3)$  e  $\rho = 28$ . Osserviamo che  $\rho > \rho_H \approx 24.74$  e che  $\vec{x}(t)$  si comporta in modo caotico (Vedi [27, Fig. 14.1]). La stessa figura, a colore, si trova in Wikipedia (inglese) sotto la voce Lorenz attractor.

---

<sup>6</sup>Nell'unico punto in  $\mathbb{R}^3$  in cui si annulla il gradiente della  $H$ , cioè in  $(0, 0, 2\rho)$ , la matrice Hessiana ha tre autovalori positivi. Quindi quel punto critico è il minimo assoluto della  $H$  in  $E$ . Per esercizio si verifichi che il minimo assunto nell'origine è  $m = 2\sigma\rho^2$ .

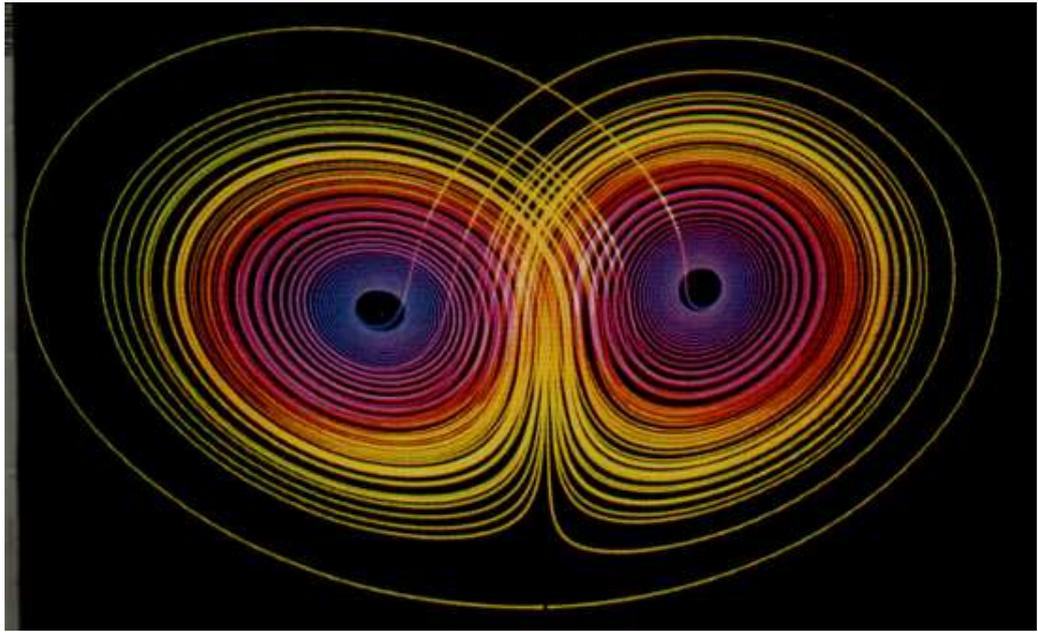


Figura IV.9: L'attrattore di Lorenz [14].



# Capitolo V

## Frattali

### 1 Insieme di Cantor e le sue varianti

Il frattale prototipico è l'*insieme di Cantor*.<sup>1</sup> Questo sottoinsieme dell'intervallo  $[0, 1]$  viene costruito nel seguente modo:

$$\begin{aligned}K_0 &= [0, 1], \\K_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \\K_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \\K_3 &= [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1],\end{aligned}$$

ecc. Quindi  $K_n$  è l'unione disgiunta di  $2^n$  sottointervalli di  $[0, 1]$ , tutti di lunghezza  $(\frac{1}{3})^n$ . Dunque la misura di  $K_n$  vale  $(\frac{2}{3})^n$ . Se  $K_n$  è l'unione degli intervalli  $[a_j, b_j]$ , allora  $K_{n+1}$  è l'unione degli intervalli

$$[a_j, \frac{2}{3}a_j + \frac{1}{3}b_j] \cup [\frac{1}{3}a_j + \frac{2}{3}b_j, b_j].$$

In altre parole, da ogni intervallo costituente di  $K_n$  si rimuove esattamente la sua terza parte centrata per ottenere due intervalli costituenti di  $K_{n+1}$ . È chiaro che

$$[0, 1] = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots,$$

cioè gli insiemi  $K_n$  costituiscono una successione decrescente. La sua intersezione,  $K$ , non è vuota (poichè contiene gli estremi di tutti i sottointervalli costituenti di tutti i  $K_n$ ) e si chiama l'insieme di Cantor. Ovviamente, la misura di  $K$  è minore o uguale a  $(\frac{2}{3})^n$  per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$ , quindi l'insieme di Cantor ha misura uguale a zero.

---

<sup>1</sup>Publicato da Georg Cantor [1845–1918] nel 1883. Scoperto prima da Henry John Stephen Smith [1826–1883] nel 1874.

Ogni numero in  $[0, 1]$  può essere rappresentato nel sistema ternario nella forma

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n},$$

dove  $d_n \in \{0, 1, 2\}$  per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$ . La non unicità dello sviluppo ternario risulta evidente dalle seguenti rappresentazioni ternarie dello stesso numero:

$$x = \begin{cases} 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} d_m 00000 \dots = \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{3^n}, \\ 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} (d_m - 1) 2222 \dots = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{d_n}{3^n} + \frac{d_m - 1}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}, \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

dove  $d_m \in \{1, 2\}$ . In tal caso  $K_1$  consiste di tutti gli  $x \in [0, 1]$  con primo decimale  $d_1 \in \{0, 2\}$ . L'insieme  $K_2$  consiste di tutti gli  $x \in [0, 1]$  con primi due decimali  $d_1, d_2 \in \{0, 2\}$ , ecc. L'insieme  $K_n$  consiste di tutti gli  $x \in [0, 1]$  con primi  $n$  decimali  $d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}$ . Di conseguenza, l'insieme di Cantor consiste di tutti per cui  $x \in [0, 1]$  per cui nello sviluppo ternario manca la cifra 1. I numeri con rappresentazione ternaria ambigua nel senso della (V.1) sono esattamente gli estremi degli intervalli che costituiscono gli insiemi  $K_n$ .

L'insieme di Cantor non è numerabile, cioè esso non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Consideriamo la funzione  $\phi$  che associa al numero (ternario)  $x$  il numero (binario)  $\phi(x)$  ottenuto cambiando la cifra ternaria 2 nella cifra binaria 1 e la cifra ternaria 0 nella binario 0. Cioè, sia

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \in K,$$

dove  $d_n = 0$  o  $d_n = 2$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$ , allora, ponendo

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} d_n}{2^n},$$

otteniamo il corrispondente numero  $\phi(x)$ . I due estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione degli insiemi  $K_n$  hanno le rappresentazioni ternarie

$$\begin{aligned} x &= 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 100000 \dots = 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 022222 \dots, \\ y &= 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 200000 \dots, \end{aligned}$$

dove  $d_1, \dots, d_{m-1} \in \{0, 2\}$ . In tal caso abbiamo nella rappresentazione binaria

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \dots \frac{d_{m-1}}{2} 011111 \dots, \\ \phi(y) &= 0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \dots \frac{d_{m-1}}{2} 100000 \dots \end{aligned}$$

Quindi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}d_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}d_n}{2^n} + \frac{1}{2^m} = \phi(y).$$

In altre parole, gli estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione degli insiemi  $K_n$  hanno la stessa immagine sotto la mappa  $\phi$ . Di conseguenza,  $\phi$  è una funzione continua non decrescente, mentre  $\phi(K) = [0, 1]$ . La mappa  $\phi$  è biunivoca tranne negli estremi dello stesso intervallo tolto (dove è due a uno). Quindi l'insieme di Cantor  $K$  e l'intervallo  $[0, 1]$  hanno la stessa cardinalità, cioè  $K$  non è numerabile.

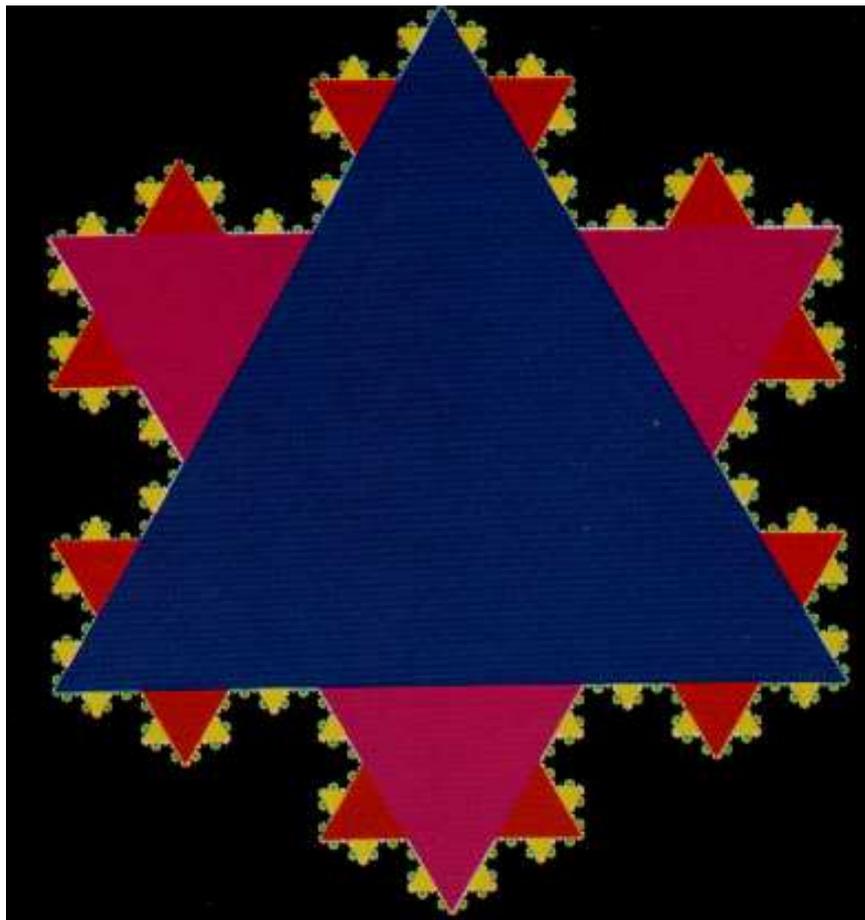


Figura V.1: La curva di Koch [14] (Vedi Wikipedia).

Discutiamo una modifica dell'insieme di Cantor: la *curva di Koch*<sup>2</sup> [vedi Fig. 1]. Tale curva si costruisce partendo da un triangolo equilatero e aggiungendo, all'esterno, i triangoli equilateri che hanno le misure ridotte di un fattore 3.

<sup>2</sup>Publicata da Niels Helge von Koch [1870–1924] nel 1904.

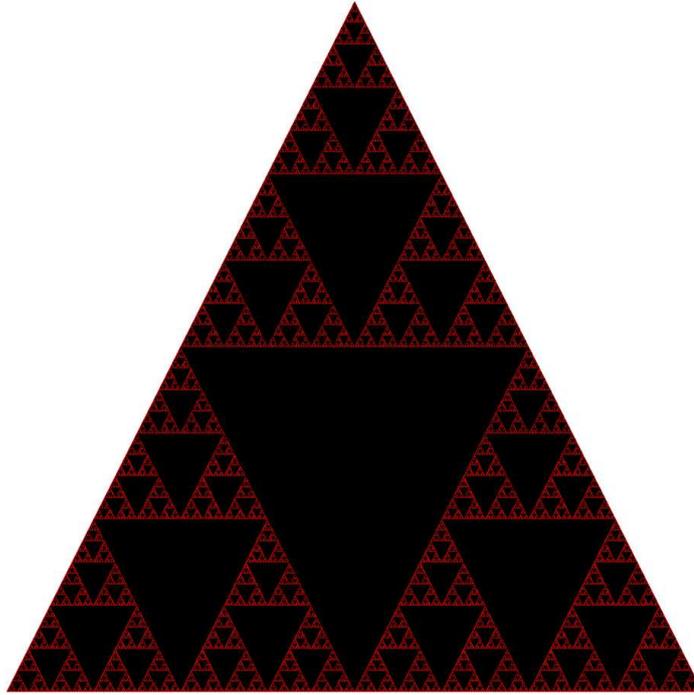


Figura V.2: Il triangolo di Sierpiński (Vedi Wikipedia).

Un'altra variante è il *triangolo di Sierpiński*.<sup>3</sup> Sia  $\mathbf{K}_0$  la regione chiusa che ha un triangolo equilatero con lati di lunghezza 1 come sua frontiera. Da questa regione triangolare si toglie la regione triangolare aperta con vertici i mediani dei tre lati, il che conduce all'unione di tre regioni triangolari  $\mathbf{K}_1$ , dove ogni triangolino ha tre lati di lunghezza  $\frac{1}{2}$ . Sia, ora,  $\mathbf{K}_n$  l'unione di  $3^n$  regioni che hanno da frontiera un triangolo equilatero, dove ogni lato ha la lunghezza  $(\frac{1}{2})^n$ . Da ciascuna dei  $3^n$  triangoli si toglie la regione triangolare aperta con vertici i mediani dei tre lati, il che conduce a tre triangoli di  $\mathbf{K}_{n+1}$  al posto di ogni triangolo di  $\mathbf{K}_n$ . Si vede facilmente che l'area di  $\mathbf{K}_0$  vale  $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ . Alla transizione da  $\mathbf{K}_n$  a  $\mathbf{K}_{n+1}$  l'area viene ridotta da un fattore  $\frac{3}{4}$ . Quindi l'area di  $\mathbf{K}_n$  vale  $\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^n\sqrt{3}$ . Inoltre,

$$[0, 1] = \mathbf{K}_0 \supset \mathbf{K}_1 \supset \mathbf{K}_2 \supset \mathbf{K}_3 \supset \dots \supset \mathbf{K}_n \supset \mathbf{K}_{n+1} \supset \dots$$

Di conseguenza, l'intersezione di tutti gli insiemi  $\mathbf{K}_n$  si chiama il triangolo di Sierpiński,  $\mathbf{K}$ . L'insieme  $\mathbf{K}$  ha l'area uguale a zero ed è non numerabile. Infine, si ripetino le analoghe considerazioni per il tappeto di Sierpiński [vedi Fig. 1].

<sup>3</sup>Publicato da Waclaw Sierpiński [1882–1969] nel 1915.

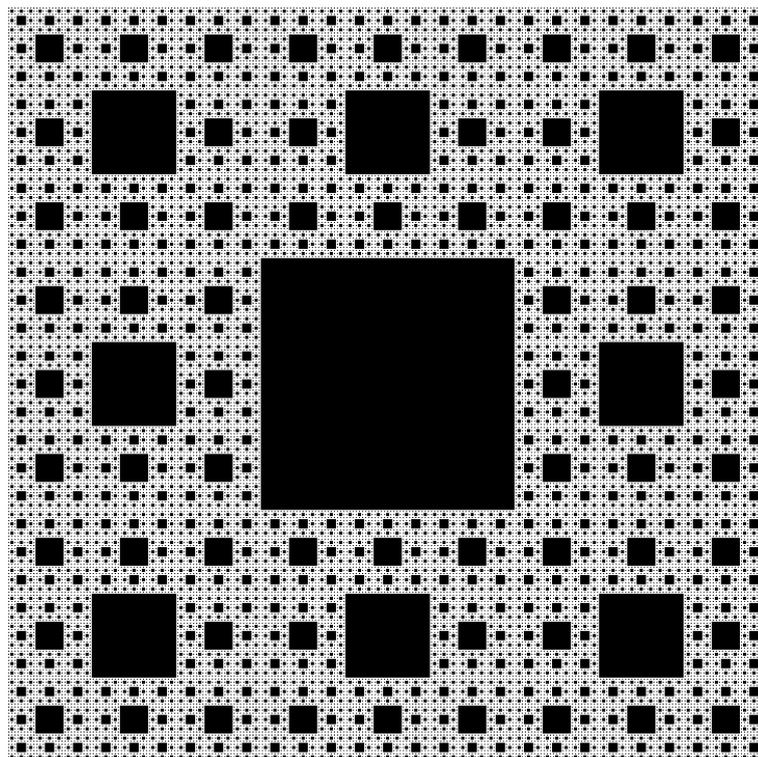


Figura V.3: Il tappeto di Sierpiński [5].

## 2 Caratteristiche dei frattali

Un frattale è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- a. un frattale ha una struttura quando è soggetto ad un rescaling arbitrariamente piccolo.
- b. un frattale è troppo irregolare per poter essere descritto in termini di funzioni abbastanza lisce.
- c. un frattale è costituito da parti che hanno la stessa struttura del frattale stesso. Tali parti hanno la stessa struttura delle loro sottoparti, ecc. Quindi si può effettuare un rescaling per arrivare ad una parte del frattale che ha la stessa struttura del frattale stesso. Questa proprietà si chiama *self-similarity*.
- d. Il frattale viene (spesso) definito applicando una regola ricorsiva.

Per tali motivi i frattali modellizzano strutture naturali quali la costa di un paese, i confini di una nuvola, una montagna, i cavolfiori e i broccoli, ecc.

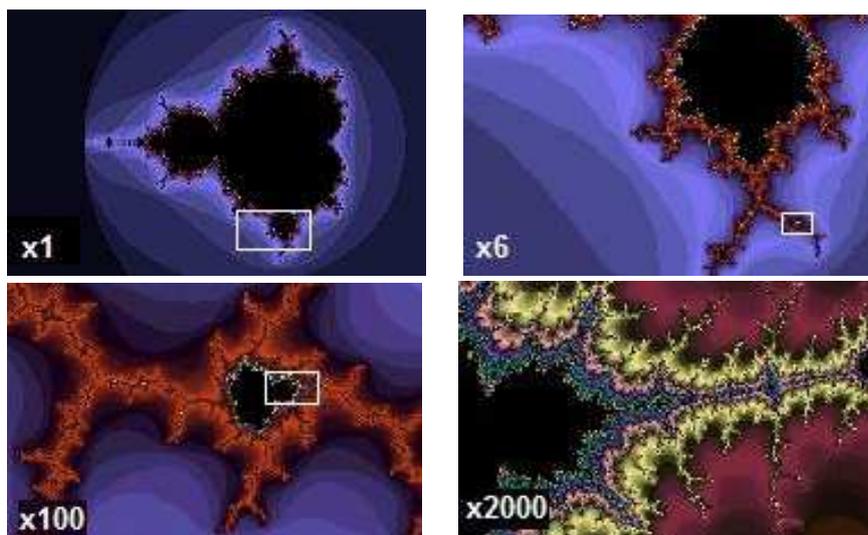


Figura V.4: Dettagli dell'insieme di Mandelbrot: X1, X6, X100 e X2000 (Vedi Wikipedia in inglese).

Aggiungendo abbastanza dettagli, la lunghezza della costa va all'infinito. Per esempio, ogni intervallo  $[a, b]$  costituito da uno degli insiemi  $K_n$ , che conduce all'insieme di Cantor, ha le stesse caratteristiche dell'insieme di Cantor stesso. Un altro esempio viene fornito dal triangolo di Sierpiński. Ogni triangolo, che nasce durante la sua costruzione, può essere messo in corrispondenza biunivoca con il triangolo di Sierpiński stesso. La stessa cosa vale per la curva di Koch. Un esempio tipico di frattale è l'insieme di Mandelbrot.

Molti frattali si ottengono applicando un sistema dinamico discreto. Per esempio, l'applicazione del metodo di Newton-Rawson ad un polinomio  $p(z)$  con  $n \geq 3$  zeri semplici, cioè il sistema dinamico di equazione

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z)}{p'(z)},$$

conduce ad  $n$  bacini di attrazione attorno agli zeri più una struttura frattale lungo i bordi dei bacini. Uno degli esempi più noti riguarda i polinomi  $p(z) = z^3 - 1$  e  $p(z) = z^5 - 1$  [Vedi la Fig. 5].

Una famiglia di frattali legata all'insieme di Mandelbrot riguarda i cosiddetti insiemi di Julia (Gaston Julia [1893–1978]). Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica intera. Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si dice *insieme di Julia riempito* (inglese: filled Julia set) l'insieme  $C(f)$  di

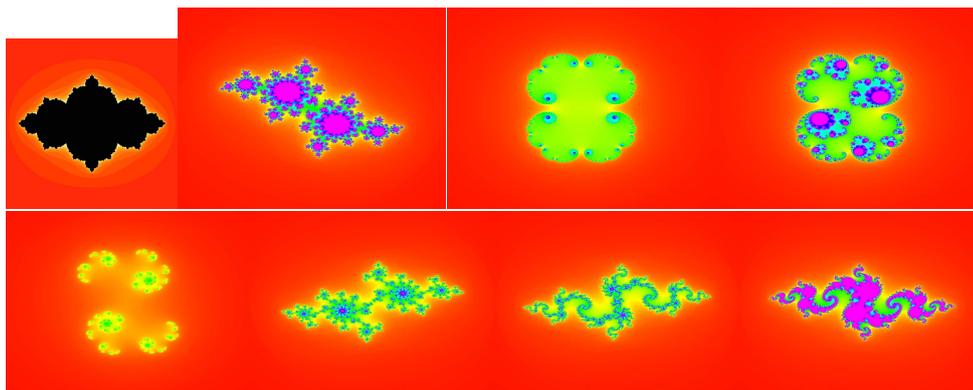


Figura V.5: Insiemi di Julia per  $c = (1-\sqrt{5})/2$  [su 1],  $c = ((-3+\sqrt{5})/2)+i((-1+\sqrt{5})/2)$  [su 2],  $c = 0,285$  [su 3],  $c = 0,285 + 0,01i$  [su 4],  $c = 0,45 + 0,1428i$  [giù 1],  $c = -0,70176 - 0,3842i$  [giù 2],  $c = -0,835 - 0,2321i$  [giù 3],  $c = -0,8 + 0,156i$  [giù 4]. Il primo disegno riguarda un insieme di Julia riempito. I valori di  $c$  in verde appartengono all'insieme di Mandelbrot. Quelli in rosso invece no. Quelli in blu magari no. Vedi Wikipedia (inglese).

tutti i punti  $z_0 \in \mathbb{C}$  per cui la successione  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  è limitata. La sua frontiera si chiama *insieme di Julia*,  $J(f)$ . L'insieme di Julia è la chiusura dell'insieme dei punti periodici ripulsivi. L'insieme di Julia,  $J(f)$ , e il suo complementare, l'insieme di Fatou  $F(f)$ , sono invarianti sotto la mappa  $f$ :

$$f^{-1}(J(f)) = J(f) = f(J(f)), \quad f^{-1}(F(f)) = F(f) = f(F(f)).$$

Gli insiemi di Julia sono stati studiati prevalentemente per le mappe

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

dove  $c \in \mathbb{C}$  è un parametro [vedi Eq. (III.15)]. L'insieme di tutti i punti  $c \in \mathbb{C}$  per cui l'insieme di Julia  $J(f_c)$  è connesso, si chiama *insieme di Mandelbrot*.

### 3 Dimensione di Hausdorff

Secondo Benoît Mandelbrot [1924-2010], che ha introdotto la terminologia nel 1975, un frattale è un sottoinsieme di uno spazio euclideo che ha una dimensione di Hausdorff superiore alla sua dimensione topologica. Intuitivamente è chiaro che cosa si intende con il concetto di dimensione. Un singolo punto ha dimensione zero. Una curva regolare in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  ha dimensione 1. Una superficie regolare ha dimensione 2, ecc. Di una varietà, che localmente è topologicamente equivalente allo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , si dice che ha dimensione  $n$ .

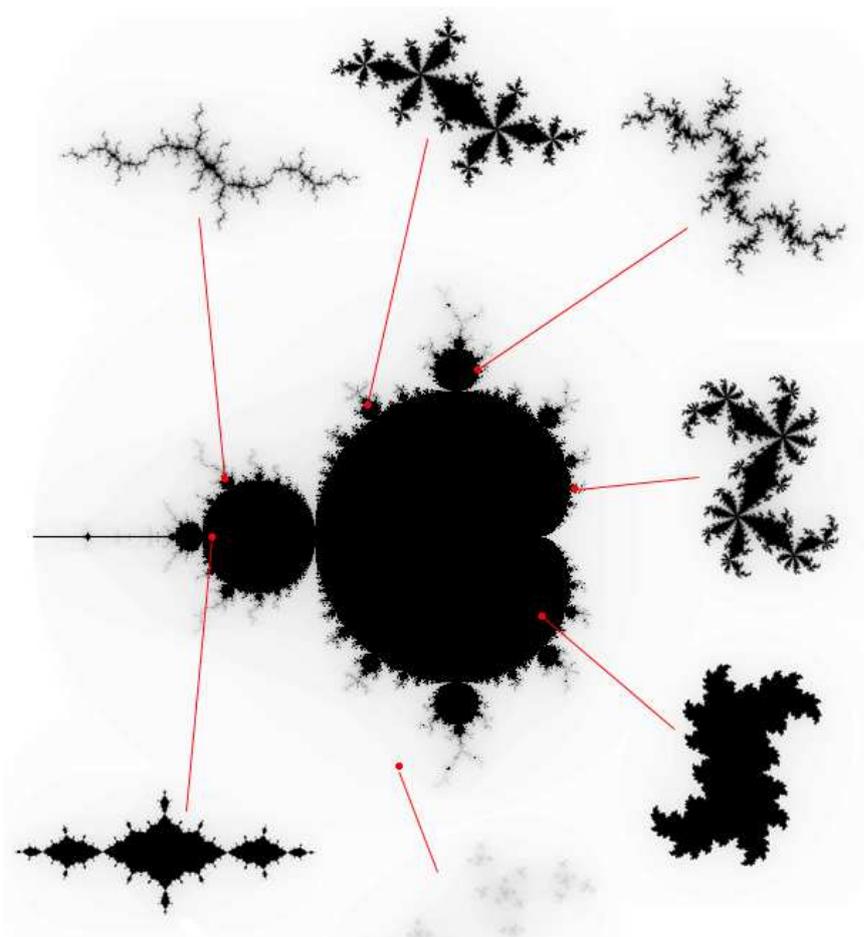


Figura V.6: Si illustra che l'insieme di Mandelbrot consiste in tutti i  $c \in \mathbb{C}$  per cui l'insieme di Julia  $J(f_c)$  è connesso [5].

**Definizione V.1** Uno spazio topologico  $X$  ha dimensione topologica  $n$  se ogni ricoprimento aperto di  $X$  ha un raffinamento aperto tale che ogni punto  $x \in X$  è contenuto in al massimo  $n + 1$  insiemi del raffinamento. In altre parole: se  $X = \bigcup_j U_j$  per una famiglia di sottoinsiemi aperti  $U_j$  in  $X$ , allora esiste un'altra famiglia di sottoinsiemi aperti  $V_k$  in  $X$  tali che

- a.  $X = \bigcup_k V_k$ ,
- b. ogni  $V_k$  è contenuto in un opportuno  $U_{j(k)}$ ,
- c. ogni  $x \in X$  appartiene al massimo  $n + 1$  insiemi  $V_k$ .

Per esempio, la circonferenza ha dimensione 1, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento di archi aperti tali che ogni punto della circonferenza

è contenuto in soltanto uno o due tali archi. La superficie sferica ha dimensione 2, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento di dischi aperti (sulla superficie) tali che ogni punto della superficie sferica è contenuto in uno, due o tre di tali dischi.

La dimensione topologica di un punto vale zero, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento che consiste in un singolo insieme aperto. Secondo un teorema di Lebesgue, le superfici regolari (a tratti) di dimensione *intuitiva*  $n$  hanno anche la dimensione topologica  $n$ . La dimensione topologica è sempre un numero intero non negativo oppure infinito.

Nel 1918 Felix Hausdorff [1868-1942] ha introdotto un'altra nozione di dimensione, nota come dimensione di Hausdorff. Al contrario della nozione di dimensione topologica, la dimensione di Hausdorff dipende dalla metrica (cioè, dalle distanze) in  $X$  e non soltanto dalla totalità di tutti i suoi sottoinsiemi aperti. Per  $\rho > 0$ , sia  $N(\rho)$  il numero di palle di raggio  $\rho$  necessario per coprire  $X$ . Quindi,  $X$  può essere coperto con  $N(\rho)$  di tali palle ma  $N(\rho) - 1$  palle non sono sufficienti per il suo ricoprimento. Se  $d$  fosse la dimensione di Hausdorff di  $X$ , ci si aspetta un comportamento del tipo

$$N(\rho) \sim \frac{1}{\rho^d}, \quad \rho \rightarrow 0^+.$$

In tal caso si dice che la dimensione di Hausdorff di  $X$  vale  $d$ .

**Esempio V.2** L'insieme finito  $\{x_1, \dots, x_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$  può essere coperto da esattamente  $n$  palle di raggio  $\rho$  se  $0 < 2\rho < \min\{\|x_j - x_k\| : j \neq k\}$ . Di conseguenza, la sua dimensione di Hausdorff vale zero.  $\square$

**Esempio V.3** Per  $X = [0, 1]$  abbiamo

$$N(\rho) = 1 + \min \left\{ n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{2\rho} \right\}.$$

Dalla disuguaglianza  $(1/2\rho) < N(\rho) \leq (1/2\rho) + 1$  segue  $d = 1$ .  $\square$

**Esempio V.4** La palla di raggio  $\rho$  in  $\mathbb{R}^d$  ha il volume  $c(d)\rho^d$ , dove  $c(d)$  è un'opportuna costante positiva.<sup>4</sup> Quindi per un aperto  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  di misura  $\mu$  abbiamo  $N(\rho) \approx (\mu/c(d)\rho^d)$ . Di conseguenza, un aperto in  $\mathbb{R}^d$  ha dimensione di Hausdorff uguale a  $d$ .  $\square$

Formalmente, sia  $X$  uno spazio metrico, cioè esiste una metrica (una distanza) tra punti di  $X$  che è positiva tra due punti diversi, è simmetrica tra

---

<sup>4</sup> $c(1) = 2, c(2) = \pi, c(3) = \frac{4}{3}\pi.$

i due punti e verifica la disuguaglianza triangolare. Definiamo il *contenuto di Hausdorff* nel seguente modo:

$$C_H^d(X) = \inf \left\{ \sum_j [r_j]^d : X = \bigcup_j \{x \in X : d(x_j, x) < r_j\} \right\},$$

dove l'estremo inferiore viene calcolato al variare dei centri  $x_j \in X$ . Allora la *dimensione di Hausdorff*,  $\dim_H(X)$ , viene definita da

$$\dim_H(X) = \inf \{d \geq 0 : C_H^d(X) = 0\}.$$

La dimensione di Hausdorff non può essere inferiore a quella topologica.

Nella seguente tabella (in cui  $d_F$  è la costante di Feigenbaum) elenchiamo le dimensioni di Hausdorff di alcuni frattali.

frattale	dim. Hausdorff	appross.	dim. top.
insieme di Cantor	$\ln(2)/\ln(3)$	0,6309297	0
curva di Koch	$\ln(4)/\ln(3)$	1,2618595	1
triangolo di Sierpiński	$\ln(3)/\ln(2)$	1,5849625	0
frontiera dell'insieme di Mandelbrot[24]	2	2,0000000	1
diagramma di biforcazione della mappa logistica	$\ln(2)/\ln(d_F)$	0,4498	0
tappeto di Sierpiński	$\ln(8)/\ln(3)$	1,8927893	0

Introduciamo ora un metodo per calcolare le dimensioni di Hausdorff dei frattali che hanno una self-similarity esatta. Una mappa  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *similarity* se ha la forma  $\psi(x) = x_0 + r(U(x) - x_0)$  per un'opportuna costante  $0 < r < 1$ , un opportuno punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e un'opportuna isometria  $U$ . Supponiamo che il sottoinsieme  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  ha la forma

$$\bigcup_{j=1}^m \psi_j(K) = K,$$

dove  $\psi_1, \dots, \psi_m$  è un numero finito di similarity. Se  $r_1, \dots, r_m$  sono le costanti di contrazione delle similarity  $\psi_1, \dots, \psi_m$ , allora la dimensione di Hausdorff  $d$  di  $K$  si ottiene dall'equazione<sup>5</sup>

$$\sum_{j=1}^m [r_j]^d = 1. \tag{V.2}$$

<sup>5</sup>Siccome la parte a sinistra è strettamente decrescente in  $d$  e appartiene a  $(1, +\infty)$  per  $d = 0$ , esiste una soluzione unica dell'equazione.

Una condizione necessaria (la cosiddetta *open set condition*), per applicare il risultato è l'esistenza di un sottoinsieme aperto e limitato  $V$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$\bigcup_{j=1}^m \psi_j(V) \subset V. \quad (\text{V.3})$$

Applichiamo il risultato prima all'insieme di Cantor  $K$ . Ponendo

$$\psi_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad \psi_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{3}(2+x),$$

si ottiene  $\psi_1(K) \cup \psi_2(K) = K$ . Inoltre, vale la cosiddetta open set condition per  $V = (0, 1)$ . Siccome  $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$ , la dimensione di Hausdorff  $d$  di  $K$  segue dall'equazione

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1,$$

cioè  $\ln(2) - d \ln(3) = 0$  e quindi  $d = (\ln(2)/\ln(3))$ .

Consideriamo ora il triangolo di Sierpiński  $\mathbf{K}$ . Siano  $x_1, x_2$  e  $x_3$  i vertici del triangolo di partenza e  $\psi_1, \psi_2$  e  $\psi_3$  le seguenti similarity:

$$\psi_j(x) = x_j + \frac{1}{2}(x - x_j), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Sia  $V$  la regione aperta che ha il triangolo di base come la sua frontiera. In tal caso vale la open set condition, mentre

$$\psi_1(\mathbf{K}) \cup \psi_2(\mathbf{K}) \cup \psi_3(\mathbf{K}) = \mathbf{K}.$$

Dunque la dimensione di Hausdorff  $d$  di  $\mathbf{K}$  segue dall'equazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1,$$

cioè  $\ln(3) - d \ln(2) = 0$  e quindi  $d = (\ln(3)/\ln(2))$ .

**Esercizio:** Applicare lo stesso metodo per calcolare le dimensione di Hausdorff del Tappeto di Sierpiński e del tetraedro di Sierpiński.<sup>6</sup>

Calcoliamo infine la dimensione di Hausdorff della curva di Koch  $K$ . Essendo  $\tilde{K}$  la parte della curva basata su due dei tre lati, si vede subito che  $K$  e  $\tilde{K}$  hanno la stessa dimensione di Hausdorff. Infatti  $N_{\tilde{K}}(\rho) = \frac{2}{3}N_K(\rho)$  per  $\rho > 0$  abbastanza piccolo. Si osservi ora che durante la costruzione si costruisce su ogni lato una copia self-similar con un terzo delle dimensioni, due copie di riduzione  $\frac{1}{3}$ , quattro copie di riduzione  $\frac{1}{9}$ , otto copie di riduzione  $\frac{1}{27}$ , ecc. Quindi la dimensione di Hausdorff  $d$  segue dall'equazione

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2^j} \left(\frac{1}{3}\right)^{jd} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^d}\right)^j = \frac{2/3^d}{1 - (2/3^d)} = \frac{2}{3^d - 2}.$$

Di conseguenza, la dimensione di Hausdorff della curva di Koch vale  $d = [\ln(4)/\ln(3)]$ .

<sup>6</sup>Cioè, del frattale costruito come il triangolo di Sierpiński partendo da un tetraedro.



# Capitolo VI

## Equazioni Integrabili

In questo capitolo discuteremo le cosiddette equazioni nonlineari di evoluzione di tipo integrabile quali l'equazione di Korteweg-de Vries (KdV), l'equazione nonlineare di Schrödinger (NLS), l'equazione di sine-Gordon (SG), e altre. Tali equazioni alle derivate parziali [PDE] hanno tutte soluzioni di tipo “travelling waves” e sono risolubili mediante la cosiddetta “inverse scattering transform” (IST), una trasformazione **nonlineare** che converte la PDE (di cui ci vuole studiare il problema a valori iniziali) in un'equazione lineare di più semplice risoluzione. La IST può essere considerata come l'analogo nonlineare della trasformata di Fourier [quest'ultima si applica a equazioni differenziali ordinarie lineari]. Inoltre, alle equazioni integrabili è possibile associare un sistema hamiltoniano con infinite costanti di moto. **Alcuni dettagli sulla IST e sull'equazione NLS si trovano nel secondo capitolo di [30] e nei primi due capitoli di [29].**

### 1 Storia di alcune equazioni integrabili

Nel 1834 l'ingegnere scozzese John Scott Russell [1808–1882] osservò un'onda (che viaggiava lungo la Union Canal tra Edinburgo e Glasgow), caratterizzata dal fatto di non cambiare la sua forma e dall'averne un'ampiezza proporzionale alla sua velocità. Egli, inoltre, ideò un esperimento con il quale riprodusse tali fenomeni ondosi.

La teoria che spiega i risultati sperimentali di Scott Russell è stata successivamente sviluppata da Joseph Valentin Boussinesq [1842–1929] negli anni 1871–1872. Boussinesq ha derivato l'equazione che descrive la propagazione di onde in canali la cui profondità è piccola rispetto alla lunghezza d'onda, trovando, come soluzione di tali equazioni, le cosiddette “ondes solitaires” che spiegano le osservazioni di Scott Russell. Tali soluzioni hanno la forma  $u(x, t) = f(x - ct)$  e sono comunemente dette “traveling waves”.

Nel 1894–1895 Diederik Korteweg [1848-1941] e Gustav de Vries [1866–1934], utilizzando un sistema di coordinate solidale con l'onda, hanno ottenuto l'equazione di Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0. \quad (\text{VI.1})$$

La sostituzione

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

converte la KdV nell'equazione differenziale ordinaria

$$-cf'(x) + f'''(x) - 6f(x)f'(x) = 0,$$

oppure:

$$\frac{d}{dx} (-cf(x) + f''(x) - 3f(x)^2) = 0.$$

Integrando quest'ultima equazione si ottiene

$$-cf(x) + f''(x) - 3f(x)^2 = A, \quad (\text{VI.2})$$

dove  $A$  è un'opportuna costante. Moltiplicando (VI.2) per  $2f'(x)$  si ha

$$\frac{d}{dx} (-cf(x)^2 + f'(x)^2 - 2f(x)^3 - 2Af(x)) = 0,$$

e, integrando nuovamente, si ottiene per un'opportuna costante  $B$

$$-cf(x)^2 + f'(x)^2 - 2f(x)^3 = 2Af(x) + B.$$

Quest'ultima equazione conduce infine all'equazione a variabili separabili

$$f'(x) = \pm \sqrt{2Af(x) + B + cf(x)^2 + 2f(x)^3}.$$

Per  $A = B = 0$  e  $c > 0$  si trova

$$u(x, t) = \frac{-\frac{1}{2}c}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct - a)]} = -\frac{1}{2}c \{1 - \tanh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct - a)]\}. \quad (\text{VI.3})$$

Osserviamo che l'ampiezza ( $\frac{1}{2}c$ ) è proporzionale alla velocità ( $c$ ).

Nel periodo 1900-1954 l'equazione di Korteweg-de Vries è caduta nel dimenticatoio. Nel 1954 Enrico Fermi [1901-1954], John Pasta [1918-1984], Stanislaw Ulam [1909-1984] e Mary Tsingou [nata nel 1928] hanno condotto molte simulazioni numeriche sulla dinamica di un sistema di  $N$  oscillatori accoppiati. Tale sistema fu analizzato per giustificare un modello teorico (proposto da Peter Debye [1884–1966]) che permetteva di interpretare le osservazioni sperimentali

sulla conducibilità termica dei solidi. Il modello matematico studiato da Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou è descritto dalle seguenti equazioni alle differenze:

$$m\ddot{x}_j = k(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1})[1 + \alpha(x_{j+1} - x_{j-1})], \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{VI.4})$$

dove  $\alpha$  e  $k$  sono opportune costanti positive. Essi trovarono soluzioni di tipo “traveling waves” (VI.3) in aperto contrasto con il risultato da loro atteso: l’equipartizione dell’energia (che costituisce il paradosso di Fermi-Pasta-Ulam). Per questo motivo archiviarono le loro ricerche in un report della Los Alamos National Laboratory, pubblicato subito dopo la morte di Enrico Fermi. Nel 1965 Norman Zabusky [nato nel 1929] e Martin Kruskal [1925-2006] hanno confermato i risultati numerici e introdotto il termine “solitone” per l’onda viaggiante. Loro hanno anche osservato che le soluzioni del modello (VI.4) tendono a quelle dell’equazione di Korteweg-de Vries se la distanza tra due oscillatori consecutivi tende a zero.

Nel 1967 Clifford Gardner [nato nel 1924], John Greene [1928-2007], Martin Kruskal [1925-2006] e Robert Miura [nato nel 1938] (indicheremo quest’insieme di autori con GGKM) hanno scoperto la cosiddetta inverse scattering transform (IST) per risolvere il problema di Cauchy dell’equazione di Korteweg-de Vries. Partendo dalla soluzione iniziale  $u(x, 0)$  appartenente ad  $L^1(\mathbb{R}; (1+|x|)dx)$  dell’equazione di Schrödinger

$$-\psi_{xx} + u(x, 0)\psi = k^2\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{VI.5})$$

GGKM hanno introdotto la cosiddetta soluzione di Jost  $f_r(k, x)$ . Tale funzione è soluzione di (VI.5) e ha il seguente comportamento asintotico:

$$f_r(k, x) = \begin{cases} \frac{1}{T(k)}e^{-ikx} + \frac{R(k)}{T(k)}e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-ikx}[1 + o(1)], & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

$T(k)$  si chiama coefficiente di trasmissione, mentre  $R(k)$  si dice coefficiente di riflessione. La soluzione di Jost rappresenta un’onda piana  $e^{-ikx}$  che viaggia da destra a sinistra e viene in parte riflessa e in parte trasmessa nelle proporzioni  $R(k)$  e  $T(k)$ , essendo  $|R(k)|^2 + |T(k)|^2 = 1$ . La funzione  $R(k)$  è continua in  $k \in \mathbb{R}$  e tende a zero se  $k \rightarrow \pm\infty$ , mentre il coefficiente di trasmissione è meromorfo in  $k$  nel semipiano superiore, ha poli semplici in  $i\kappa_1, \dots, i\kappa_N$  (con  $\{\kappa_1, \dots, \kappa_N\} \subset \mathbb{R}^+$ ) e tende a 1 se  $k \rightarrow \infty$ . Ad ogni polo  $i\kappa_s$  si associa un’opportuna costante positiva  $N_s$ , la cosiddetta costante di normalizzazione. Il problema di determinare i dati di scattering corrispondenti al potenziale  $u(x, 0)$  è detto *problema di scattering diretto*.

I dati di scattering della corrispondente equazione di Schrödinger

$$-\psi_{xx} + u(x, t)\psi = k^2\psi$$

evolvono nel seguente modo elementare:

$$\{R(k), \{\kappa_j, N_j\}_{j=1}^N\} \mapsto \{R(k; t), \{\kappa_j, N_j(t)\}_{j=1}^N\} = \{R(k)e^{8ik^3t}, \{\kappa_j, N_j e^{8\kappa_j^3t}\}_{j=1}^N\}.$$

Supponendo di conoscere i dati di scattering all'istante  $t$ , ci si pone il problema di costruire la funzione  $u(x, t)$  corrispondente a tali dati. Tale problema si chiama *scattering inverso*. La risoluzione del problema di scattering inverso si basa sui seguenti tre passi:

a. Partendo dai dati di scattering si costruisce il *nucleo di Marchenko*

$$\Omega(x; t) = \sum_{j=1}^N N_j(t) e^{-\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} R(k; t).$$

b. Si scrive l'equazione integrale di Marchenko con nucleo  $\Omega(x + y; t)$ :

$$K(x, y; t) + \Omega(x + y; t) + \int_x^{\infty} dz K(x, z; t) \Omega(z + y; t) = 0.$$

c. Supposto di aver risolto l'equazione di Marchenko, il potenziale si trova applicando la seguente regola:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t).$$

In forma schematica la IST può essere descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(k), \{\kappa_j, N_j\}_{j=1}^N\} \\ \text{KdV} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(k)e^{8ik^3t}, \{\kappa_j, N_j e^{8\kappa_j^3t}\}_{j=1}^N\} \end{array}$$

GGKM si avvantaggiarono dal fatto che tre anni prima Faddeev aveva risolto il problema dello scattering inverso per l'equazione di Schrödinger descrivendo un algoritmo per trovare il potenziale  $u(x, t)$  una volta noti i dati di scattering.

Nel 1972 Vladimir Evgenovich Zakharov [nato nel 1939] e A.B. Shabat scoprirono che la IST poteva essere usata anche per risolvere l'equazione nonlineare di Schrödinger (NLS)

$$iu_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0. \quad (\text{VI.6})$$

Associando alla NLS il cosiddetto sistema di Zakharov-Shabat (ZS)

$$\psi_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & u \\ \mp u^* & i\lambda \end{pmatrix} \psi,$$

Zakharov e Shabat hanno costruito un analogo diagramma risolutivo per l'equazione NLS, cioè:

$$\begin{array}{ccc}
 u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(\lambda), \{ia_j, \Gamma_j\}_{j=1}^N\} \\
 \text{NLS} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\
 u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(\lambda)e^{4i\lambda^2 t}, \{ia_j, \Gamma_j e^{-4ia_j^2 t}\}_{j=1}^N\}
 \end{array}$$

Un'altra equazione integrabile risolvibile mediante una IST che coinvolge il sistema di Zakharov-Shabat, è l'equazione di Korteweg-de Vries modificata (mKdV)

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Nelle applicazioni (fisica dei plasmi, superfici iperboliche, traffico) la soluzione  $u(x, t)$  è supposta reale. Il diagramma che descrive la IST per risolvere il problema di Cauchy per l'equazione mKdV è il seguente:

$$\begin{array}{ccc}
 u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(\lambda), \{ia_j, \Gamma_j\}_{j=1}^N\} \\
 \text{NLS} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\
 u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(\lambda)e^{8i\lambda^3 t}, \{ia_j, \Gamma_j e^{8ia_j^3 t}\}_{j=1}^N\}
 \end{array}$$

La scoperta di due equazioni nonlineari di evoluzione di tipo integrabile (la KdV e la NLS) ha condotto a un'intensa attività di ricerca (con relative pubblicazioni) su equazioni nonlineari di evoluzione risolvibili mediante una simile trasformazione. Tra esse ricordiamo le seguenti: equazione di Korteweg-de Vries modificata (mKdV), di sine-Gordon (SG), di Kadomtsev-Petviashvili (KP), di Camassa-Holm (CH), di Degasperis-Procesi (DP). Sono anche state studiate equazioni nonlineari di evoluzione nel discreto, in cui la variabile spaziale è un intero: reticolato di Toda, equazione nonlineare di Schrödinger di tipo integrabile e discreto [IDNLS], e altre. Tali equazioni hanno applicazioni in fisica, ingegneria, biologia, ecc., e possono essere risolte tramite la IST.

## 2 Generazione di equazioni integrabili

Consideriamo il sistema **lineare** di equazioni di evoluzione

$$\Psi_x = X(x, t, \lambda)\Psi, \quad (\text{VI.7a})$$

$$\Psi_t = T(x, t, \lambda)\Psi, \quad (\text{VI.7b})$$

dove

- a.  $\Psi(x, t, \lambda)$  è una funzione a valori vettoriali che dipende dalla posizione  $x$ , dal tempo  $t$  e da una variabile spettrale  $\lambda$ ;
- b.  $X(x, t, \lambda)$  e  $T(x, t, \lambda)$  sono due matrici quadrate.

Utilizzando il teorema di Schwarz ( $(\Psi_x)_t = (\Psi_t)_x$ ), dove

$$\begin{aligned}(\Psi_x)_t &= X\Psi_t + X_x\Psi = XT\Psi + X_x\Psi = (XT + X_t)\Psi, \\(\Psi_t)_x &= T\Psi_x + T_x\Psi = TX\Psi + T_x\Psi = (TX + T_x)\Psi,\end{aligned}$$

si ottiene la seguente condizione di compatibilità:

$$X_t - T_x + XT - TX = 0. \quad (\text{VI.8})$$

La (VI.8) è un'equazione nonlineare di evoluzione di tipo integrabile se essa non dipende dalla variabile spettrale  $\lambda$  ma soltanto dalla posizione  $x$  e dal tempo  $t$ .

**Esempio VI.1 (KdV)** Consideriamo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & u - \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx} \\ 4\lambda + 2u & -u_x \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.9})$$

Poichè

$$\begin{aligned}X_t &= \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_x &= \begin{pmatrix} u_{xx} & 2\lambda u_x + 4uu_x - u_{xxx} \\ 2u_x & -u_{xx} \end{pmatrix}, \\XT &= \begin{pmatrix} 4\lambda u - 4\lambda^2 + 2u^2 - 2\lambda u & -uu_x + \lambda u_x \\ u_x & -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx} \end{pmatrix}, \\TX &= \begin{pmatrix} -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx} & uu_x - \lambda u_x \\ -u_x & 4\lambda u - 4\lambda^2 + 2u^2 - 2\lambda u \end{pmatrix},\end{aligned}$$

si trova

$$X_t - T_x + XT - TX = \begin{pmatrix} 0 & u_t + u_{xxx} - 6uu_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la condizione di compatibilità (VI.8) è equivalente all'equazione di Korteweg-de Vries (VI.1).

Sostituendo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$$

nell'equazione (VI.7a) si ottiene

$$\begin{pmatrix} \phi_x \\ \psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\psi - \lambda\psi \\ \phi \end{pmatrix}$$

oppure  $\phi = \psi_x$  e  $-\phi_x + u\psi = \lambda\psi$ . Quest'ultime equazioni sono equivalenti all'equazione di Schrödinger

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi,$$

dove  $\psi$  è la funzione d'onda e  $u$  è il potenziale. Quindi, (VI.7a) rappresenta il problema spettrale per l'operatore differenziale di Schrödinger  $-\partial_x^2 + u$ .  $\square$

**Esempio VI.2 (NLS)** Consideriamo

$$X = -i\lambda\sigma_3 + \mathbf{Q}, \quad T = -2i\lambda^2\sigma_3 - i\sigma_3\mathbf{Q}^2 + 2\lambda\mathbf{Q} + i\sigma_3\mathbf{Q}_x, \quad (\text{VI.10})$$

dove

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che  $\sigma_3\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}\sigma_3$  e  $[\sigma_3]^2 = I_2$ . Quindi

$$\begin{aligned} X_t - T_x + XT - TX &= \mathbf{Q}_t + i\sigma_3[\mathbf{Q}^2]_x - 2\lambda\mathbf{Q}_x - i\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} \\ &\quad - 2\lambda^3 I_2 - \lambda\mathbf{Q}^2 - 2i\lambda^2\sigma_3\mathbf{Q} + \lambda\mathbf{Q}_x \\ &\quad + 2i\lambda^2\sigma_3\mathbf{Q} + i\sigma_3\mathbf{Q}^3 + 2\lambda\mathbf{Q}^2 - i\sigma_3\mathbf{Q}\mathbf{Q}_x \\ &\quad + 2\lambda^3 I_2 + \lambda\mathbf{Q}^2 - 2i\lambda^2\sigma_3\mathbf{Q} + \lambda\mathbf{Q}_x \\ &\quad + 2i\lambda^2\sigma_3\mathbf{Q} + i\sigma_3\mathbf{Q}^3 - 2\lambda\mathbf{Q}^2 - i\sigma_3\mathbf{Q}_x\mathbf{Q} \\ &= -i\sigma_3 \{ i\sigma_3\mathbf{Q}_t + \mathbf{Q}_{xx} - 2\mathbf{Q}^3 \} \\ &= -i\sigma_3 \begin{pmatrix} 0 & iq_t + q_{xx} - 2qrq \\ -ir_t + r_{xx} - 2rqr & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In altre parole, la condizione di compatibilità (VI.8) è equivalente al seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\begin{aligned} iq_t + q_{xx} - 2qrq &= 0, \\ -ir_t + r_{xx} - 2rqr &= 0. \end{aligned}$$

Per  $r = \pm q^*$  il suddetto sistema si riduce all'equazione nonlineare di Schrödinger (NLS)

$$iq_t + q_{xx} \mp 2|q|^2q = 0,$$

dove il meno corrisponde al caso *defocusing* e il più al caso *focusing*.

L'equazione (VI.7a) può essere scritta nella forma

$$i\sigma_3\Psi_x - i\sigma_3\mathbf{Q}\Psi = \lambda\Psi.$$

Di conseguenza, (VI.7a) rappresenta il problema spettrale per l'operatore differenziale di Zakharov-Shabat  $i\sigma_3\partial_x - i\sigma_3\mathbf{Q}$ .  $\square$

**Esempio VI.3 (mKdV)** Consideriamo

$$X = -i\lambda\sigma_3 + \mathbf{Q}, \quad T = -4i\lambda^3\sigma_3 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 + 4\lambda^2\mathbf{Q} + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}_{xx} + 2\mathbf{Q}^3,$$

dove

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che  $\sigma_3\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}\sigma_3$  e  $[\sigma_3]^2 = I_2$ . Quindi

$$\begin{aligned} X_t - T_x + XT - TX &= \mathbf{Q}_t + 2i\lambda\sigma_3(\mathbf{Q}^2)_x - 4\lambda^2\mathbf{Q}_x - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} + \mathbf{Q}_{xxx} - 2(\mathbf{Q}^3)_x \\ &\quad - 4\lambda^4 I_2 - 2\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2\lambda^2\mathbf{Q}_x + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3 \\ &\quad + 4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3 + 4\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}\mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{xx} + 2\mathbf{Q}^4 \\ &\quad + 4\lambda^4 I_2 + 2\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2\lambda^2\mathbf{Q}_x + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3 \\ &\quad + 4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3 - 4\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{xx}\mathbf{Q} - 2\mathbf{Q}^4 \\ &= \begin{pmatrix} (q_x r - q r_x)_x & q_t - 2(q r q)_x + q_{xxx} \\ r_t - 2(r q r)_x + r_{xxx} & (r_x q - r q_x)_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $r/q$  è costante. Inoltre, per  $q = r = u$  reale si arriva all'equazione mKdV

$$u_t - 2(u^3)_x + u_{xxx} = 0.$$

### 3 Superfici solitoniche

In questo paragrafo introdurremo le superfici solitoniche e le trasformazioni di Bäcklund con particolare enfasi sull'equazione NLS focusing. Seguiremo in gran parte l'articolo di Sym [25].

Nel contesto geometrico si introducono le due variabili  $(x^1, x^2) = (x, t) \in \mathbb{R}^2$  e si trattano alla pari la posizione  $x$  e il tempo  $t$ . Le equazioni (VI.16) si possono scrivere nella forma tensoriale

$$\Psi_{,\mu} = g_\mu \Psi, \quad \mu = 1, 2, \tag{VI.11}$$

dove  $g_1 = X$  e  $g_2 = T$  sono matrici  $d \times d$ . La condizione di compatibilità (VI.17), spesso chiamata *condizione di curvatura zero*, ha la forma

$$g_{1,2} - g_{2,1} + [g_1, g_2] = 0,$$

dove supponiamo che le matrici  $g_1$  e  $g_2$  per  $\lambda \in \mathbb{R}$  appartengano all'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  corrispondente al gruppo di Lie  $G$ . Sia  $N$  la dimensione del gruppo di Lie  $G$  [cioè, la dimensione dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale reale]. Supponiamo inoltre che  $\Psi(x^1, x^2; \lambda) \in G$  per ogni  $(x^1, x^2, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ .

Nel caso NLS focusing [dove  $r = -q^*$ ] stiamo parlando del gruppo  $SU(2)$  delle matrici unitarie di ordine 2 con determinante +1 e dell'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$  delle matrici complesse di ordine 2 che sono antihermitiane e hanno traccia uguale a zero. In tal caso

$$g_1 = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 2i\lambda^2 + i|q|^2 & 2\lambda q + iq_x \\ -2\lambda q^* + iq_x^* & 2i\lambda^2 - i|q|^2 \end{pmatrix},$$

appartengono a  $\mathfrak{su}(2)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Siccome per  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (\Psi^{-1})_{,\mu} = -\Psi^{-1}\Psi_{,\mu}\Psi^{-1} = -\Psi^{-1}g_\mu, \\ (\Psi^\dagger)_{,\mu} = \Psi^\dagger g_\mu^\dagger = -\Psi^\dagger g_\mu, \end{cases}$$

risulta

$$(\Psi^\dagger\Psi)_{,\mu} = (\Psi^\dagger)_{,\mu}\psi + \Psi^\dagger\Psi_{,\mu} = -\Psi^\dagger g_\mu\Psi + \Psi^\dagger g_\mu\Psi = 0_{2 \times 2}.$$

Inoltre, per ogni matrice costante nonsingolare  $C$  di ordine 2,  $\tilde{\Psi} = \Psi C$  verifica le equazioni  $\tilde{\Psi}_{,\mu} = g_\mu \tilde{\Psi}$  se  $\Psi$  verifica la (VI.11). Di conseguenza, si può scegliere la matrice d'onda  $\Psi$  nel gruppo  $SU(2)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Infatti, scegliendo  $\Psi$  tale che per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  vale

$$\Psi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x \sigma_3} [I_2 + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty,$$

si ottiene una tale matrice d'onda appartenente a  $SU(2)$ . Si ricorda che  $SU(2)$  è un gruppo di Lie di dimensione  $N = 3$ .<sup>1</sup>

Nel caso KdV [dove  $u$  è reale] stiamo parlando del gruppo  $SL_2(\mathbb{R})$  delle matrici reali di ordine 2 con determinante +1 e dell'algebra di Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  delle matrici reali di ordine 2 con traccia zero. In tal caso

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & u - \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx} \\ 4\lambda + 2u & -u_x \end{pmatrix},$$

appartengono a  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si può scegliere  $\Psi(x, \lambda)$  in  $SL_2(\mathbb{R})$ . Si ricorda che  $SL_2(\mathbb{R})$  è un gruppo di Lie di dimensione  $N = 3$ .<sup>2</sup>

Fissata  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$R(x^1, x^2; \lambda) = \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)$$

appartiene al gruppo  $G$  e si dice *trasformazione di Pohlmeyer*. Si ha:

$$\begin{aligned} R_{,\mu} &= (\Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1})_{,\mu} \Psi(x^1, x^2, \lambda) + \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\mu} \\ &= -\Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)_{,\mu} \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda) + \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\mu} \\ &= -\Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} g_\mu(x^1, x^2, \lambda_0) \Psi(x^1, x^2, \lambda) + \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} g_\mu(x^1, x^2, \lambda) \Psi(x^1, x^2, \lambda) \\ &= \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} [g_\mu(x^1, x^2, \lambda) - g_\mu(x^1, x^2, \lambda_0)] \Psi(x^1, x^2, \lambda_0) R(x^1, x^2; \lambda) \\ &= \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} [(\lambda - \lambda_0) g_\mu(x^1, x^2, \lambda_0)_{,\lambda} + \dots] \Psi(x^1, x^2, \lambda_0) R(x^1, x^2; \lambda). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Le matrici  $i\sigma_1$ ,  $i\sigma_2$  e  $i\sigma_3$ , dove  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  sono le cosiddette matrici di Pauli, costituiscono una base dello spazio vettoriale reale  $\mathfrak{su}(2)$ .

<sup>2</sup>Le matrici  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  costituiscono una base dello spazio vettoriale reale  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ .

Utilizzando il Teorema di Schwarz ( $R_{,12} = R_{,21}$ ) si ha:

$$(\Psi^{-1}g_{1,\lambda}\Psi)_{,2} = (\Psi^{-1}g_{2,\lambda}\Psi)_{,1},$$

rendendo chiusa la forma differenziale

$$(\Psi^{-1}g_{1,\lambda}\Psi)dx^1 + (\Psi^{-1}g_{2,\lambda}\Psi)dx^2.$$

Poichè  $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ , esiste una funzione  $\tau = \tau(x^1, x^2, \lambda)$  a valori in  $\mathfrak{g}$  tale che

$$\tau_{,\mu} = \Psi^{-1}g_{\mu,\lambda}\Psi.$$

Integrando quest'ultima equazione si ottiene<sup>3</sup>

$$\tau = \Psi^{-1}\Psi_{,\lambda} + \text{cost.},$$

dove il termine costante appartiene a  $\mathfrak{g}$ . Per convenienza poniamo  $\text{cost.} = 0 \in \mathfrak{g}$ .

L'equazione

$$\tau = \tau(x^1, x^2, \lambda) = \Psi(x^1, x^2, \lambda)^{-1}\Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\lambda} \in \mathfrak{g} \quad (\text{VI.12})$$

si può interpretare come la rappresentazione in coordinate  $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$  di una superficie immersa nello spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  di dimensione  $N$ . Le superfici dipendono dal parametro spettrale  $\lambda \in \mathbb{R}$  e si dicono *superfici solitoniche*.

Torniamo all'esempio NLS focusing, dove  $N = 3$  è la dimensione dell'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . La corrispondenza biunivoca

$$-\frac{i}{2}[c^1\sigma_1 + c^2\sigma^2 + c^3\sigma^3] \iff \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.13})$$

tra  $\mathfrak{su}(2)$  e lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  conduce ad un'immersione delle superfici solitoniche in  $\mathbb{R}^3$ . Inoltre, il commutatore di due matrici appartenenti a  $\mathfrak{su}(2)$  corrisponde al prodotto vettore delle loro immagini [tranne per un fattore  $-2$ ]:

$$\left[-\frac{i}{2}(c^1\sigma_1 + c^2\sigma^2 + c^3\sigma^3), -\frac{i}{2}(c^1\sigma_1 + c^2\sigma^2 + c^3\sigma^3)\right] \iff (\mathbf{c} \times \mathbf{d}).$$

Di conseguenza, la (VI.13) costituisce un isomorfismo di Lie tra le algebre di Lie  $\mathfrak{su}(2)$  e  $(\mathbb{R}^3, \times)$ .

Consideriamo ora due soluzioni  $\Psi$  e  $\tilde{\Psi}$  della (VI.11) appartenenti al gruppo di Lie  $G$ . Allora la matrice

$$D = \tilde{\Psi}\Psi^{-1}$$

---

<sup>3</sup>Si ha:  $\tau_{,\mu} = -\Psi^{-1}\Psi_{,\mu}\Psi^{-1}\Psi_{,\lambda} + \Psi^{-1}\Psi_{,\lambda\mu} = -\Psi^{-1}g_{\mu}\Psi_{,\lambda} + \Psi^{-1}(g_{\mu}\Psi)_{,\lambda} = \Psi^{-1}g_{\mu,\lambda}\Psi$ .

appartenente a  $G$  si chiama *matrice di Darboux*. Si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} D_{,\mu} &= \tilde{\Psi}_{,\mu}\Psi^{-1} + \tilde{\Psi}(\Psi^{-1})_{,\mu} = \tilde{\Psi}_{,\mu}\Psi^{-1} - \tilde{\Psi}\Psi^{-1}\Psi_{,\mu}\Psi^{-1} \\ &= g_{\mu}\tilde{\Psi}\Psi^{-1} - \tilde{\Psi}\Psi^{-1}g_{\mu} = g_{\mu}D - Dg_{\mu}. \end{aligned}$$

Le soluzioni di una tale equazione differenziale definiscono una cosiddetta *trasformazione di Bäcklund* dalla famiglia di superfici solitoniche (VI.12) alla nuova famiglia di superfici solitoniche

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(x^1, x^2, \lambda) = \tilde{\Psi}(x^1, x^2, \lambda)^{-1}\tilde{\Psi}(x^1, x^2, \lambda)_{,\lambda} \in \mathfrak{g}. \quad (\text{VI.14})$$

Concludiamo con un esercizio semplice. Consideriamo la soluzione  $q \equiv 0$  dell'equazione NLS focusing. In tal caso

$$g_1 = -i\lambda\sigma_3, \quad g_2 = 2i\lambda^2\sigma_3,$$

ambidue appartenenti a  $\mathfrak{g}$  per  $\lambda \in \mathbb{R}$ . In tal caso otteniamo dalla (VI.11)

$$\Psi(x^1, x^2, \lambda) = e^{[-i\lambda x^1 + 2i\lambda^2 x^2]\sigma_3},$$

una matrice diagonale appartenente a  $SU(2)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Quindi

$$\tau(x^1, x^2, \lambda) = \Psi(x^1, x^2, \lambda)^{-1}\Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\lambda} = [-ix^1 + 4i\lambda x^2]\sigma_3 \iff \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 2x^1 - 8\lambda x^2 & \end{pmatrix},$$

la quale rappresenta una famiglia di superfici degeneri.

## 4 Inverse scattering transform per la KdV

In questo paragrafo discuteremo la teoria di scattering dell'equazione di Schrödinger sulla retta, sviluppata da Ludwig Faddeev [11]. Un resoconto della teoria di scattering viene presentata in [8, Cap. XVII]. Tale teoria ci consente, mediante la IST, di risolvere il problema di Cauchy dell'equazione di Korteweg-de Vries.

**1. Soluzioni di Jost.** Consideriamo l'equazione di Schrödinger sulla retta

$$-\psi''(k, x) + Q(x)\psi(k, x) = k^2\psi(k, x), \quad (\text{VI.15})$$

dove  $x \in \mathbb{R}$  è la posizione,  $Q(x)$  è un potenziale reale e  $k$  è un parametro spettrale (essendo  $k$  il numero d'onda e  $k^2$  l'energia). Ci limitiamo a scegliere  $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \cup \mathbb{R}$  (cioè,  $\text{Im } k \geq 0$ ). Il potenziale  $Q(x)$  verifica la cosiddetta *condizione di Faddeev*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + |x|)|Q(x)| < +\infty. \quad (\text{VI.16})$$

Introduciamo le cosiddette *soluzioni di Jost*  $f_l(k, x)$  e  $f_r(k, x)$  che verificano le condizioni asintotiche

$$f_l(k, x) = e^{ikx}[1 + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty, \quad (\text{VI.17a})$$

$$f_r(k, x) = e^{-ikx}[1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{VI.17b})$$

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti si ottengono le equazioni integrali di Volterra

$$e^{-ikx} f_l(k, x) = 1 + \int_x^\infty dy \frac{e^{2ik(y-x)} - 1}{2ik} Q(y) e^{-iky} f_l(k, y), \quad (\text{VI.18a})$$

$$e^{ikx} f_r(k, x) = 1 + \int_{-\infty}^x dy \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik} Q(y) e^{iky} f_r(k, y). \quad (\text{VI.18b})$$

Iterando le due equazioni integrali si può dimostrare il seguente:

- a. Le soluzioni di Jost sono le uniche soluzioni dell'equazione di Schrödinger (VI.15) che verificano le condizioni (VI.16).
- b. Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  la *funzione di Faddeev*  $e^{-ikx} f_l(k, x)$  è continua in  $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ , è analitica in  $k \in \mathbb{C}^+$  e tende ad 1 se  $k \rightarrow \infty$  in  $\overline{\mathbb{C}^+}$  uniformemente in  $x \geq x_0$ .
- c. Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  la *funzione di Faddeev*  $e^{ikx} f_r(k, x)$  è continua in  $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ , è analitica in  $k \in \mathbb{C}^+$  e tende ad 1 se  $k \rightarrow \infty$  in  $\overline{\mathbb{C}^+}$  uniformemente in  $x \leq x_0$ .
- d. Poichè il potenziale  $Q(x)$  è reale e  $[e^{\mp i[k^*]x}]^* = e^{\pm ikx}$ , si ha:

$$f_l(-k^*, x)^* = f_l(k, x), \quad f_r(-k^*, x)^* = f_r(k, x). \quad (\text{VI.19})$$

**2. Coefficienti di scattering.** Studiamo ora l'andamento di  $f_l(k, x)$  se  $x \rightarrow -\infty$  e quello di  $f_r(k, x)$  se  $x \rightarrow +\infty$ . Per  $0 \neq k \in \mathbb{R}$  si ha:

$$f_l(k, x) = \bar{a}(k)e^{ikx} + \bar{b}(k)e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{VI.20a})$$

$$f_r(k, x) = a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (\text{VI.20b})$$

dove

$$\bar{a}(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty dy Q(y) e^{-iky} f_l(k, y),$$

$$\bar{b}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty dy e^{2iky} Q(y) e^{-iky} f_l(k, y),$$

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty dy Q(y) e^{iky} f_r(k, y),$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty dy e^{-2iky} Q(y) e^{iky} f_r(k, y).$$

Quindi  $a(k)$  and  $\bar{a}(k)$  sono continue in  $0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ , sono analitiche in  $k \in \mathbb{C}^+$  e tendono ad 1 se  $k \rightarrow \infty$  in  $\overline{\mathbb{C}^+}$ ; inoltre, esistono finiti i limiti di  $k[1 - a(k)]$  e  $k[1 - \bar{a}(k)]$  se  $k \rightarrow 0$  in  $\overline{\mathbb{C}^+}$ . D'altra parte,  $b(k)$  e  $\bar{b}(k)$  sono continue in  $0 \neq k \in \mathbb{R}$  e tendono a zero se  $k \rightarrow \pm\infty$ ; inoltre, esistono finiti i limiti di  $kb(k)$  e  $k\bar{b}(k)$  se  $k \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, utilizzando (VI.19) si ha:

$$a(-k^*)^* = a(k), \quad \bar{a}(-k^*)^* = \bar{a}(k), \quad (\text{VI.21a})$$

$$b(-k)^* = b(k), \quad \bar{b}(-k) = \bar{b}(k), \quad (\text{VI.21b})$$

dove (VI.21a) vale per  $0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}$  e (VI.21b) vale per  $0 \neq k \in \mathbb{R}$ .

È facile dimostrare che il Wronskiano

$$W[\psi, \phi] = \det \begin{pmatrix} \psi(k, x) & \phi(k, x) \\ \psi'(k, x) & \phi'(k, x) \end{pmatrix}$$

di due soluzioni  $\psi(k, x)$  e  $\phi(k, x)$  dell'equazione di Schrödinger (VI.15) non dipende da  $x \in \mathbb{R}$ .<sup>4</sup> Utilizzando le espressioni asintotiche per i Wronskiani per  $x \rightarrow \pm\infty$  si ha:

$$W[f_l(k, x), f_r(k, x)] = -2ika(k) = -2ik\bar{a}(k), \quad (\text{VI.22a})$$

$$W[f_r(k, x), f_r(-k, x)] = 2ik[a(k)a(-k) - b(k)b(-k)] = 2ik, \quad (\text{VI.22b})$$

$$W[f_l(k, x), f_l(-k, x)] = -2ik = -2ik[\bar{a}(k)\bar{a}(-k) - \bar{b}(k)\bar{b}(-k)], \quad (\text{VI.22c})$$

$$W[f_l(k, x), f_r(-k, x)] = -2ikb(-k) = 2ik\bar{b}(k). \quad (\text{VI.22d})$$

Dalla(VI.22a) segue che le soluzioni di Jost  $f_l(0, x)$  e  $f_r(0, x)$  per  $k = 0$  sono linearmente indipendenti se e solo se  $\lim_{k \rightarrow 0} [ka(k)] \neq 0$  (*caso generico*), mentre se  $\lim_{k \rightarrow 0} [ka(k)] = 0$  (*caso eccezionale*), le funzioni  $f_l(0, x)$  e  $f_r(0, x)$  sono proporzionali. Dalle equazioni (VI.22b)-(VI.22d) segue che

$$\begin{cases} \bar{a}(k) = a(k), & 0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}, \\ |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, & 0 \neq k \in \mathbb{R}, \\ |\bar{a}(k)|^2 - |\bar{b}(k)|^2 = 1, & 0 \neq k \in \mathbb{R}. \\ \bar{b}(k) = -b(k)^*, & 0 \neq k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Di conseguenza,  $a(k) \neq 0$  per  $0 \neq k \in \mathbb{R}$ .

Definiamo il *coefficiente di trasmissione*  $T(k)$  e i due *coefficienti di riflessione*  $R(k)$  e  $L(k)$  nel seguente modo:

$$T(k) = \frac{1}{a(k)} = \frac{1}{\bar{a}(k)}, \quad R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad L(k) = \frac{\bar{b}(k)}{\bar{a}(k)}.$$

<sup>4</sup>Infatti,  $\frac{d}{dx}W[\psi, \phi] = (\psi\phi' - \psi'\phi)' = \psi\phi'' - \psi''\phi = \psi(Q - k^2)\phi - (Q - k^2)\psi\phi = 0$ .

Allora  $T(k)$  è una funzione meromorfa in  $k \in \mathbb{C}^+$ . Inoltre,

$$\begin{cases} T(-k^*)^* = T(k), & 0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}, k \text{ non è polo,} \\ R(-k)^* = R(k), & 0 \neq k \in \mathbb{R}, \\ L(-k)^* = L(k), & 0 \neq k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Infine, la *matrice di scattering*

$$S(k) = \begin{pmatrix} T(k) & R(k) \\ L(k) & T(k) \end{pmatrix}$$

è unitaria per  $k \in \mathbb{R}$ .<sup>5</sup>

**3. Problema di Riemann-Hilbert.** Dalla relazione Wronskiana (VI.22a) segue che le soluzioni di Jost  $f_l(k, x)$  e  $f_r(k, x)$  sono linearmente indipendenti per  $k \in \mathbb{R}$  nel caso generico e per  $0 \neq k \in \mathbb{R}$  nel caso eccezionale. Per tali valori di  $k$  esiste una trasformazione di base

$$\begin{pmatrix} f_l(-k, x) \\ f_r(-k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(k) & \alpha_{12}(k) \\ \alpha_{21}(k) & \alpha_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r(k, x) \\ f_l(k, x) \end{pmatrix},$$

dove i coefficienti  $\alpha_{11}(k)$ ,  $\alpha_{12}(k)$ ,  $\alpha_{21}(k)$  e  $\alpha_{22}(k)$  devono essere determinati. Utilizzando le proprietà asintotiche delle soluzioni di Jost per  $x \rightarrow +\infty$ , si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_{11}(k)a(k), \\ 0 &= \alpha_{11}(k)b(k) + \alpha_{12}(k), \\ a(-k) &= \alpha_{21}(k)a(k), \\ a(-k) &= \alpha_{21}(k)b(k) + \alpha_{22}(k). \end{aligned}$$

Quindi  $\alpha_{11}(k) = [1/a(k)] = T(k)$ ,  $\alpha_{12}(k) = -[b(k)/a(k)] = -R(k)$ ,  $\alpha_{21}(k) = [b(-k)/a(k)] = -[\bar{b}(k)/\bar{a}(k)] = -L(k)$ ,  $\alpha_{22}(k) = [a(k)a(-k) - b(-k)b(k)]/a(k) = [|a(k)|^2 - |b(k)|^2]/a(k) = [1/a(k)] = T(k)$ . Di conseguenza, si ha:

$$\begin{pmatrix} f_l(-k, x) \\ f_r(-k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(k) & -R(k) \\ -L(k) & T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r(k, x) \\ f_l(k, x) \end{pmatrix}.$$

Prendendo in considerazione i comportamenti asintotici delle soluzioni di Jost per  $k \rightarrow \infty$ , si ha il cosiddetto *problema di Riemann-Hilbert*:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{ikx} f_l(-k, x) \\ e^{-ikx} f_r(-k, x) \end{pmatrix}}_{\text{analitica in } k \in \mathbb{C}^-} = \underbrace{\begin{pmatrix} T(k) & -e^{2ikx} R(k) \\ -e^{-2ikx} L(k) & T(k) \end{pmatrix}}_{=\sigma_3 S(k; x) \sigma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{ikx} f_r(k, x) \\ e^{-ikx} f_l(k, x) \end{pmatrix}}_{\text{analitica in } k \in \mathbb{C}^+}, \quad (\text{VI.23})$$

<sup>5</sup>Gli elementi  $T(k)$ ,  $R(k)$  e  $L(k)$  della matrice di scattering  $S(k)$  sono continui in  $k \in \mathbb{R}$ , anche se  $k \rightarrow 0$ . Non dimostriamo questo fatto. Lo studio delle proprietà asintotiche delle soluzioni di Jost e dei coefficienti di scattering per  $k \rightarrow 0$  è abbastanza impegnativo, in particolare nel caso eccezionale.

dove  $S(k; x) = \text{diag}(e^{ikx}, e^{-ikx})S(k)\text{diag}(e^{-ikx}, e^{ikx})$ .

**4. Equazione integrale di Marchenko.** Prima di dedurre tale equazione si studiamo gli autovalori discreti dell'equazione di Schrödinger (VI.15).

**Proposizione VI.4** *Gli zeri di  $a(k)$  sono immaginari, semplici e finiti in numero. Quindi, questi zeri possono essere enumerati  $i\kappa_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), dove  $\kappa_1 > \dots > \kappa_N > 0$ .*

*Dimostrazione.* Omettiamo la dimostrazione del fatto che gli zeri sono semplici e, nel caso eccezionale, sono finiti in numero.

Sia  $a(k) = 0$  per  $k = \gamma + i\kappa \in \mathbb{C}^+$ , dove  $\kappa > 0$ . Dalla relazione Wronskiana (VI.22a) segue che  $f_l(k, x)$  e  $f_r(k, x)$  sono proporzionali:  $f_l(k, x) = C f_r(k, x)$  per un'opportuna costante  $C \neq 0$ . Più esplicitamente, possiamo scrivere

$$\begin{cases} f_l(k, x) \sim e^{i\gamma x} e^{-\kappa x}, & x \rightarrow +\infty, \\ f_l(k, x) \sim C e^{-i\gamma x} e^{\kappa x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

e quindi  $f_l(k, x)$  ha decadimento esponenziale per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Ma in tal caso l'equazione di Schrödinger (VI.15) ha un autovalore  $k^2$  che deve per forza essere negativo. Di conseguenza, gli zeri di  $a(k)$  sono immaginari:  $k = i\kappa$  per un'opportuna  $\kappa > 0$ .

Per motivi di analiticità, gli zeri di  $a(k)$  si possono soltanto accumulare in zero e soltanto se ci sono infiniti zeri. Quest'ultimo non avviene nel caso generico, per cui  $\lim_{k \rightarrow 0} [ka(k)] \neq 0$ .  $\square$

Il coefficiente di trasmissione ammette la seguente rappresentazione:

$$T(k) = T_0(k) + \sum_{s=1}^N \frac{\tau_s}{k - i\kappa_s},$$

dove  $T_0(k)$  è continua in  $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ , è analitica in  $k \in \mathbb{C}^+$  e tende ad 1 per  $k \rightarrow \infty$  in  $\overline{\mathbb{C}^+}$ .

Il problema di Riemann-Hilbert (VI.23) implica:

$$\begin{aligned} e^{ikx} f_l(-k, x) &= T(k) e^{ikx} f_r(k, x) - e^{2ikx} R(k) [e^{-ikx} f_l(k, x)] \\ &= T_0(k) e^{ikx} f_r(k, x) + \sum_{s=1}^N \tau_s \frac{e^{ikx} f_r(k, x) - e^{-\kappa_s x} f_r(i\kappa_s, x)}{k - i\kappa_s} \\ &\quad + i \sum_{s=1}^N \frac{N_s e^{-2\kappa_s x} [e^{\kappa_s x} f_l(i\kappa_s, x)]}{k - i\kappa_s} - e^{2ikx} R(k) [e^{-ikx} f_l(k, x)], \end{aligned}$$

dove, per opportune *costanti di normalizzazione*  $N_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), si è posto<sup>6</sup>

$$\tau_s f_r(i\kappa_s, x) = iN_s f_l(i\kappa_s, x).$$

Rappresentiamo ora la soluzione di Jost  $f_l(k, x)$  e il coefficiente di riflessione  $R(k)$  tramite i seguenti integrali di Fourier:<sup>7</sup>

$$f_l(k, x) = e^{ikx} + \int_x^\infty dy e^{iky} K(x, y), \quad (\text{VI.24a})$$

$$R(k) = \int_{-\infty}^\infty d\alpha e^{-ik\alpha} \hat{R}(\alpha). \quad (\text{VI.24b})$$

Sostituendo (VI.24) nel problema di Riemann-Hilbert e osservando che la seconda riga della parte a destra ammette la rappresentazione di Fourier  $1 + \int_{-\infty}^0 dw e^{-ikw} f(x, w)$  per un'opportuna funzione  $f(x, w)$ , si ha:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^\infty dw e^{-ikw} K(x, x+w) &= 1 + \int_{-\infty}^0 dw e^{-ikw} f(x, w) \\ &- \int_0^\infty dw e^{-ikw} \sum_{s=1}^N N_s \left[ e^{-\kappa_s(w+2x)} + \int_0^\infty dz e^{-\kappa_s(w+z+2x)} K(x, x+z) \right] \\ &- \int_{-\infty}^\infty dw e^{-ikw} \left[ \hat{R}(w+2x) + \int_0^\infty dz \hat{R}(w+z+2x) K(x, x+z) \right]. \end{aligned}$$

Limitandoci ai termini  $\int_0^\infty dw [\dots]$  e strippando la trasformata di Fourier, per  $w \geq 0$  si ottiene l'equazione integrale

$$\begin{aligned} K(x, x+w) &= - \sum_{s=1}^N N_s e^{-\kappa_s(w+2x)} + \int_0^\infty dz \sum_{s=1}^N N_s e^{-\kappa_s(w+z+2x)} K(x, x+z) \\ &- \hat{R}(w+2x) - \int_0^\infty dz \hat{R}(w+z+2x) K(x, x+z). \end{aligned}$$

Introducendo il *nucleo di Marchenko*

$$\Omega(w) = \hat{R}(w) + \sum_{s=1}^N N_s e^{-\kappa_s w}, \quad (\text{VI.25})$$

si perviene all'*equazione integrale di Marchenko*

$$K(x, y) + \Omega(x+y) + \int_x^\infty dz K(x, z) \Omega(z+y) = 0, \quad y > x. \quad (\text{VI.26})$$

<sup>6</sup>Si può dimostrare che le costanti di normalizzazione sono tutte positive. La dimostrazione si basa su: (a) la semplicità dei poli di  $T(k)$ , (b) la relazione di simmetria  $T(-k^*)^* = T(k)$ , e (c) il fatto che, per  $s = 1, \dots, N$ ,  $f_l(i\kappa_s, x)$  ha  $s-1$  zeri reali, tutti semplici.

<sup>7</sup>Abbiamo anche  $f_r(k, x) = e^{-ikx} + \int_0^\infty dy e^{-iky} M(x, y)$  e  $L(k) = \int_{-\infty}^\infty d\alpha e^{ik\alpha} \hat{L}(\alpha)$ .

Rimane da dedurre un'espressione per il potenziale  $Q(x)$  una volta che sia nota la soluzione  $K(x, y)$  di (VI.26). Sostituendo (VI.24a) in (VI.18a) si ha:

$$\begin{aligned}
& 1 + \int_0^\infty dw e^{ikw} K(x, x+w) \\
&= 1 + \int_x^\infty dy \int_x^y dv e^{2ik(v-x)} Q(y) \left[ 1 + \int_0^\infty dz e^{ikz} K(y, y+z) \right] \\
&= 1 + \frac{1}{2} \int_0^\infty dw e^{ikw} \int_{x+\frac{1}{2}w}^\infty dy Q(y) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty dw e^{ikw} \int_0^w dz \int_{x+\frac{1}{2}(w-z)}^\infty dy Q(y) K(y, y+z).
\end{aligned}$$

Strippando la trasformata di Fourier, per  $w \geq 0$  si ottiene:

$$K(x, x+w) = \frac{1}{2} \int_{x+\frac{1}{2}w}^\infty dy Q(y) + \frac{1}{2} \int_0^w dz \int_{x+\frac{1}{2}(w-z)}^\infty dy Q(y) K(y, y+z),$$

e quindi per  $w \rightarrow 0^+$  si ha

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty dy Q(y).$$

Poichè  $Q \in L^1(\mathbb{R})$ , la funzione  $K(x, x)$  è assolutamente continua (nel senso che è continua e derivabile quasi ovunque, con la derivata appartenente a  $L^1(a, b)$  per ogni intervallo limitato  $(a, b)$ ). Di conseguenza,

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (\text{VI.27})$$

**5. Evoluzione nel tempo.** Senza entrare nei dettagli, elenchiamo l'evoluzione temporale delle diverse quantità se il potenziale  $Q(x, t)$  evolve nel tempo come se fosse una soluzione dell'equazione di Korteweg-de Vries.

- a. Gli autovalori discreti e quindi i poli  $i\kappa_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) non dipendono da  $t$ . Non dipende da  $t$  neppure il coefficiente di trasmissione  $T(k)$ .
- b.  $R(k; t) = e^{8ik^3t} R(k; 0)$  e  $L(k; t) = e^{-8ik^3t} L(k; 0)$ .
- c.  $N_s(t) = e^{8\kappa_s^3t} N_s(0)$  per  $s = 1, 2, \dots, N$ .
- d. Il nucleo di Marchenko soddisfa la seguente equazione

$$\Omega_t + 8\bar{\Omega}_{xxx} = 0.$$

In forma schematica la IST può essere descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(k), \{\kappa_j, N_j\}_{j=1}^N\} \\
\text{KdV} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\
u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(k)e^{8ik^3t}, \{\kappa_j, N_j e^{8\kappa_j^3t}\}_{j=1}^N\}
\end{array}$$

**Esempio VI.5 (Soluzione monosolitone)** Consideriamo il nucleo di Marchenko

$$\Omega(x; t) = N_1 e^{-\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t},$$

dove  $\kappa_1$  e  $N_1$  sono costanti positive. Dalla (VI.26) segue

$$K(x, y; t) = -N_1 e^{-\kappa_1 y} e^{8\kappa_1^3 t} \underbrace{\left[ e^{-\kappa_1 x} + \int_x^\infty dz e^{-\kappa_1 z} K(x, z; t) \right]}_{=L(x; t)}.$$

Dunque,

$$L(x; t) = e^{-\kappa_1 x} - N_1 e^{8\kappa_1^3 t} L(x; t) \int_x^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = e^{-\kappa_1 x} - \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t} L(x; t),$$

e quindi

$$L(x; t) = \frac{e^{-\kappa_1 x}}{1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}}.$$

Di conseguenza,

$$K(x, y; t) = -\frac{N_1 e^{-\kappa_1(x+y)} e^{8\kappa_1^3 t}}{1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}},$$

e, usando la (VI.24a),

$$\begin{aligned}
f_l(k, x; t) &= e^{ikx} \left[ 1 - \frac{iN_1 e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}}{(k + i\kappa_1) \left[ 1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t} \right]} \right] \\
&= e^{ikx} \left[ \frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1} + \frac{2i\kappa_1}{k + i\kappa_1} \frac{1}{1 + \frac{2\kappa_1}{N_1} e^{2\kappa_1 x} e^{-8\kappa_1^3 t}} \right] = e^{ikx} \left[ \frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1} + o(1) \right],
\end{aligned}$$

se  $x \rightarrow -\infty$ . Quindi  $T(k; t) = \frac{k+i\kappa_1}{k-i\kappa_1}$  e  $R(k; t) = L(k; t) = 0$ . Inoltre, tramite la (VI.27),

$$Q(x; t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t) = \frac{-4\kappa_1 N_1 e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}}{\left[ 1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t} \right]^2} = \frac{-2\kappa_1^2}{\cosh^2[\kappa_1(x - x_0 - 4\kappa_1^2 t)]},$$

essendo  $x_0 = [\ln(N_1/2\kappa_1)]/2\kappa_1$ . Si vede che  $Q(x, t)$  rappresenta un solitone con ampiezza  $2\kappa_1^2$  e velocità  $4\kappa_1^2$ .  $\square$

## 5 Inverse scattering transform per la NLS

In questo paragrafo discuteremo la teoria di scattering del sistema di Zakharov-Shabat (ZS) e la risoluzione dell'equazione nonlineare di Schrödinger mediante l'inverse scattering transform.

**1. Soluzioni di Jost.** Consideriamo il sistema di Zakharov-Shabat

$$i\sigma_3 \frac{\partial X}{\partial x}(x, \lambda) - iQ(x)X(x, \lambda) = \lambda X(x, \lambda), \quad (\text{VI.28})$$

dove

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ r(x) & 0 \end{pmatrix},$$

i potenziali  $q(x)$  e  $r(x)$  appartengono a  $L^1(\mathbb{R})$  e  $\lambda$  è un parametro spettrale. Nel caso *defocusing* si ha  $r(x) = -q(x)^*$ ; nel caso *focusing* si ha  $r(x) = q(x)^*$ .

Per  $\lambda \in \mathbb{R}$  definiamo ora le cosiddette *funzioni di Jost dalla destra*  $\bar{\psi}(x, \lambda)$  e  $\psi(x, \lambda)$ , le cosiddette *funzioni di Jost dalla sinistra*  $\phi(x, \lambda)$  e  $\bar{\phi}(x, \lambda)$  e le *matrici di Jost*  $\Psi(x, \lambda)$  e  $\Phi(x, \lambda)$  come le soluzioni della (VI.25) che verificano le seguenti condizioni asintotiche:

$$\Psi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}(x, \lambda) & \psi(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} e^{-i\lambda x \sigma_3} [I_2 + o(1)], & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-i\lambda x \sigma_3} [a_l(\lambda) + o(1)], & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (\text{VI.29a})$$

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi(x, \lambda) & \bar{\phi}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} e^{-i\lambda x \sigma_3} [a_r(\lambda) + o(1)], & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-i\lambda x \sigma_3} [I_2 + o(1)], & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (\text{VI.29b})$$

Siccome il sistema di equazioni (VI.28) è di primo ordine, valgono le relazioni di proporzionalità

$$\Phi(\lambda, x) = \Psi(x, \lambda) a_l(\lambda), \quad \Psi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) a_r(\lambda), \quad (\text{VI.30})$$

per opportune *matrici di transizione*  $a_l(\lambda)$  e  $a_r(\lambda)$ . Ovviamente

$$a_l(\lambda) a_r(\lambda) = a_r(\lambda) a_l(\lambda) = I_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Scrivendo (VI.28) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} X(y, \lambda) \right) = \sigma_3 e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} Q(y) X(y, \lambda)$$

e integrando rispetto ad  $y$ , si ha:

$$\Psi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x \sigma_3} - \sigma_3 \int_x^\infty dy e^{i\lambda(y-x)\sigma_3} Q(y) \Psi(y, \lambda), \quad (\text{VI.31a})$$

$$\Phi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x \sigma_3} + \sigma_3 \int_{-\infty}^x dy e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} Q(y) \Phi(y, \lambda). \quad (\text{VI.31b})$$

Iterando le due equazioni integrali (VI.31) si può dimostrarne l'esistenza della soluzione unica e la stima

$$\begin{aligned}\|\Psi(x, \lambda)\| &\leq \exp\left(\int_x^\infty dy \|Q(y)\|\right), \\ \|\Phi(x, \lambda)\| &\leq \exp\left(\int_{-\infty}^x dy \|Q(y)\|\right).\end{aligned}$$

Convertendo le due equazioni integrale (VI.31) in due famiglie di due equazioni integrali per ciascuna funzione di Jost, si ottengono le loro proprietà di continuità e analicità. Infatti, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  le funzioni colonna  $e^{-i\lambda x}\psi(x, \lambda)$  e  $e^{i\lambda x}\phi(x, \lambda)$  sono continue in  $\lambda \in \overline{\mathbb{C}^+}$ , sono analitiche in  $\lambda \in \mathbb{C}^+$  e tendono a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  rispettivamente se  $\lambda \rightarrow \infty$  dal semipiano superiore chiuso. Analogamente, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  le funzioni colonna  $e^{i\lambda x}\bar{\psi}(x, \lambda)$  e  $e^{-i\lambda x}\bar{\phi}(x, \lambda)$  sono continue in  $\lambda \in \overline{\mathbb{C}^-}$ , sono analitiche in  $\lambda \in \mathbb{C}^-$  e tendono a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  rispettivamente se  $\lambda \rightarrow \infty$  dal semipiano inferiore chiuso.

Scrivendo il sistema di Zakharov-Shabat (VI.28) nella forma

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x, \lambda) = [-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)]X(x, \lambda),$$

si osservi che per  $\lambda \in \mathbb{R}$  la matrice  $-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)$  è antihermitiana nel caso focusing e  $\sigma_3$ -antihermitiana (cioè,  $\sigma_3[-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)]$  è antihermitiana) nel caso defocusing. Inoltre,  $\text{Tr}[-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)] = 0$ . Di conseguenza, per  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$  le matrici di Jost sono unitarie e hanno il determinante uguale ad 1 nel caso focusing [cioè,  $\Psi(x, \lambda) \in SU(2)$  e  $\Phi(x, \lambda) \in SU(2)$ ]. Nel caso defocusing esse sono  $\sigma_3$ -unitarie e hanno il determinante uguale ad 1 [cioè,  $\Psi(x, \lambda) \in SU(1, 1)$  e  $\Phi(x, \lambda) \in SU(1, 1)$ ].<sup>8</sup>

Valgono le seguenti *rappresentazioni triangolari*

$$\Psi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} + \int_x^\infty dy \mathbf{K}(x, y)e^{-i\lambda y\sigma_3}, \quad (\text{VI.32a})$$

$$\Phi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} + \int_{-\infty}^x dy \mathbf{M}(x, y)e^{-i\lambda y\sigma_3}, \quad (\text{VI.32b})$$

dove per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha:

$$\int_x^\infty dy \|\mathbf{K}(x, y)\| + \int_{-\infty}^x dy \|\mathbf{M}(x, y)\| < +\infty.$$

---

<sup>8</sup> $SU(1, 1)$  è il gruppo di Lie di tutte le matrici complesse  $U$  tali che  $U^\dagger\sigma_3U = \sigma_3$  e  $\det U = 1$ , essendo  $U^\dagger$  la trasposta coniugata di  $U$ . La corrispondente algebra di Lie  $\mathfrak{su}(1, 1)$  consiste in tutte le matrici complesse  $A$  per cui  $\sigma_3 A$  è antihermitiana.

Convertendo le equazioni di Volterra (VI.31) in equazioni di Volterra per le funzioni nucleo  $\mathbf{K}(x, y)$  e  $\mathbf{M}(x, y)$ , si possono dimostrare le seguenti identità:

$$q(x) = -2K_{12}(x, x), \quad r(x) = 2K_{21}(x, x), \quad (\text{VI.33a})$$

$$\int_x^\infty dz r(z)q(z) = -2K_{22}(x, x) = -2K_{11}(x, x). \quad (\text{VI.33b})$$

Nella stessa maniera si dimostra che

$$q(x) = 2M_{12}(x, x), \quad r(x) = -2K_{21}(x, x), \quad (\text{VI.34a})$$

$$\int_x^\infty dz r(z)q(z) = -2M_{22}(x, x) = -2M_{11}(x, x). \quad (\text{VI.34b})$$

**2. Equazioni di Marchenko.** Riordinando le equazioni (VI.30), si ottiene

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}(x, \lambda) & \bar{\phi}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x, \lambda) & \psi(x, \lambda) \end{pmatrix} \sigma_3 S(\lambda) \sigma_3, \quad (\text{VI.35})$$

dove  $S(\lambda)$  si dice *matrice di scattering*, la parte a sinistra è continua in  $\lambda \in \mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$  e analitica in  $\lambda \in \mathbb{C}^-$  e il fattore sinistro della parte a destra è continuo in  $\lambda \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$  e analitico in  $\lambda \in \mathbb{C}^+$ . La matrice di scattering ha la forma

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T(\lambda) & L(\lambda) \\ R(\lambda) & T(\lambda) \end{pmatrix},$$

dove  $T(\lambda)$ , detta *coefficiente di trasmissione*, è meromorfa in  $\lambda \in \mathbb{C}^+$  e  $R(\lambda)$  e  $L(\lambda)$ , dette *coefficienti di riflessione*, sono continue in  $\lambda \in \mathbb{R}$  e tendono a zero se  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ .<sup>9</sup> Scrivendo

$$R(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty dy e^{-i\lambda y} \rho(y), \quad L(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty dy e^{i\lambda y} \ell(y),$$

dove  $\rho, \ell \in L^1(\mathbb{R})$ , si possono dedurre le *equazioni di Marchenko*

$$\mathbf{K}(x, y) + \boldsymbol{\omega}_l(x + y) + \int_x^\infty dz \mathbf{K}(x, z) \boldsymbol{\omega}_l(z + y) = 0_{2 \times 2}, \quad (\text{VI.36a})$$

$$\mathbf{M}(x, y) + \boldsymbol{\omega}_r(x + y) + \int_{-\infty}^x dz \mathbf{M}(x, z) \boldsymbol{\omega}_r(z + y) = 0_{2 \times 2}, \quad (\text{VI.36b})$$

dove  $\boldsymbol{\omega}_l(x + y)$  e  $\boldsymbol{\omega}_r(x + y)$  anticommutano con  $\sigma_3$  (cioè, sono matrici con elementi diagonali uguali a zero). Nel caso defocusing si ha

$$\boldsymbol{\omega}_l(x + y)^\dagger = \boldsymbol{\omega}_l(y + x), \quad \boldsymbol{\omega}_r(x + y)^\dagger = \boldsymbol{\omega}_r(y + x).$$

---

<sup>9</sup>Ciò richiede l'ipotesi che gli elementi diagonali delle matrici di transizione  $a_l(\lambda)$  e  $a_r(\lambda)$  non si annullino. Nel caso defocusing l'ipotesi è sempre vera. Non è necessariamente vera nel caso focusing.

Nel caso focusing si ha invece

$$\omega_l(x+y)^\dagger = -\omega_l(y+x), \quad \omega_r(x+y)^\dagger = -\omega_r(y+x).$$

Nel caso defocusing si ha:

$$\omega_l(x+y) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y)^* \\ \rho(x+y) & 0 \end{pmatrix},$$

dove  $R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\lambda y} \rho(y)$  verifica  $|R(\lambda)| < 1$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nel caso focusing si ha invece:<sup>10</sup>

$$\omega_l(x+y) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y) + \sum_j c_j e^{i\lambda_j(x+y)} \\ -\rho(x+y)^* - \sum_j c_j^* e^{-i\lambda_j^*(x+y)} & 0 \end{pmatrix},$$

dove la sommatoria consiste in un numero finito di termini e le costanti di normalizzazione  $c_j \neq 0$  e gli esponenti  $\lambda_j$  hanno parte immaginaria positiva.

Gli esponenti  $\lambda_j$  sono gli autovalori discreti del problema di Zakharov-Shabat (VI.28) nel semipiano superiore. Infatti, le funzioni di Jost  $\psi(x, \lambda_j)$  e  $\phi(x, \lambda_j)$  sono proporzionali e costituiscono la corrispondente autofunzione. Le costanti di normalizzazione  $c_j$  sono legate alle corrispondenti costanti di proporzionalità tra  $\psi(x, \lambda_j)$  e  $\phi(x, \lambda_j)$ .

**3. Inverse scattering transform.** La IST per l'equazione nonlineare di Schrödinger

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2 r = 0, \quad (\text{VI.37a})$$

$$-ir_t + r_{xx} + 2qr^2 = 0, \quad (\text{VI.37b})$$

consiste nei seguenti passaggi:

1. **Scattering diretto.** A partire dai potenziali iniziali  $q(x, 0)$  e  $r(x, 0)$  si calcoli la matrice di Jost  $\Psi(x, \lambda)$  e da essa, mediante la trasformata di Fourier, la funzione nucleo  $\mathbf{K}(x, y)$ . Poi si calcolino il coefficiente di riflessione  $R(\lambda)$ , gli autovalori discreti  $\lambda_j \in \mathbb{C}^+$  e le corrispondenti costanti di normalizzazione  $c_j$ .
2. **Evoluzione temporale.** Si evolvono nel tempo il coefficienti di riflessione e le costanti di normalizzazione:

$$R(\lambda; t) = e^{4i\lambda^2 t} R(\lambda; t=0), \quad c_j(t) = e^{4i\lambda_j^2 t} c_j(t=0).$$

---

<sup>10</sup>In generale, la sommatoria è  $\sum_j \sum_{s=0}^{n_j-1} \frac{(x+y)^s}{s!} e^{i\lambda_j(x+y)}$ . Nel presente contesto abbiamo semplificato la discussione delle equazioni di Marchenko.

3. **Scattering inverso.** Si costruisca il nucleo di Marchenko:

$$\boldsymbol{\omega}_l(x+y; t) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y; t) \\ \rho(x+y; t)^* & 0 \end{pmatrix}$$

nel caso defocusing e

$$\boldsymbol{\omega}_l(x+y; t) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y; t) + \sum_j c_j(t) e^{i\lambda_j(x+y)} \\ -\rho(x+y; t)^* - \sum_j c_j(t)^* e^{-i\lambda_j^*(x+y)} & 0 \end{pmatrix}$$

nel caso focusing, dove

$$R(\lambda; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\lambda y} \rho(y; t).$$

Poi si risolve l'equazione di Marchenko

$$\mathbf{K}(x, y; t) + \boldsymbol{\omega}_l(x+y; t) + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z; t) \boldsymbol{\omega}_l(z+y; t) = 0_{2 \times 2}.$$

Infine si calcolino

$$q(x; t) = -2\mathbf{K}_{12}(x, x), \quad r(x; t) = 2\mathbf{K}_{21}(x, x).$$

4. **La soluzione solitonica.** In tal caso i coefficienti di riflessione si annullano:  $R(\lambda) \equiv L(\lambda) = 0$ . Inoltre, esiste un singolo autovalore discreto  $\lambda_1 = ia = i(p+iq) \in \mathbb{C}^+$  [con  $p, q \in \mathbb{R}$  e  $p > 0$ ] con corrispondente costante di normalizzazione  $0 \neq c \in \mathbb{C}$ . Inoltre, ci troviamo nel caso focusing.

L'equazione di Marchenko ha la forma

$$\mathbf{K}(x, y; t) + \boldsymbol{\omega}_l(x+y; t) + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z; t) \boldsymbol{\omega}_l(z+y; t) = 0_{2 \times 2}, \quad (\text{VI.38})$$

dove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_l(x+y; t) &= \begin{pmatrix} 0 & ce^{-a(x+y)} e^{-4ia^2t} \\ -c^* e^{-a^*(x+y)} e^{4i[a^*]^2t} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ce^{-ax} e^{-4ia^2t} \\ -c^* e^{-a^*x} e^{4i[a^*]^2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a^*y} & 0 \\ 0 & e^{-ay} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Risolviamo ora la (VI.38). Si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(x, y; t) &= - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & ce^{-ax} e^{-4ia^2t} \\ -c^* e^{-a^*x} e^{4i[a^*]^2t} & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z; t) \begin{pmatrix} 0 & ce^{-az} e^{-4ia^2t} \\ -c^* e^{-a^*z} e^{4i[a^*]^2t} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e^{-a^*y} & 0 \\ 0 & e^{-ay} \end{pmatrix} \\ &= -L(x, t) \begin{pmatrix} e^{-a^*y} & 0 \\ 0 & e^{-ay} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove

$$L(x, t) \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2p} e^{-2px} e^{-4ia^2 t} \\ -\frac{c^*}{2p} e^{-2px} e^{4i[a^*]^2 t} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ce^{-ax} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^* x} e^{4i[a^*]^2 t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando che

$$\det L(x, t) = 1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4px} e^{16pqt} = 1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4p(x-4qt)} > 0,$$

si ottiene

$$L(x, t) = \frac{1}{\det L(x, t)} \begin{pmatrix} \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-a^* x} e^{16pqt} & ce^{-ax} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^* x} e^{4i[a^*]^2 t} & \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-ax} e^{16pqt} \end{pmatrix}.$$

La funzione nucleo  $\mathbf{K}(x, y; t)$  ha la forma

$$\mathbf{K}(x, y; t) = \frac{-1}{\det L(x, t)} \begin{pmatrix} \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-a^*(x+y)} e^{16pqt} & ce^{-a(x+y)} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^*(x+y)} e^{4i[a^*]^2 t} & \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-a(x+y)} e^{16pqt} \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la (VI.33a) si arriva alla soluzione NLS

$$q(x, t) = \frac{2ce^{-2ax} e^{-4ia^2 t}}{1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4p(x-4qt)}} = \frac{2ce^{-2p(x-4qt)} e^{-2iqx} e^{-4i(p^2-q^2)t}}{1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4p(x-4qt)}}. \quad (\text{VI.39})$$

Moltiplicando numeratore e denominatore da  $\frac{2p}{|c|} e^{2p(x-4qt)}$  e ponendo  $x_0 = \frac{1}{2p} \ln(|c|/2p)$ , si ottiene infine la soluzione solitonica

$$\boxed{q(x, t) = \frac{c}{|c|} \frac{2p e^{-2iqx} e^{-4i(p^2-q^2)t}}{\cosh[2p(x - x_0 - 4qt)]}}, \quad (\text{VI.40})$$

dove il fattore  $c/|c|$  può essere tralasciato.

# Appendice A

## 3-ciclo implica caos

Nel 1964 Šarkovs'kii [23] ha dimostrato il teorema di cui omettiamo la dimostrazione.<sup>1</sup> Introduciamo il seguente ordinamento dei numeri naturali:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & \triangleleft & 2 & \triangleleft & 2^2 & \triangleleft & 2^3 & \triangleleft & 2^4 & \triangleleft & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 2^3 \cdot 9 & \triangleleft & 2^3 \cdot 7 & \triangleleft & 2^3 \cdot 5 & \triangleleft & 2^3 \cdot 3 \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 2^2 \cdot 9 & \triangleleft & 2^2 \cdot 7 & \triangleleft & 2^2 \cdot 5 & \triangleleft & 2^2 \cdot 3 \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 2 \cdot 9 & \triangleleft & 2 \cdot 7 & \triangleleft & 2 \cdot 5 & \triangleleft & 2 \cdot 3 \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 9 & \triangleleft & 7 & \triangleleft & 5 & \triangleleft & 3.
 \end{array}$$

**Teorema A.1 (Šarkovs'kii)** *Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e supponiamo che la  $F$  abbia un  $k$ -ciclo. Allora la  $F$  ha un  $l$ -ciclo per ogni intero  $l$  tale che  $l \triangleleft k$ . In particolare, se esiste un 3-ciclo per la  $F$ , allora esiste un  $l$ -ciclo per qualunque intero  $l$ .*

Il teorema implica l'esistenza di un ciclo di periodo doppio  $2p$  se ne esiste uno di periodo  $p$  se essa non è una potenza di due. Inoltre, se esiste un ciclo di periodo  $p = 2^m q$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, q > 1$  dispari), allora esiste un ciclo di periodo  $2^n r$  per qualunque  $n = 0, 1, 2, \dots$  e qualunque numero dispari  $r > q$ . Il teorema non vale per le mappe  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  multidimensionali.

**Esempio A.2** Sia  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$F(x) = \frac{1-x}{1+ax}$$

per un'opportuna costante  $a > 0$ . In tal caso  $\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}$  è l'unico punto fisso. Inoltre,

$$F^2(x) = F(F(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+ax}}{1 + a \frac{1-x}{1+ax}} = x.$$

<sup>1</sup>Una dimostrazione elementare si trova in [19, 7].

Dunque, tutti i punti di  $[0, 1]$  tranne  $\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}$  hanno periodo 2. Non ci sono punti di altro periodo.  $\square$

**Esempio A.3** Consideriamo la mappa  $F : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$  definita da

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x + 7, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora

$$F^2(x) = F(F(x)) = \begin{cases} -2x + 5, & 1 \leq x \leq 2, \\ 4x - 7, & 2 \leq x \leq 2.5, \\ -2x + 8, & 2.5 \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$F^3(x) = F(F^2(x)) = \begin{cases} 4x - 3, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ -2x + 6, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ 4x - 6, & 2 \leq x \leq 2.25, \\ -8x + 21, & 2.25 \leq x \leq 2.5, \\ 4x - 9, & 2.5 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora  $F$  ha il punto fisso  $\frac{7}{3}$ ,  $F^2$  ha i punti fissi  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{7}{3}$  e  $\frac{8}{3}$ , e  $F^3$  ha i punti fissi 1, 2,  $\frac{7}{3}$  e 3. Quindi ci sono due punti di periodo 2 e tre punti di periodo 3. Secondo il Teorema di Šarkovs'kii esistono punti di qualunque periodo.  $\square$

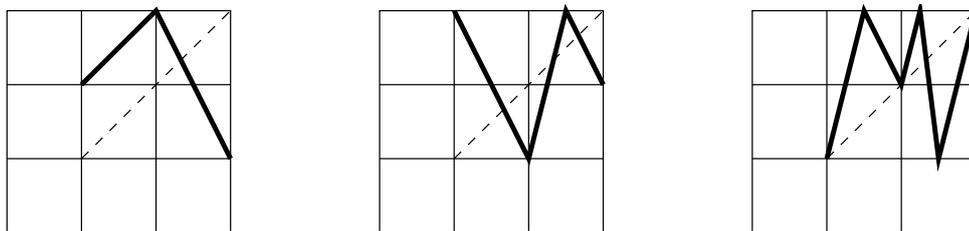


Figura A.1: La mappa  $F$  e il suo secondo e terzo iterato.

**Esempio A.4** Esistono degli esempi di mappe unidimensionali che hanno punti di equilibrio di periodo 5 ma non di periodo 3. A tal proposito, si consideri la mappa  $F : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$  definita da

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -x + 7, & 2 \leq x \leq 3, \\ -2x + 10, & 3 \leq x \leq 4, \\ -x + 6, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Allora la  $F$  è continua con un unico punto di equilibrio  $10/3$ . Si verifica che

$$F^2(x) = F(F(x)) = \begin{cases} -4x + 8, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ -2x + 5, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ 4x - 10, & 3 \leq x \leq 3.5, \\ 2x - 3, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ -2x + 13, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Inoltre,

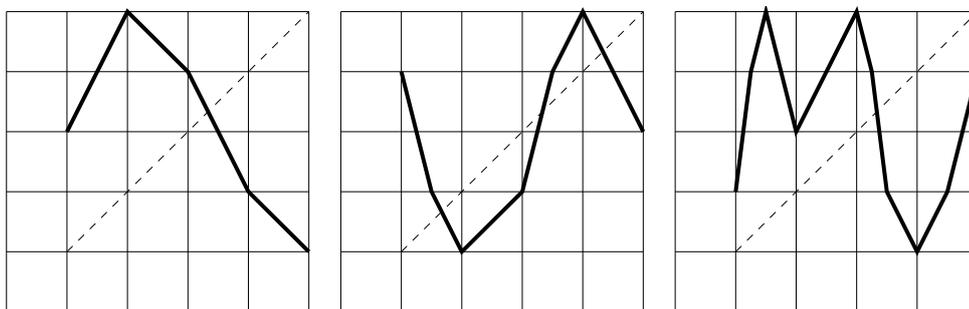


Figura A.2: Grafici delle mappe  $F$ ,  $F^2$  e  $F^3$ . I punti fissi sono i seguenti:  $\frac{10}{3}$  per la  $F$ ,  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{10}{3}$  e  $\frac{13}{3}$  per la  $F^2$  e  $\frac{10}{3}$  per la  $F^3$ . Inoltre,  $F(\frac{5}{3}) = \frac{13}{3}$  e  $F(\frac{13}{3}) = \frac{5}{3}$ .

$$F^3(x) = F(F^2(x)) = \begin{cases} 8x - 6, & 1 \leq x \leq 1.25, \\ 4x - 1, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ -4x + 11, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ 2x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ -4x + 17, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ -8x + 30, & 3.25 \leq x \leq 3.5, \\ -2x + 9, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ 2x - 7, & 4 \leq x \leq 4.5, \\ 4x - 16, & 4.5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Siccome la  $F^3$  ha un singolo punto di equilibrio (che, per forza, condivide con la  $F$ ), non esistono punti di periodo 3 della  $F$ . Consideriamo ora la  $F^4$  (il quarto

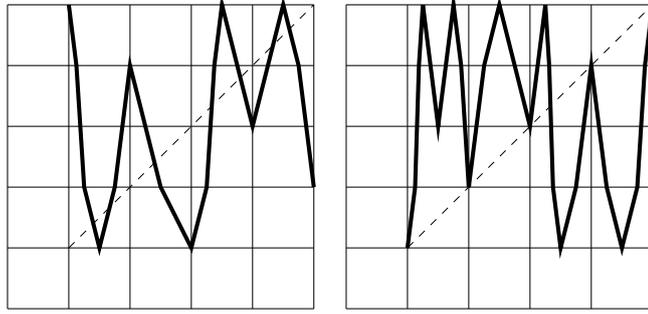


Figura A.3: Grafici delle mappe  $F^4$  e  $F^5$ . I punti fissi sono i seguenti:  $\frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{5}, \frac{10}{3}, \frac{19}{5}, \frac{13}{3}$  e  $\frac{23}{5}$  per la  $F^4$  e 1, 2, 3,  $\frac{10}{3}$ , 4 e 5 per la  $F^5$ .

iterato della  $F$ ):

$$F^4(x) = F^2(F^2(x)) = \begin{cases} -8x + 13, & 1 \leq x \leq 1.125, \\ -16x + 22, & 1.125 \leq x \leq 1.25, \\ -4x + 7, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ 4x - 5, & 1.5 \leq x \leq 1.75, \\ 8x - 12, & 1.75 \leq x \leq 2, \\ -4x + 12, & 2 \leq x \leq 2.5, \\ -2x + 7, & 2.5 \leq x \leq 3, \\ 4x - 11, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ 16x - 50, & 3.25 \leq x \leq 3.375, \\ 8x - 23, & 3.375 \leq x \leq 3.5, \\ -4x + 19, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ 4x - 13, & 4 \leq x \leq 4.5, \\ -4x + 23, & 4.5 \leq x \leq 4.75, \\ -8x + 42, & 4.75 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

mentre

$$\frac{7}{5} \xrightarrow{F} \frac{19}{5} \xrightarrow{F} \frac{12}{5} \xrightarrow{F} \frac{23}{5} \xrightarrow{F} \frac{7}{5};$$

$$\frac{5}{3} \xrightarrow{F} \frac{13}{3} \xrightarrow{F} \frac{5}{3}.$$

Quindi abbiamo trovato, oltre al punto fisso  $\frac{10}{3}$ , un 4-ciclo e un 2-ciclo. Inoltre,

$$F^5(x) = F^2(F^3(x)) = \begin{cases} 8x - 7, & 1 \leq x \leq 1.125, \\ 32x - 34, & 1.125 \leq x \leq 1.1875, \\ 16x - 15, & 1.1875 \leq x \leq 1.25, \\ -8x + 15, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ 8x - 9, & 1.5 \leq x \leq 1.75, \\ -8x + 19, & 1.75 \leq x \leq 1.875, \\ -16x + 34, & 1.875 \leq x \leq 2, \\ 8x - 14, & 2 \leq x \leq 2.25, \\ 4x - 5, & 2.25 \leq x \leq 2.5, \\ -4x + 15, & 2.5 \leq x \leq 3, \\ 8x - 21, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ -16x + 57, & 3.25 \leq x \leq 3.3125, \\ -32x + 110, & 3.3125 \leq x \leq 3.375, \\ -8x + 29, & 3.375 \leq x \leq 3.5, \\ 4x - 13, & 3.5 \leq x \leq 3.75, \\ 8x - 28, & 3.75 \leq x \leq 4, \\ -8x + 36, & 4 \leq x \leq 4.25, \\ -4x + 19, & 4.25 \leq x \leq 4.5, \\ 4x - 17, & 4.5 \leq x \leq 4.75, \\ 16x - 74, & 4.75 \leq x \leq 4.875, \\ 8x - 35, & 4.875 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

mentre

$$1 \xrightarrow{F} 3 \xrightarrow{F} 4 \xrightarrow{F} 2 \xrightarrow{F} 5 \xrightarrow{F} 1.$$

Quindi i punti fissi della  $F^5$  sono gli interi 1, 2, 3, 4, 5 più il punto fisso  $\frac{10}{3}$  della  $F$ . Di conseguenza, la  $F$  ha il punto fisso  $\frac{10}{3}$ , i due punti  $\frac{5}{3}$  e  $\frac{13}{3}$  di periodo 2, nessun punto di periodo 3, i punti  $\frac{7}{5}$ ,  $\frac{12}{5}$ ,  $\frac{19}{5}$  e  $\frac{23}{5}$  di periodo 4 e i punti 1, 2, 3, 4, 5 di periodo 5. Secondo il Teorema di Šarkovs'kii esistono punti di qualunque periodo tranne 3.  $\square$

Il teorema di Šarkovs'kii vale soltanto per le funzioni continue che trasformano un intervallo della retta reale in se stesso. Non vale per i domini multidimensionali e neppure per le circonferenze. Per esempio, per la rotazione antiorario di angolo  $2\pi/3$  l'intera circonferenza consiste di punti di periodo 3, non ci sono punti di altri periodi o punti aperiodici.



# Appendice B

## Gruppi di Lie

In questo capitolo discuteremo i gruppi di Lie e le corrispondenti algebre di Lie. Ci limiteremo ai gruppi di matrici [28], evitando il linguaggio delle varietà riemanniane.

### 1 Algebre di Lie

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale. Allora  $V$  si dice *algebra di Lie* se in  $V$  viene anche definita un'operazione bilineare  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ , il cosiddetto *bracket di Lie*, con le seguenti proprietà:

- (a) (*antisimmetria*)  $[x, y] = -[y, x]$  per tutti gli  $x, y \in V$ ;
- (b) (*identità di Jacobi*)

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad x, y, z \in V.$$

Per esempio, tutti gli spazi vettoriali di matrici reali o complesse  $d \times d$  sono algebre di Lie rispetto al bracket *commutatore*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Un altro esempio viene fornito dallo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  con prodotto vettore

$$[x, y] = x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Un sottospazio lineare di  $W$  dell'algebra di Lie  $V$  è detto *sottoalgebra di Lie* di  $V$  se  $[x, y] \in W$  per tutti gli  $x, y \in W$ , e *ideale di Lie* se  $[x, z] \in W$  per ogni  $x \in W$  e  $z \in V$ . Un esempio importante di un ideale di Lie di  $V$  è il centro

$$A(V) = \{x \in V : [x, z] = 0 \text{ per ogni } z \in V\}.$$

Si dice *omomorfismo di Lie* una trasformazione  $V : V \rightarrow W$  tra algebre di Lie che è una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriale reali  $V$  e  $W$  e verifica

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = [x, y], \quad x, y \in V.$$

Un omomorfismo di Lie biunivoca si chiama un *isomorfismo di Lie*.

## 2 Algebra di Lie di un gruppo di matrici

Sia  $G$  un gruppo di matrici  $d \times d$  rispetto al solito prodotto di matrici e supponiamo che  $G$  sia chiusa nell'anello  $M_d(\mathbb{C})$  di tutte le matrici complesse  $d \times d$ . Allora è detto *spazio tangente alla matrice identità* oppure *algebra di Lie* di  $G$  lo spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  composto delle derivate  $\gamma'(0)$  di tutte le curve derivabili  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  tali che  $\gamma(0)$  è la matrice identità. Quindi per ogni curva derivabile  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  con  $\gamma(0)$  uguale alla matrice identità si ha:

$$\gamma(t) = I_d + t\gamma'(0) + o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Le derivate  $\gamma'(0)$  costituiscono gli elementi dell'algebra di Lie di  $G$ . È detta *dimensione* del gruppo  $G$  la **dimensione reale** dello spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$ . Infatti, se  $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  sono due curve di classe  $C^1$  tali che  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_d$ ,  $\gamma_1'(0) = A \in \mathfrak{g}$  e  $\gamma_2'(0) = B \in \mathfrak{g}$ , allora per  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  definita da  $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$  si ha:

$$\gamma'(0) = \gamma_1'(0)\gamma_2(0) + \gamma_1(0)\gamma_2'(0) = A + B \in \mathfrak{g}.$$

Inoltre, per  $0 \neq c \in \mathbb{R}$  e  $\delta(t) = \varphi(ct)$  per  $t \in (-\frac{\varepsilon}{|c|}, \frac{\varepsilon}{|c|})$  si ha:

$$\delta'(0) = c\gamma'(0).$$

In altre parole,  $\mathfrak{g}$  è uno spazio vettoriale reale.

Consideriamo ora le curve  $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  e  $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$  tali che  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_d$ ,  $\gamma_1'(0) = A$  e  $\gamma_2'(0) = B$ . Definiamo la funzione  $F : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow G$  definita da

$$F(s, t) = \gamma_1(s)\gamma_2(t)\gamma_1(s)^{-1} \in G.$$

Per ogni  $s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  la curva  $F(s, \cdot) : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow G$  verifica

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, 0) = \gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} \in \mathfrak{g}, \quad s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1).$$

Siccome  $\mathfrak{g}$  è un sottospazio chiuso di  $M_d(\mathbb{C})$ , si ha

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} - \gamma_2'(0)}{s} \in \mathfrak{g},$$

se esiste tale limite. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} - \gamma_2'(0)}{s} &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} \right|_{s=0} \\ &= \gamma_1'(0)\gamma_2'(0)\gamma_1(0)^{-1} - \gamma_1(0)\gamma_2'(0)\gamma_1(0)^{-1}\gamma_1'(0)\gamma_1(0)^{-1} \\ &= \gamma_1'(0)\gamma_2'(0) - \gamma_2'(0)\gamma_1'(0) \\ &= [\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)] = [A, B] \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

il che mostra che  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie.

Si può inoltre dimostrare che

$$\mathfrak{g} = \{A \in M_d(\mathbb{C}) : e^{tA} \in G \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}\}.$$

Indicando la parte a destra da  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , si può considerare la curva  $\gamma(t) = e^{tA} \in G$  e dimostrare che  $A = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}$ . La dimostrazione dell'inclusione contraria  $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$  non è del tutto banale.

Dimostriamo ora il seguente lemma.

**Lemma B.1** Per ogni matrice  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  di ordine  $n$  si ha

$$\det e^A = \exp(\text{Tr } A),$$

dove  $\text{Tr } A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$  è la somma degli autovalori di  $A$ .

*Dimostrazione.* Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori di  $A$ , allora  $\exp(\lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sono gli autovalori di  $e^A$ . Il lemma segue dal fatto che il determinante di una matrice è il prodotto dei suoi autovalori.  $\square$

**Esempio B.2** Calcoliamo ora le algebre di Lie di alcuni gruppi di matrici.

- (a) Sia  $G = GL_d(\mathbb{R})$  il gruppo di tutte le matrici reali non singolari. Allora  $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine  $d$ . Quindi  $\dim GL_d(\mathbb{R}) = d^2$ .
- (b) Se  $G = GL_d(\mathbb{C})$  è il gruppo di tutte le matrici complesse non singolari di ordine  $d$ , allora  $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine  $d$ . Quindi  $\dim GL_d(\mathbb{C}) = 2d^2$ .
- (c) Se  $G = SL_d(\mathbb{R})$  è il gruppo di tutte le matrici reali con determinante uguale ad 1, allora  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine  $d$  e traccia zero. Quindi  $\dim SL_d(\mathbb{R}) = d^2 - 1$ .
- (d) Se  $G = SL_d(\mathbb{C})$  è il gruppo di tutte le matrici complesse con determinante uguale ad 1, allora  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine  $d$  e traccia zero. Quindi  $\dim SL_d(\mathbb{C}) = 2(d^2 - 1)$ .

- (e) Sia  $G = SO(d)$  è il gruppo di tutte le matrici ortogonali con determinante uguale ad 1. Allora  $\mathfrak{so}(d)$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche ( $A^T = -A$ ) di ordine  $d$ . Siccome una matrice reale e antisimmetrica  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$  soddisfa  $a_{11} = \dots = a_{dd} = 0$ , abbiamo  $\dim SO(d) = 1 + 2 + \dots + (d-1) = \frac{1}{2}d(d-1)$ .
- (f) Sia  $G = SU(d)$  è il gruppo di tutte le matrici unitarie con determinante uguale ad 1. Allora  $\mathfrak{su}(d)$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse  $A$  tali che  $A^* = -A$  e  $\text{Tr } A = 0$ . Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari con somma zero, abbiamo  $\dim SU(d) = 2[1 + 2 + \dots + (d-1)] + (d-1) = d^2 - 1$ .
- (g) Sia  $G = O(d)$  è il gruppo di tutte le matrici ortogonali di ordine  $d$ . Allora  $\mathfrak{o}(d)$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche ( $A^T = -A$ ) di ordine  $d$ . Abbiamo  $\dim O(d) = \frac{1}{2}d(d-1)$ .
- (h) Sia  $G = U(d)$  è il gruppo di tutte le matrici unitarie. Allora  $\mathfrak{u}(d)$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse  $A$  tali che  $A^* = -A$ . Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari, abbiamo  $\dim U(d) = 2[1 + 2 + \dots + (d-1)] + d = d(d-1) + d = d^2$ .
- (i) Sia  $G = SU(1, 1) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* \sigma_3 A = \sigma_3, \det(A) = 1\}$  è il gruppo delle matrici  $\sigma_3$ -unitarie con determinante 1, essendo  $\sigma_3 = \text{diag}(1, -1)$ . Allora la sua algebra di Lie ha la forma

$$\mathfrak{su}(1, 1) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* = -\sigma_3 A \sigma_3, \text{Tr } A = 0\}.$$

Quindi  $\dim SU(1, 1) = 3$ .

- (j) Sia  $G = \text{Lor} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G, \det A = 1, a_{00} \geq 1\}$  è il gruppo di Lorentz. Allora la sua algebra di Lie ha la forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{lor} &= \{A \in M_4(\mathbb{R}) : G A G = -A^T\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : (G A)^T = -G A\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{01}, a_{03}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi  $\dim \text{Lor} = 6$ .

Ad ogni gruppo di Lie  $G$  si possono associare  $N = \dim G$  generatori: Una base qualsiasi  $\{S_i : i = 1, 2, \dots, \dim G\}$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  (considerato come spazio vettoriale reale) si dice sistema di *generatori* di  $G$ . Siccome i commutatori

$[S_i, S_j]$  appartengono all'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , si ha la *relazione di chiusura* (inglese: closure relation)

$$[S_i, S_j] = \sum_{k=1}^N c_{ij}^k S_k$$

per opportune *costanti di struttura* (inglese: structure constants) reali del gruppo  $G$ . Dall'antisimmetria del commutatore segue l'antisimmetria

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \quad (\text{B.1})$$

Applicando l'identità di Jacobi

$$[[S_i, S_j], S_k] + [[S_j, S_k], S_i] + [[S_k, S_i], S_j] = 0$$

segue

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^N (c_{ij}^m [S_m, S_k] + c_{jk}^m [S_m, S_i] + c_{ki}^m [S_m, S_j]) \\ &= \sum_{m,n=1}^N (c_{ij}^m c_{mk}^n S_n + c_{jk}^m c_{mi}^n S_n + c_{ki}^m c_{mj}^n S_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n) S_n. \end{aligned}$$

Dall'indipendenza lineare dei vettori  $S_n$  segue la relazione

$$\sum_{m=1}^N (c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n) = 0. \quad (\text{B.2})$$

### 3 Alcuni esempi dettagliati

**$SO(2)$ .** Consideriamo ora il gruppo  $SO(2)$  delle matrici ortogonali di ordine 2 con determinante uguale ad 1. Allora la sua algebra di Lie  $\mathfrak{so}(2)$  è composta da tutte le matrici reali antisimmetriche, cioè

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ic\sigma_2 : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

mentre  $SO(2)$  è un gruppo di Lie che dipende da un singolo parametro  $t$ :

$$SO(2) = \{R(t) : t \in \mathbb{R}\}, \quad R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{it\sigma_2}.$$

La matrice  $i\sigma_2$  si dice *generatore* di  $SO(2)$ .

**SO(3).** L'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(3)$  del gruppo  $SO(3)$  delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante uguale ad 1 consiste nelle matrici reali e antisimmetriche. Quindi

$$\mathfrak{so}(3) = \{i[c_1S_x + c_2S_y + c_3S_z] : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\},$$

dove le matrici  $iS_x$ ,  $iS_y$  e  $iS_z$  definite dalle identità

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

costituiscono una base dell'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(3)$  e si dicono *generatori* di  $SO(3)$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} SO(3) &= \{R_x(\psi_1)R_y(\theta_1)R_z(\varphi_1) : \psi_1, \theta_1, \varphi_1 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_x(\psi_2)R_z(\varphi_2)R_y(\theta_2) : \psi_2, \theta_2, \varphi_2 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_3)R_x(\psi_3)R_z(\varphi_3) : \psi_3, \theta_3, \varphi_3 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_4)R_z(\varphi_4)R_x(\psi_4) : \psi_4, \theta_4, \varphi_4 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_5)R_x(\psi_5)R_y(\theta_5) : \psi_5, \theta_5, \varphi_5 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_6)R_y(\theta_6)R_x(\psi_6) : \psi_6, \theta_6, \varphi_6 \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

In queste espressioni  $R_x(\psi)$ ,  $R_y(\theta)$  e  $R_z(\varphi)$  sono le rotazioni elementari intorno alle assi  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} R_x(\psi) &= e^{i\psi S_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) &= e^{i\theta S_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ R_z(\varphi) &= e^{i\varphi S_z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mentre  $(\psi_k, \theta_k, \varphi_k)$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) sono gli angoli di Eulero della rotazione. Gli angoli di Eulero dipendono dall'ordine in cui le rotazioni elementari vengono applicate per ottenere la rotazione.

Il *tensore di Levi-Civita*  $\varepsilon_{ijk}$  viene ora introdotto come le costanti di struttura di  $SO(3)$  (rispetto al sistema di generatori  $\{S_x, S_y, S_z\}$ ):

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk} S_k, \quad (\text{B.4})$$

dove  $\varepsilon_{ijk} = 0$  se non tutti i pedici  $i, j, k$  sono diversi e<sup>1</sup>

$$\varepsilon_{xyz} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{yzx} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{zyx} = 1.$$

**$SU(2)$ .** Il gruppo  $SU(2)$  delle matrici unitarie di ordine 2 con determinante uguale ad 1 ha la forma

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \sin \eta \\ -e^{-i\zeta} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} : \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

dove  $\xi, \eta, \zeta$  sono i cosiddetti parametri di Cayley-Klein. Introducendo le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ogni elemento di  $SU(2)$  si può scrivere come il prodotto delle tre matrici  $U_j(a_j) = \exp(ia_j\sigma_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), dove  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  dipendono dall'ordine dei tre fattori. Le tre matrici  $i\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) costituiscono una base dell'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2) &= \{i[a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3] : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ i \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

e si dicono *generatori* di  $SU(2)$ . Una rotazione generale in  $SU(2)$  ha la forma

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \gamma) &= U_z\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_y\left(\frac{\beta}{2}\right)U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

che coincide con l'espressione nella (B.5) per i parametri di Cayley-Klein  $\xi = (\gamma + \alpha)/2$ ,  $\eta = \beta/2$  e  $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$ .

Il *tensore di Levi-Civita*  $\varepsilon_{ijk}$  viene ora introdotto come meno il doppio delle costanti di struttura di  $SU(2)$  (rispetto al sistema di generatori  $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ ):

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{B.7})$$

---

<sup>1</sup>Si osservi che  $[S_x, S_y] = -[S_y, S_x] = iS_z$ ,  $[S_y, S_z] = -[S_z, S_y] = iS_x$  e  $[S_z, S_x] = -[S_x, S_z] = iS_y$ .

dove  $\varepsilon_{ijk} = 0$  se non tutti i pedici  $i, j, k$  sono diversi e<sup>2</sup>

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = 1.$$

**$SU(1, 1)$ .** Il gruppo  $SU(1, 1)$  delle matrici  $\sigma_3$ -unitarie di ordine 2 con determinante uguale ad 1 ha la forma

$$\begin{aligned} SU(1, 1) &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cosh \eta & e^{i\zeta} \sinh \eta \\ e^{-i\zeta} \sinh \eta & e^{-i\xi} \cosh \eta \end{pmatrix} : \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 = 1 + |b|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

dove  $\xi, \eta, \zeta$  sono analoghi ai cosiddetti parametri di Cayley-Klein. Le tre matrici  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $i\sigma_3$  costituiscono una base dell'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(1, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(1, 1) &= \{a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + ia_3\sigma_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ia_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -ia_3 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

e si dicono *generatori* di  $SU(1, 1)$ . Una rotazione generale in  $SU(1, 1)$  ha la forma

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \gamma) &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\beta}{2} & \sinh \frac{\beta}{2} \\ \sinh \frac{\beta}{2} & \cosh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cosh \frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sinh \frac{\beta}{2} \\ e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sinh \frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cosh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

che coincide con l'espressione nella (B.8) per i parametri di Cayley-Klein  $\xi = (\gamma + \alpha)/2$ ,  $\eta = \beta/2$  e  $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$ .

Si ha infine

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, i\sigma_3] = -2\sigma_1, \quad [i\sigma_3, \sigma_1] = -2\sigma_2.$$

Quindi le costanti di struttura  $c_{ijk}$  nell'identità  $[s_i, s_j] = \sum_k c_{ijk} s_k$  (essendo  $s_1 = \sigma_1$ ,  $s_2 = \sigma_2$  e  $s_3 = i\sigma_3$ ) si annullano se  $i, j, k$  non sono tutti diverse e verificano  $c_{123} = -c_{213} = 2i$ ,  $c_{231} = -c_{321} = c_{312} = -c_{132} = -2$ .

---

<sup>2</sup>Si osservi che  $[\sigma_1, \sigma_2] = -[\sigma_2, \sigma_1] = 2i\sigma_3$ ,  $[\sigma_2, \sigma_3] = -[\sigma_3, \sigma_2] = 2i\sigma_1$  e  $[\sigma_3, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_3] = 2i\sigma_2$ .

# Appendice C

## Forma Normale di Jordan

È noto che non tutte le matrici complesse quadrate sono diagonalizzabili. È anche noto che tutte le matrici hermitiane e unitarie sono diagonalizzabili. In questa appendice introduciamo la forma normale di Jordan che ci consentirà di descrivere le proprietà di una matrice che rimangono invarianti sotto una similarità  $A \mapsto S^{-1}AS$ .

### 1 Catene di Jordan

Sia  $A$  una trasformazione lineare in  $F^n$ , essendo  $F = \mathbb{R}$  o  $F = \mathbb{C}$ . Allora lo string  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$  si dice *catena di autovettori e autovettori generalizzati* (oppure: *catena di Jordan*) di  $A$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$  se

$$x_0 \neq 0, \quad Ax_0 = \lambda x_0, \quad Ax_1 = \lambda x_1 + x_0, \quad \dots, \quad Ax_{m-1} = \lambda x_{m-1} + x_{m-2}.$$

In tal caso i vettori  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  della catena di *lunghezza*  $m$  sono linearmente indipendenti.

Infatti, se esistessero scalari  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  tale che

$$c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_{m-1}x_{m-1} = 0,$$

allora, applicando  $A - \lambda I_n$  una, due, tre, fino ad  $m - 2$  volte, otterremo

$$\begin{aligned} c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \dots + c_{m-2}x_{m-2} + c_{m-1}x_{m-1} &= 0, \\ c_1x_0 + c_2x_1 + c_3x_2 + c_4x_3 + \dots + c_{m-2}x_{m-3} + c_{m-1}x_{m-2} &= 0, \\ c_2x_0 + c_3x_1 + c_4x_2 + \dots + c_{m-2}x_{m-4} + c_{m-1}x_{m-3} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ c_{m-1}x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Poichè  $x_0 \neq 0$ , si ha  $c_{m-1} = 0$  e, quindi,  $c_{m-2} = \dots = c_1 = c_0 = 0$ . Di conseguenza, i vettori della catena di Jordan  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$  sono linearmente indipendenti.

Sia  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$  una catena di Jordan corrispondente all'autovalore  $\lambda$  di  $A$ . Allora,

$$(A - \lambda I_n)x_0 = (A - \lambda I_n)^2 x_1 = \dots = (A - \lambda I_n)^m x_{m-1} = 0.$$

Dunque, per  $j = 0, 1, \dots, m-1$  si ha:

$$x_j \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^{j+1}, \quad x_j \notin \text{Ker}(A - \lambda I_n)^j,$$

essendo  $\text{Ker } T = \{x \in F^n : Tx = 0\}$  il kernel della trasformazione lineare  $T$ .

Consideriamo ora, come esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

per cui  $\text{Tr } A = 0$  e  $\det(A) = 0$ . Allora l'unico autovalore è  $\lambda = 0$  e l'unico autovettore è (proporzionale a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Si vede facilmente che  $A$  trasforma il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  e quest'ultimo nel vettore zero. Quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una catena di Jordan di  $A$  corrispondente all'autovalore  $\lambda = 0$ .

Siano  $\{x_0^s, x_1^s, \dots, x_{m_s-1}^s\}$  alcune,  $r$ , catene di Jordan di  $A$ , di lunghezze  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$ , tali che  $x_0^1, \dots, x_0^r$  sono linearmente indipendenti. Allora l'unione

$$\{x_j^s : j = 0, 1, \dots, m_s - 2, s = 1, 2, \dots, r\}$$

di tutte le  $r$  catene di Jordan è linearmente indipendente. Infatti, sia

$$\sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{m_s-1} c_{s,j} x_j^s = 0.$$

Applicando  $A - \lambda I_n$  ripetutamente, otteniamo una combinazione lineare degli autovettori linearmente indipendenti  $x_0^s$ , e dunque i corrispondenti coefficienti si annullano. Arretrando lungo le successive combinazioni lineari ottenute applicando  $A - \lambda I_n$ , risultano nulli tutti gli altri coefficienti.









# Appendice D

## Esempi ed esercizi

In questa appendice si discutono alcuni esempi illustrativi difficili da inserire nei capitoli precedenti. Inoltre è stato incluso un elenco di esempi.

### 1 Esempi

**Esempio D.1** Consideriamo

$$\dot{x}(t) = a - x^2.$$

In tal caso

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a} x(0)[1 + e^{-2t\sqrt{a}}] + \sqrt{a}[1 - e^{-2t\sqrt{a}}]}{x(0)[1 - e^{-2t\sqrt{a}}] + \sqrt{a}[1 + e^{-2t\sqrt{a}}]}, & a > 0, \\ \frac{x(0)}{1 + tx(0)}, & a = 0, \\ \frac{\sqrt{-a} x(0) - \sqrt{-a} \tan[t\sqrt{-a}]}{\sqrt{-a} + x(0) \tan[t\sqrt{-a}]}, & a < 0. \end{cases}$$

Per  $a < 0$  la soluzione  $x(t)$  esiste soltanto in un intervallo temporale di lunghezza  $< (\pi/|a|)$ , poichè

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{|a|};$$

quindi per  $a < 0$  non ci sono punti di equilibrio e non si possono prendere in considerazione le orbite per  $t \rightarrow +\infty$ .

Per  $a = 0$  c'è un singolo punto di equilibrio asintoticamente stabile  $x = 0$ . Per  $a > 0$  ci sono i due punti di equilibrio  $\pm\sqrt{a}$ , dove è asintoticamente stabile  $x = \sqrt{a}$  e instabile  $x = -\sqrt{a}$ .  $\square$

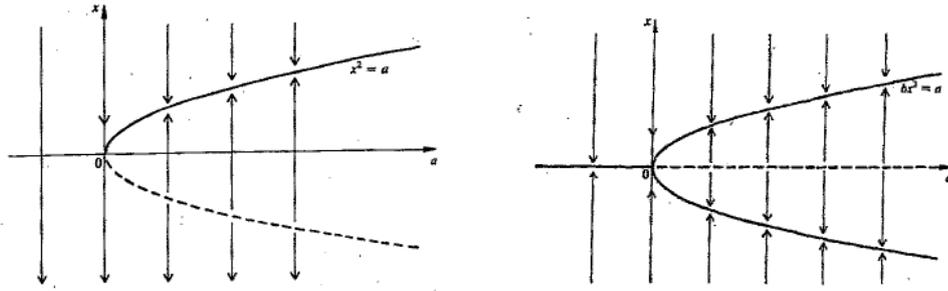


Figura D.1: Diagrammi di biforcazione per  $\dot{x}(t) = a - x^2$  e per  $\dot{x}(t) = ax = bx^3$  con  $b > 0$ . Le curve solide indicano i punti di equilibrio asintoticamente stabili, mentre le curve tratteggiate indicano quelli instabili.

**Esempio D.2** Consideriamo

$$\dot{x}(t) = ax - bx^3,$$

dove  $a \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ . In tal caso

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x(0)\sqrt{a}}{\sqrt{a e^{-2at} + bx(0)^2[1 - e^{-2at}]}}, & a > 0, \\ \frac{x(0)}{\sqrt{1 + 2bx(0)^2t}}, & a = 0, \\ \frac{x(0)\sqrt{-a} e^{at}}{\sqrt{-a + bx(0)^2[1 - e^{2at}]}}, & a < 0. \end{cases}$$

Quindi  $x(t) \rightarrow \text{sgn}[x(0)]\sqrt{a/b}$  se  $a > 0$ , e  $x(t) \rightarrow 0$  se  $a \leq 0$ . Per  $a \leq 0$  c'è il singolo punto di equilibrio  $x = 0$  asintoticamente stabile, mentre per  $a > 0$  sono asintoticamente stabili i punti di equilibrio  $\pm\sqrt{a/b}$  e è instabile l'origine.  $\square$

**Esempio D.3** Consideriamo le equazioni del moto del pendolo con attrito

$$\ddot{\theta} = -k \sin(\theta) - h \dot{\theta},$$

dove  $k = -(g/\ell)$  e  $h$  sono costanti positive. Il corrispondente sistema dinamico ha la forma

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -k \sin(\theta_1) - h \theta_2. \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono  $(m\pi, 0)$ , dove  $m \in \mathbb{Z}$ . Intorno al punto di equilibrio  $(0, 0)$  abbiamo il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Siccome  $\text{Tr}(A) = -h < 0$  e  $\det(A) = k > 0$ , gli autovalori di  $A$  hanno una parte reale negativa (infatti, essi sono complessi coniugati se  $h^2 < 4k$ , coincidono con  $-\frac{1}{2}h$  se  $h^2 = 4k$  e sono ambedue negativi e diversi se  $h^2 > 4k$ ). Quindi il sistema linearizzato è asintoticamente stabile. Quindi lo è anche il sistema non lineare originale. Infine, siccome la divergenza del vettore  $(\theta_2, -k \sin(\theta_1) - h\theta_2)$  è strettamente negativa (di valore costante  $-h$ ), non ci sono soluzioni periodiche [secondo il criterio di Bendixson].  $\square$

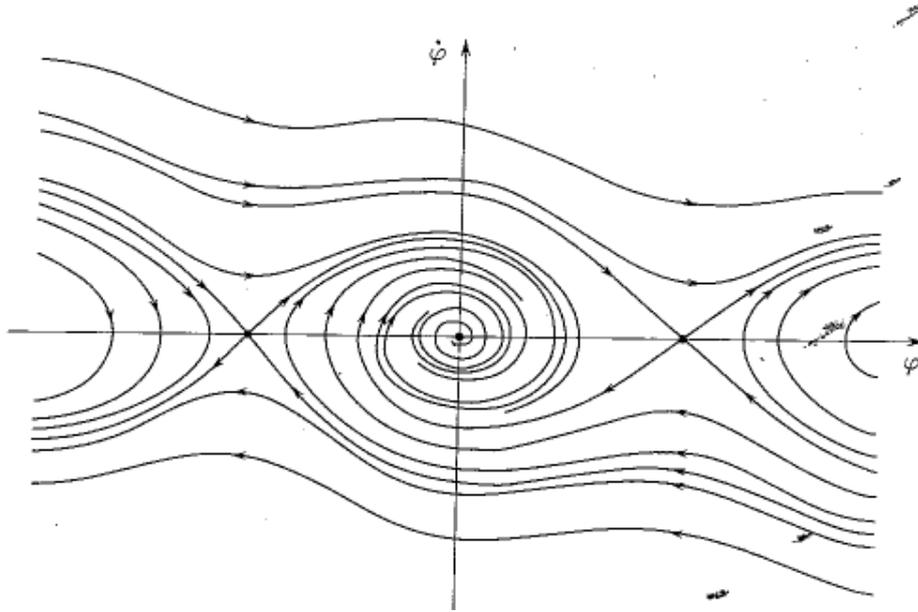


Figura D.2: Orbite per il pendolo con attrito [21, 6], dove  $0 < h < 2\sqrt{k}$ .

## 2 Esercizi

### SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO:

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali utilizzando il valor iniziale da costante di integrazione. Inoltre, determinare i punti di equilibrio e discuterne la natura.
  - a.  $\dot{y} = e^y - 1$ .
  - b.  $\dot{y} = 1 - e^y$ .
  - c.  $\dot{y} = y^2(y - 2)$ .
  - d. Al variare di  $m \in \mathbb{R}$ :  $\dot{y} = y^3 - 2y^2 + my$ .
  - e.  $\dot{y} = -\sin(y)$ .

f.  $\dot{y} = -\tan(y)$ .

2. Determinare la natura del punto di equilibrio  $(0, 0)$  per i seguenti sistemi dinamici:

- a.  $\dot{x} = 2x + 3y, \dot{y} = -x - y$ .
- b.  $\dot{x} = 4x - 3y, \dot{y} = -8x - y$ .
- c.  $\dot{x} = -3x + 4y, \dot{y} = -2x + 3y$ .
- d.  $\dot{x} = -3x + y, \dot{y} = -x - y$ .
- e.  $\dot{x} = 3x + y, \dot{y} = x + 3y$ .
- f.  $\dot{x} = -2x + 3y, \dot{y} = 3x - 2y$ .
- g.  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + 2y$ .
- h.  $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$ .

3. Determinare la natura del punto di equilibrio  $(0, 0)$  per le seguenti equazioni differenziali:

- a.  $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$ .
- b.  $\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = 0$ .
- c.  $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$ .
- d.  $\ddot{x} + 16x = 0$ .
- e.  $\ddot{x} - 16\dot{x} = 0$ .
- f.  $\ddot{x} - 12\dot{x} + 45x = 0$ .
- g.  $\ddot{x} + 12\dot{x} + 36x = 0$ .

4. Dimostrare che la funzione

$$E(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

è una costante del moto per il sistema dinamico

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = 2x + y.$$

5. Per una matrice reale  $A$  di ordine  $n$  si consideri il sistema dinamico

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}.$$

Sia  $E$  una matrice reale e simmetrica di ordine  $n$ , cioè  $E^T = E$ . Mostrare che

$$e(\vec{x}) = \vec{x}^T E \vec{x}$$

è una costante del moto del sistema dinamico  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  se e solo se

$$EA + A^T E = 0_{n \times n}.$$

6. Classificare i punti di equilibrio e, col metodo di linearizzazione, determinarne la natura per il seguente sistema dinamico:

a.  $\dot{x} = x^2 + y, \dot{y} = x - y^2$ .

b.  $\dot{x} = x + y^2 - 2, \dot{y} = x + y$ .

c.  $\dot{x} = -x + x^2y, \dot{y} = 2 - 2y$ .

d.  $\dot{x} = -x + 2x^3y^2, \dot{y} = -y$ .

e.  $\dot{x} = y - x^3, \dot{y} = -x^5$ .

f. Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :  $\dot{x} = y - xy^2, \dot{y} = -x + ky - y^3$  (soltanto per il punto di equilibrio all'origine).

g.  $\dot{x} = x(y^2 - 1), \dot{y} = y(x^2 - 1)$ .

7. Applicare il metodo di Liapunov per studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$\dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -x^5.$$

Perchè non ci sono orbite chiuse? Quale risultato si otterrebbe utilizzando il metodo di linearizzazione?

8. Per una funzione reale  $g \in C^1(\mathbb{R})$  che è positiva per  $y \neq 0$  e verifica  $g(0) = 0$ , si consideri, per  $k > 0$ , l'equazione differenziale

$$\ddot{y} + k\dot{y} + g(y) = 0.$$

Determinare i punti di equilibrio e loro natura. Dimostrare la non esistenza di orbite chiuse e darne l'interpretazione fisica.

9. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - 2y), \\ \dot{y} = y(-1 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

10. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(12 - 2y - 3x), \\ \dot{y} = y(-19 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

11. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - 2y - 3x), \\ \dot{y} = y(-1 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

12. Studiare, per i seguenti sistemi dinamici, i punti di equilibrio e loro natura.

a.  $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy.$

b.  $\dot{x} = e^y, \dot{y} = e^y \cos(x).$

c.  $\dot{x} = e^y \sin(x), \dot{y} = e^y \cos(x).$

13. Dimostrare che il sistema dinamico non autonomo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2t y(t), \\ \dot{y}(t) = 2t x(t), \end{cases}$$

ha orbite chiuse che non corrispondono a soluzioni periodiche.

14. Passando alle coordinate polari si studiano i punti di equilibrio e le orbite del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - y)(x^2 + y^2 - 1) - 2y, \\ \dot{y} = (y - x)(x^2 + y^2 - 1) + 2x. \end{cases}$$

15. Che cosa significa geometricamente per il sistema dinamico

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{F}(\vec{y}),$$

che  $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$ ? Che cosa si può dire degli attractor? Rispondere alle stesse domande se  $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ .

16. Studiare, per i seguenti sistemi dinamici, i punti di equilibrio e loro natura.

a.  $\dot{x} = \arctan(x^2 + \lambda x + 9)$ , al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

b.  $\dot{x} = \arctan(x^4 + \lambda x^2 + 9)$ , al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

c.  $\dot{x} = x(\lambda - \sin(x))$ , al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

17. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = -\dot{U}(x), \quad U(x) = -2 \cos(3x).$$

Scrivendo quest'equazione come un sistema dinamico, determinare i punti di equilibrio, trovare una costante del moto (cioè, l'energia totale) e studiare le orbite (usando gli insiemi di livello  $\{x \in \mathbb{R} : U(x) = c\}$ ).

18. Applicare il Teorema di Floquet al sistema dinamico

$$\dot{\vec{x}}(t) = \cos^2(2t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

In particolare, trovare il periodo delle soluzioni periodiche.

19. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(8 - 2y - 3x), \\ \dot{y} = y(-13 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

20. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(8 - 3y - 2x), \\ \dot{y} = y(-13 + 3x + 5y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

### SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO:

1. Studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

nei seguenti casi:

- $A = c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , al variare della costante  $c > 0$ . Per quale valore di  $c$  ci sono  $p$ -cicli?
- $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ . Ci sono  $p$ -cicli?
- $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ . Ci sono  $p$ -cicli?
- $A = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ , al variare di  $c > 0$ .
- $A = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , al variare di  $c > 0$ .

2. Studiare la (in)stabilità del sistema dinamico  $z_{n+1} = \alpha z_n$  nel piano complesso nei seguenti casi:

- $\alpha = \frac{1}{2}c(-1 + i\sqrt{3})$  al variare di  $c > 0$ .
- $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}c(-1 + i)$  al variare di  $c > 0$ .

c.  $\alpha = \frac{1}{5}c(-3 + 4i)$  al variare di  $c > 0$ .

Per quali valori di  $c > 0$  ci sono  $p$ -cicli?

3. Studiare la (in)stabilità delle seguenti equazioni alle differenze:

a.  $x_{n+2} = x_n - x_{n+1}$ .

b.  $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1})$ .

c.  $x_{n+3} = c^3 x_n$ , al variare di  $c > 0$ .

d.  $x_{n+2} = -x_n + c x_{n+1}$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

4. Si consideri la relazione di ricorrenza

$$P_{n+2}(x) = \frac{2x}{n+2}P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x),$$

dove  $-1 \leq x \leq +1$ . Per quali valori di  $x$  ci sono  $p$ -cicli?

5. Per  $\omega > 0$  si consideri l'equazione alle differenze

$$x_{n+2} = -\omega^2 x_n.$$

Trovare tutte le soluzioni e tutti i  $p$ -cicli? Studiarne la (in)stabilità. Che cosa cambierebbe se aggiungessimo un termine di attrito ( $k > 0$ ):

$$x_{n+2} = -kx_{n+1} - \omega^2 x_n?$$

6. Si consideri il sistema dinamico

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n},$$

dove  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Dimostrare, per induzione, che

$$x_n = \frac{n - (n-1)x_0}{n+1 - nx_0}.$$

e quindi che  $x_n \rightarrow 1$  se  $n \rightarrow +\infty$ . Per quali valori iniziali  $x_0$  avremmo qualche problema nel dimostrare una tale convergenza?

7. Si consideri il seguente analogo dello shift di Bernouilli:

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 3\theta_n, & 0 \leq \theta_n < \frac{1}{3}, \\ 3\theta_n - 1, & \frac{1}{3} \leq \theta_n < \frac{2}{3}, \\ 3\theta_n - 2, & \frac{2}{3} \leq \theta_n < 1. \end{cases}$$

Determinare i  $p$ -cicli.

8. Sia  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  il cerchio unitario nel piano complesso e sia  $F : S^1 \rightarrow S^1$  la rotazione

$$F(z; m) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z, \quad z \in S^1,$$

essendo  $m = 1, 2, 3, \dots$  un parametro. Descrivere i  $p$ -cicli della mappa.

9. Si consideri la funzione continua  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$F(x) = \begin{cases} 2rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2r(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

dove  $0 < r \leq 1$  è un parametro. Determinare i punti di equilibrio e determinarne, al variare di  $r$ , la (in)stabilità. Determinarne i 2-cicli? Per quali valori di  $r$  esistono  $p$ -cicli per ogni  $p$ ?

10. Si consideri il sistema dinamico

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + [x_n]^2},$$

dove  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Trovare i punti di equilibrio e studiarne la (in)stabilità. Suggerimento: Scrivere  $x_n = \tanh(w_n)$ .

11. Sia  $\phi : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  la mappa  $\phi(x) = \ln(x)/x$ . Si consideri la seguente mappa  $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ :

$$\phi(f(x)) = \phi(x),$$

dove  $f(x) \geq e$  per  $1 < x \leq e$  e  $1 < f(x) \leq e$  se  $x \geq e$ . Trovare tutti i punti fissi e tutti i 2-cicli e determinarne la (in)stabilità.

12. Per  $\alpha = p + iq$  e  $\beta = r + is$  (con  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ ) si consideri il sistema dinamico

$$z_{n+1} = \alpha z_n + \beta \bar{z}_n$$

nel piano complesso. Dimostrare che il sistema dinamico è asintoticamente stabile se e solo se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} p+r & -q+s \\ q+s & p-r \end{pmatrix}$$

ha soltanto autovalori di modulo strettamente minore di 1. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico per  $(x_n, y_n)^T$ , dove  $z_n = x_n + iy_n$ .

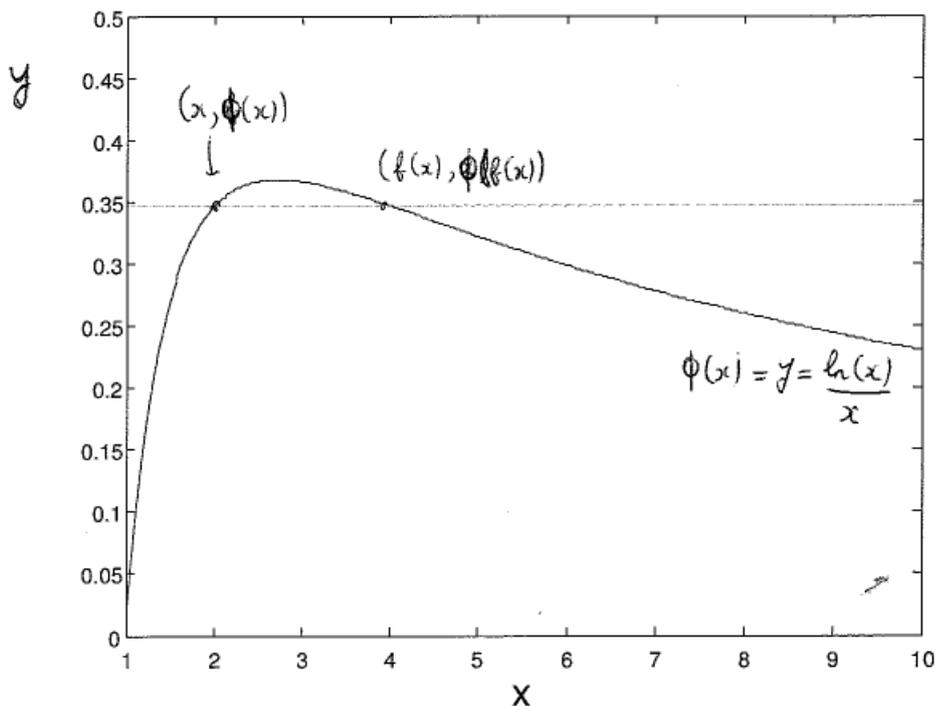


Figura D.3: La definizione della funzione  $f$ . Si noti che  $f(2) = 4$  e  $f(4) = 2$ .

13. La risoluzione dell'equazione differenziale  $\dot{x}(t) = f(x)$  col metodo alle differenze finite conduce, per  $h > 0$  e  $f \in C^1(\mathbb{R})$  con  $f(0) = 0$  e  $f'(0) \neq 0$ , al sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n).$$

Determinare le condizioni su  $f'(0)$  e  $h$  sotto cui il punto fisso  $X = 0$  è asintoticamente stabile.

14. Determinare il bacino di attrazione del punto fisso  $X = 0$  per il sistema dinamico<sup>1</sup>

$$x_{n+1} = x_n - h x_n^3.$$

Trovare i 2-cicli e determinarne la (in)stabilità.

15. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

<sup>1</sup>Un tale sistema dinamico risulta risolvendo l'equazione differenziale  $\dot{x}(t) = -x^3$ , di soluzione  $x(t) = x(0)/\sqrt{1 + 2tx(0)^2}$ , alle differenze finite.

dove  $F : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$  è definita da  $F(x) = \sqrt{6 + \frac{3}{2}x}$ . Verificare se la  $F$  è una contrazione e, in tal caso, trovare il punto fisso. Studiare la sua (in)stabilità.

16. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} = -y_n(x_n^2 + y_n^2). \end{cases}$$

Determinare i punti fissi, bacini di attrazione e cicli, più loro (in)stabilità. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico nel piano complesso.

17. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^2 + y_n^2 - 1), \\ y_{n+1} = y_n(x_n^2 + y_n^2 - 1). \end{cases}$$

Determinare i punti fissi, bacini di attrazione e cicli, più loro (in)stabilità. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico nel piano complesso.

18. Per  $h > 0$  e  $f \in C^1(\mathbb{R})$  si consideri il sistema dinamico

$$y_{n+1} = y_n + hf'(y_n + hf'(y_n)),$$

il metodo predictor-corrector per risolvere l'equazione differenziale  $\dot{y} = f(y)$  numericamente. Dimostrare la stabilità del punto di equilibrio  $Y = 0$  nel caso  $f(y) = -y^3$ . Suggerimento: Partendo dal dato iniziale  $y_0$  con  $h[y_0]^2 < 1$ , si dimostra che  $0 < y_{n+1} < y_n$  oppure  $0 > y_{n+1} > y_n$ .

19. Consideriamo l'insieme di tutti gli  $x \in [0, 1]$  che hanno uno sviluppo decimale che consiste soltanto in cifre pari. Qual'è la dimensione di Hausdorff di questo frattale? Come si costruisce l'insieme?

20. Considerando la mappa  $f_c(z) = z^2 + c$  e il sistema dinamico discreto  $z_{n+1} = f_c(z_n)$ , rispondere alle seguenti domande:

- Calcolare l'insieme di Julia (riempito) per  $c = 0$ . Dimostrare che  $c = 0$  appartiene all'insieme di Mandelbrot.
- Sia  $c > \frac{1}{4}$ . Dimostrare che, partendo da  $z_0 \in \mathbb{R}$ , la successione  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  è crescente e tende a  $+\infty$ . Dimostrare che l'insieme di Julia è sconnesso e quindi che un tale  $c$  non appartiene all'insieme di Mandelbrot.

- b. Sia  $c < -2$ . Dimostrare che, partendo da  $z_0$  immaginaria, la successione  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  è decrescente e tende a  $-\infty$ . Dimostrare che l'insieme di Julia è sconnesso e quindi che un tale  $c$  non appartiene all'insieme di Mandelbrot.
21. Dimostrare che la mappa logistica  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$  per  $x_0 \in [0, 1]$  ammette  $p$ -cicli per qualunque  $p$ . Suggerimento: Utilizzando che  $x_n = \sin^2(2^n \theta \pi)$  per  $\theta = \frac{1}{\pi} \arcsin(\sqrt{x_0})$ , si dimostri che  $x_0$  genera un  $p$ -ciclo se e solo se

$$p = \min\{n \in \mathbb{N} : (2^n - 1)\theta \in \mathbb{Z}\}.$$

# Bibliografia

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.
- [2] D.V. Anosov and V.I. Arnol'd, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. **1**, Springer Verlag, 1985.
- [3] V.I. Arnol'd, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. **6**, Springer Verlag, 1985.
- [4] V.I. Arnol'd, *Teoria delle Catastrofi*, Bollati Boringhieri, 1986.
- [5] P. Bourke, *An introduction to fractals*, 1991. Vedi il seguente sito Internet: <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracintro/>
- [6] M. Bramanti, C.D. Pagani, and S. Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli, 2009.
- [7] K. Burns and B. Hasselblatt, *The Sharkovsky theorem: A natural direct proof*, American Mathematical Monthly **118**, 229–244 (2011).
- [8] K. Chadan and P.C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, Second Ed., Springer, Berlin, 1989.
- [9] P.G. Drazin, *Nonlinear Systems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [10] Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [11] L.D. Faddeev, *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation*, Amer. Math. Soc. Transl. **2**, 139–166 (1964); also: Trudy Mat. Inst. Steklova **73**, 314–336 (1964) [Russian].
- [12] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, 1989.

- [13] F.R. Gantmacher, *Matrix Theory*, Vols. I-II, Chelsea Publ., Amer. Math. Soc., 1959.
- [14] J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, 1987.
- [15] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko, *Meccanica Classica*, Seconda Edizione, Zanichelli, Bologna, 2005.
- [16] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1998.
- [17] L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Fisica Teorica. I. Meccanica*, Editori Riuniti, University Press, 2009.
- [18] Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume Primo, Volume Secondo Parte Prima, Volume Secondo Parte Seconda, Zanichelli, Bologna, 1974.
- [19] Tien-Yien Li and James A. Yorke, *Period three implies chaos*, American Mathematical Monthly **82**, 985–992 (1975).
- [20] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*. Princeton Mathematical Series, No. **22**, pg. 523 e seguenti. Princeton University Press, 1960.
- [21] C.D. Pagani and S. Salsa, *Analisi Matematica*, vol. **2**, Masson, 1994.
- [22] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1991.
- [23] O.M. Šarkovs'kii, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Mat. Zh. **16**, 61–71 (1964).
- [24] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Annals of Mathematics **147**, 225–267 (1998).
- [25] A. Sym, *Soliton surfaces*, Lettere al Nuovo Cimento **33**(12), 394–400 (1982).
- [26] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, W.A. Benjamin, Reading, Mass., 1975.
- [27] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer Verlag, 1996.
- [28] **A. Baker, *Matrix Groups*, Springer, New York, 2001.**

- [29] Cornelis van der Mee, *Nonlinear Evolution Models of Integrable Type*, SIMAI e-Lecture Notes **11**, SIMAI, Torino, 2013. Vedi: <http://cab.unime.it/journals/index.php/lecture/issue/view/69>
- [30] M.J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **302**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.