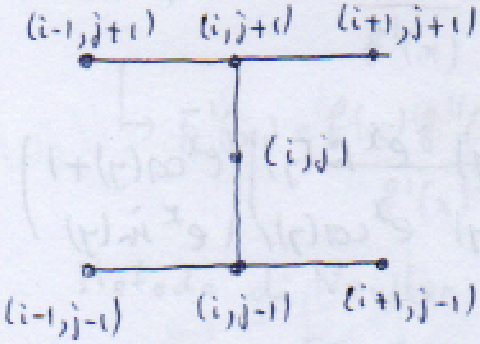
① $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 3$, $x_i = 1 + ih$, $h = \frac{2}{n+1}$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, $t_j = jk$, $k = \frac{T}{m+1}$ $\qquad u_{i,j} = u(x_i, t_j)$



$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right\}$$

$$- \frac{x_i^2}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right\}$$

$$\underset{n\times n}{A^{[j]}}\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ \vdots \\ u_{n,j+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{[j]} \\ \vdots \\ b_n^{[j]}\end{pmatrix}$$, essendo $A^{[j]}$ reale, simmetrica e tridiagonale.

$$A^{[j]}_{ii} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \qquad A^{[j]}_{i,i+1} = -\frac{1}{2h^2} + \frac{x_i^2}{4h} \qquad A^{[j]}_{i,i-1} = -\frac{1}{2h^2} - \frac{x_i^2}{4h}$$

$$b_i^{[j]} = \frac{2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2}$$

$$- \frac{x_i^2}{2}\,\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} + \cancel{\left(\frac{1}{2h^2} + \frac{x_1^2}{4h}\right) u_{0,j+1}\,\delta_{i,1}} + \cancel{\left(\frac{1}{2h^2} - \frac{x_n^2}{4h}\right) u_{n+1,j+1}\,\delta_{i,n}}.$$

A è strettamente diagonalmente dominante se $\frac{x_i^2}{4h} \le \frac{1}{2h^2}$ $(i = 1, \dots, n)$

$\iff 0 < h \le \frac{2}{x_i^2}$ $(i = 1, \dots, n)$. Quindi: se $0 < h < \frac{2}{9}$

<u>Dati di frontiera</u>: $u_{0,j} = u_{n+1,j} = 0$, $u_{i,0} = 1$, $u_t(x_i, 0) = 2$

$$u_{i,1} \cong u_{i,0} + k\, u_t(x_i, 0) + \tfrac{1}{2}k^2 u_{tt}(x_i, 0)$$

$$= 1 + 2k + \tfrac{1}{2}k^2\left\{\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2} - x_i^2\,\frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h}\right\}.$$

② $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 2$, non necessariamente equidistanti

Sia $u(x,t) = v(x,t) + x$. Allora

$$\begin{cases} -((16-x^2)v')' + (x^2+1)v = x^4 + 2x + x(x^2+1) = x^4 + x^3 + 3x \overset{\text{def}}{=} f(x) \\ v(0) = v(2) = 0 \end{cases}$$

Trovare $v \in H_0^1(0,2)$ tale che per ogni $\varphi \in H_0^1(0,2)$ si ha:

$$\int_0^2 \{(16-x^2)v'\varphi' + (x^2+1)v\varphi\}\,dx = \int_0^2 f\varphi\,dx.$$

Per $i = 1, \dots, n$ sia

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\[2mm] \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\[2mm] 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

$u \simeq \sum_{j=1}^n c_j \phi_j$

$\varphi = \phi_i$

Allora $\sum_{j=1}^n c_j A_{ij} = b_i$,

dove

$$A_{ij} = \int_0^2 \{(x^2+1)\phi_i\phi_j + (16-x^2)\phi_i'\phi_j'\}\,dx$$

$$b_i = \int_0^2 f\phi_i\,dx.$$

A è reale, simmetrica e tridiagonale. È la matrice di Gram del sistema linearmente indipendente $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ rispetto al prodotto scalare [in $H_0^1(0,2)$]:

$$(u,v)_{alt.} = \int_0^2 \{(x^2+1)u\bar{v} + (16-x^2)u'\bar{v}'\}\,dx.$$

$$\|u\|^2_{H_0^1(0,2)} \le (u,u)_{alt.} \le 16\,\|u\|^2_{H_0^1(0,2)}$$

Dunque i due prodotto scalari generano la stessa topologia in $H_0^1(0,2)$. $\Rightarrow$ A è invertibile con autovalori in $[1,16]$.

③ Siano x_i i nodi degli splines ϕ_i. Scrivendo $u=\sum_i c_i \phi_i$ e $\varphi=\phi_i$ si ottiene $\sum_{j=1}^{N} c_j A_{ij} = b_i$, dove

$$A_{i,j} = \iint_\Omega \left\{ e^{-x^2-y^2} \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j + (x^2+y^2+1)\phi_i\phi_j \right\} dx\, dy$$

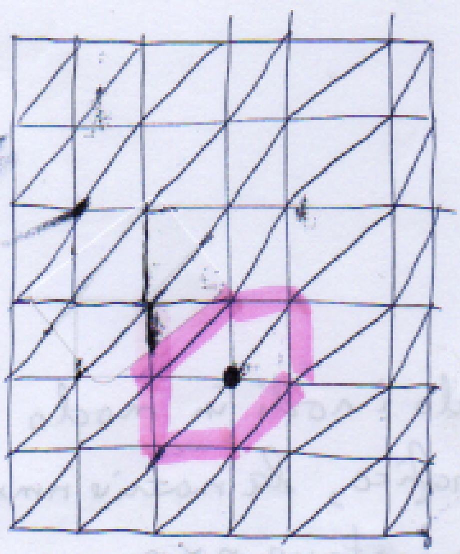
$$b_i = \iint_\Omega f \phi_i \, dx\, dy$$

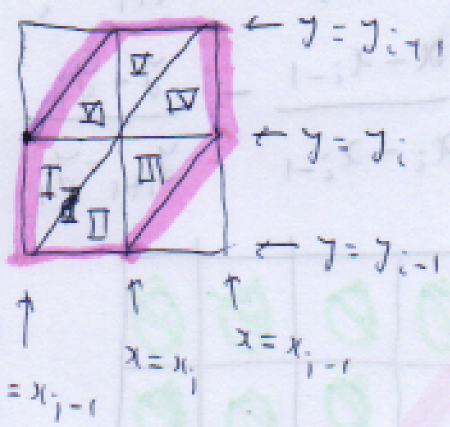
Essendo $\left\{ \begin{array}{l} 1 \le x^2+y^2 \le 20 \\ e^{-20} \le e^{-x^2-y^2} \le 1 \end{array} \right\}$ in Ω, si ha rispetto al prodotto scalare (in $H_0^1(\Omega)$):

$$(u,v)_{alt.} = \iint_\Omega \left\{ (x^2+y^2+1)\, u\bar{v} + e^{-x^2-y^2} \nabla u \cdot \nabla v \right\} dx\, dy$$

$$e^{-20} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le (u,u)_{alt.} \le 20 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Siccome A è la matrice di Gram del sistema linearmente indipendenti $\{\phi_i\}$, A è invertibile con autovalori in $[e^{-20}, 20]$.





$$\mathcal{A}u = -\nabla\cdot\left(e^{-x^2-y^2}\nabla u\right) + (x^2+y^2+1)u, \quad u \in H_0^2(\Omega)$$

$$(\mathcal{A}u,u)_{L^2(\Omega)} = \iint_\Omega \left\{ e^{-x^2-y^2} \|\nabla u\|^2 + (x^2+y^2+1)|u|^2 \right\} dx\, dy$$

$\ge \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \mathcal{A}$ è un operatore coercivo

Quindi il metodo degli ~~differenze~~ elementi finiti converge alla soluzione unica $u = A^{-1} f$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$, con l'errore dell'ordine $O(h^2+k^2)$ se $x_{i+1}-x_i = h$ e $y_{j+1}-y_j = k$ (grid equidistante).

$$\phi_{(i,j)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{in I} \\[2ex] \dfrac{y-y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} & \text{in II} \\[2ex] \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{in IV} \\[2ex] \dfrac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j} & \text{in V} \\[2ex] \dfrac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} - \dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} & \text{in III} \\[2ex] \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} - \dfrac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} & \text{in VI} \end{cases}$$

$$\phi_{(i_1,j_1)}(x_{i_2}, y_{j_2}) = \delta_{i_1 i_2}\,\delta_{j_1 j_2}$$

$A =$ 

Ordinando i nodi in modo lessicografico, la matrice $nm \times nm$ A è una matrice $n \times n$ tridiagonale a blocchi, dove ogni blocco è una matrice $m \times m$ tridiagonale.

4 $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x\cos(y)+1\\e^x\sin(y)\end{pmatrix}\to F'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x\cos(y) & -e^x\sin(y)\\e^x\sin(y) & e^x\cos(y)\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \det F'=e^{2x}\neq 0$

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\left[F'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]^{-1}F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-e^{-2x}\begin{pmatrix}e^x\cos(y) & e^x\sin(y)\\-e^x\sin(y) & e^x\cos(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^x\cos(y)+1\\e^x\sin(y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+e^{-x}\cos(y)\\-e^{-x}\sin(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1-e^{-x}\cos(y)\\y+e^{-x}\sin(y)\end{pmatrix}$$

$$\Phi'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+e^{-x}\cos(y) & e^{-x}\sin(y)\\-e^{-x}\sin(y) & 1+e^{-x}\cos(y)\end{pmatrix}\longrightarrow\Phi'\begin{pmatrix}0\\\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

con raggio spettrale $=0$.

Secondo il teorema di Ostrowski esiste un intorno U di $\begin{pmatrix}0\\\pi\end{pmatrix}$ tale che l'iterazione di Newton

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n-1-e^{-x_n}\cos(y_n)\\y_n+e^{-x_n}\sin(y_n)\end{pmatrix}$$

conduce ad una successione $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\\pi\end{pmatrix}$ se $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in U$.

$>$ Sia $z=x+iy$ e $f(z)=e^z+1$. Da risolvere: $f(z)=0$.

Sia $\varphi(z)=(1\ \ 0)\,\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+i(0\ \ 1)\,\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=z-1-e^{-z}$

Il solito metodo di Newton scalare conduce all'iterazione della mappa

$$\psi(z)=z-\frac{f(z)}{f'(z)}=z-\frac{e^z+1}{e^z}=z-1-e^{-z}.$$

Di conseguenza, i due metodi di Newton coincidono. Inoltre, $\psi'(z)=1+e^{-z}$ ha modulo <1 sse $(1+e^{-x}\cos(y))^2+(e^{-x}\sin(y))^2<1$

$\iff 1+e^{-2x}+2e^{-x}\cos(y)<1\leftrightarrow e^{-x}(e^{-x}+2\cos(y))<0$

$\leftrightarrow e^{-x}+2\cos(y)<0\leftrightarrow(x,y)\in\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\left\{(x,y):\begin{array}{l}(n+\frac{1}{2})\pi<y<(n+\frac{3}{2})\pi\\e^{-x}+2\cos(y)<0\end{array}\right\}$

5. $f(x)=x^2(x-2) \longrightarrow f'(x)=3x\left(x-\frac{4}{3}\right) \longrightarrow f''(x)=6\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$$F(x) \stackrel{def}{=} x-\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{3x\left(x-\frac{4}{3}\right)-x(x-2)}{3\left(x-\frac{4}{3}\right)} = \frac{2}{3}x\,\frac{x-1}{x-\frac{4}{3}}$$

$$\hookrightarrow F'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{6(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$+\ 0\ -\ |\ -\ 0\ +$ ($\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2)

Metodo di Newton:

$$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{2}{3}x_n\,\frac{x_n-1}{x_n-\frac{4}{3}}$$

Poiché f' e f'' hanno segno costante per $x>\frac{4}{3}$ e lo zero $x=2$ è semplice, $x_n \to 2$ con velocità quadratica se $x_0>\frac{4}{3}$.

Risolviamo ora $-1<F'(x)<+1$

$$F'(x)>-1 \leftrightarrow \frac{2}{3}(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>-\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \leftrightarrow \frac{5}{3}x^2-\frac{40}{9}x+\frac{8}{3}>0$$

$$\leftrightarrow x^2-\frac{8}{3}x+\frac{8}{5}>0 \leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)^2>\frac{16}{9}-\frac{8}{5}=\frac{8}{45}$$

$$\longleftrightarrow x<\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} \text{ oppure } x>\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$F'(x)<+1 \leftrightarrow \frac{2}{3}(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)<\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{8}{9}>0$$

$$\leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)^2>-\frac{8}{9} \text{ (sempre)}.$$

$$-1<F'(x)<+1 \longleftrightarrow \underset{\simeq 0.9117}{x<\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}} \text{ oppure } x>\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} \simeq 1.7549$$

Poiché lo zero $x=0$ è doppio, $x_n \to 0$ con velocità lineare se $x_0<\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$. Con lo stesso argomento si dimostra che $x_n \to 2$ con velocità quadratica se $x_0>\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$, un risultato già ottenuto.