

Fondamenti di Fisica Matematica: Scritto Generale
20.02.2015

Cognome e nome: Matricola:

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
6	7	6	7	4	30

1. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (\lambda + 9)y = 0, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ y(0) = 2y'(0), \\ y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(\pi, t) + 2u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right). \end{cases}$$

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} + 16u + \cos^2(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - x^2, \quad u_t(x, 0) = x(1 - x). \end{aligned}$$

4. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + 8u &= 4 \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y), \\ u(-3, y) &= u(3, y) = u(x, -2) = u(x, 2) = 1, \end{aligned}$$

dove $(x, y) \in \Omega \stackrel{\text{def}}{=} [-3, 3] \times [-2, 2]$.

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare gli zeri dell'equazione

$$x^3(x^2 - 1) = 0.$$

Discutere, per ciascuno zero, lo schema di iterazione, la scelta di x_0 che garantisce la convergenza e la velocità della convergenza.