

Fondamenti di Fisica Matematica: Scritto Generale
20.01.2015

Cognome e nome: Matricola:

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
6	7	6	7	4	30

1. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' - 8y' + (\lambda + 41)y = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y(\pi) = 2y'(\pi), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u, & 0 \leq x \leq 2\pi, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(2\pi, t) + 2u(2\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3e^{-2x} \cos\left(\frac{3}{4}x\right). \end{cases}$$

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 9u + \sin^2(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - x^2, \quad u_t(x, 0) = 2x(1 - x). \end{aligned}$$

4. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + 6u &= 3 \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y), \\ u(-2, y) &= u(2, y) = u(x, -3) = u(x, 3) = 1, \end{aligned}$$

dove $(x, y) \in \Omega \stackrel{\text{def}}{=} [-2, 2] \times [-3, 3]$.

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare il primo zero positivo ξ dell'equazione

$$\cos(x) = x.$$

Discutere lo schema di iterazione, la scelta di x_0 che garantisce la convergenza, e la velocità della convergenza.