

Fondamenti di Fisica Matematica: Scritto Generale  
09.11.2012

Cognome e nome: ..... Matricola: .....

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
6	7	6	7	4	30

1. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 8y' + (\lambda + 52)y = 0, & 0 \leq x \leq 5, \\ y(5) = y'(5), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 6u_x + 3u, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(\pi, t) + u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2e^{-x} \cos\left(\frac{7}{2}x\right). \end{cases}$$

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2(\pi x), & 0 \leq x \leq 4, t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(4, t) = 0, & u(x, 0) = 16 - x^2. \end{aligned}$$

4. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + (\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + 1)u &= x \sin(\pi x) \sin(\pi y), \\ u(-1, y) &= u(1, y) = u(x, -1) = u(x, 1) = 0, \end{aligned}$$

dove  $(x, y) \in \Omega \stackrel{\text{def}}{=} [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare il primo zero positivo  $\xi$  dell'equazione

$$\tan(x) = 2x.$$

Discutere lo schema di iterazione, la scelta di  $x_0$  che garantisce la convergenza, e la velocità della convergenza.