



SISTEMI DINAMICI

Fisica Matematica 2

Laurea Magistrale in Matematica

Corso di 6 Crediti

A.A. 2017-2019

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Cagliari

Viale Merello 92, 09123 Cagliari

070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 328-0089799 (cell.)

cornelis110553@gmail.com

<http://krein.unica.it/~cornelis>

LaTeX compilation date: 19 gennaio 2018

Indice

I	Equazioni di Hamilton	1
1	Equazioni del moto di Hamilton	1
2	Trasformazioni canoniche	6
3	Parentesi di Poisson e di Lagrange	10
4	Lagrangiana per i Sistemi Continui	13
5	Hamiltoniana per i Sistemi Continui	17
6	Esempi	18
II	Punti di equilibrio	21
1	Sistema autonomo generalizzato	21
2	Derivata di Lie e costanti del moto	22
3	Classificazione dei punti di equilibrio	23
4	Esempi	27
III	Stabilità secondo Liapunov	31
1	Stabilità secondo Liapunov	31
2	Sistemi autonomi sulla retta	32
3	Sistemi lineari a coefficienti costanti	33
4	Funzione di Liapunov e linearizzazione	38
5	Stabilità e loro applicazioni	46
IV	Stabilità dei sistemi dinamici discreti	53
1	Teorema delle contrazioni	53
2	Alcuni esempi illustrativi	55
3	L'insieme di Mandelbrot	63
V	Biforcazioni e cicli-limite	69
1	Teorema di Poincaré-Bendixson	69
2	Applicazioni ai sistemi non lineari	78

VI	Frattali	93
1	Insieme di Cantor e le sue varianti	93
2	Caratteristiche dei frattali	97
3	Dimensione di Hausdorff	99
VII	Equazioni Integrabili	105
1	Storia di alcune equazioni integrabili	105
2	Generazione di equazioni integrabili	110
3	Inverse scattering transform per la KdV	113
4	Inverse scattering transform per la NLS	120
5	Superfici solitoniche	126
A	3-ciclo implica caos	131
B	Gruppi di Lie	137
1	Algebre di Lie	137
2	Algebra di Lie di un gruppo di matrici	138
3	Alcuni esempi dettagliati	142
C	Forma Normale di Jordan	147
1	Catene di Jordan	147
2	Forme normali di Jordan: Matrici complesse	149
3	Forme normali di Jordan: Matrici reali	150
4	Decomposizione spettrale	151
5	Dimostrazione del Lemma III.6	153
D	Esercizi	155
	Bibliografia	165

Capitolo I

Equazioni di Hamilton

1 Equazioni del moto di Hamilton

Nella formulazione lagrangiana il moto di un sistema ad n gradi di libertà viene descritto dalle n equazioni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{I.1})$$

dove $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ è la lagrangiana. Lo stato del sistema viene rappresentato da un unico punto nello *spazio delle configurazioni* n -dimensionale le cui coordinate sono le coordinate generalizzate q_i . Descrivere il moto del sistema significa seguire questo punto lungo la sua traiettoria nello spazio delle configurazioni. Tutte le n coordinate devono essere indipendenti e non devono essere presenti equazioni di vincolo. Se le n coordinate non fossero indipendenti si dovrebbe, prima di impostare il problema, ridurre il numero delle incognite ad un opportuno $m < n$.

Nella formulazione hamiltoniana si cercherà di descrivere il moto con un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine. Le $2n$ equazioni del moto descriveranno l'evoluzione del punto rappresentativo del sistema in uno spazio di dimensione $2n$, detto *spazio delle fasi*, le cui coordinate saranno le $2n$ variabili indipendenti associate al sistema. La scelta naturale, ma non l'unica possibile, per raddoppiare le coordinate indipendenti del problema, è quella di scegliere metà di esse come le n coordinate generalizzate q_i . Come rimanenti coordinate scegliamo i *momenti coniugati* o *generalizzati* p_i definite da:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (\text{I.2})$$

Le variabili $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ sono generalmente note come *variabili canoniche*.

La cosiddetta trasformazione di Legendre da (q, \dot{q}, t) a (q, p, t) agisce come segue. Il differenziale della lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ è

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Definendo l'*hamiltoniana* come

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{I.3})$$

e differenziando il secondo membro della (I.3), si ottiene

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

D'altra parte, il differenziale dell'*hamiltoniana* è dato da:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Di conseguenza, otteniamo le $2n + 1$ equazioni

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.4a})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.4b})$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (\text{I.4c})$$

Le equazioni (I.4a) e (I.4b) sono note come le *equazioni di Hamilton*. Esse costituiscono un sistema di $2n$ equazioni del moto del primo ordine e sostituiscono le n equazioni del secondo ordine di Lagrange.

Nello studio di un problema concreto la costruzione dell'hamiltoniana deve comunque passare attraverso la formulazione lagrangiana. Il procedimento formale richiede una sequenza piuttosto impegnativa di passaggi:

- a. Dopo aver scelto le coordinate generalizzate q_i , si costruisca la lagrangiana $L(q, \dot{q}, t) = T - V$.
- b. Attraverso le definizioni (I.2) si ricavano i momenti generalizzati in funzione di q , \dot{q} e t .
- c. Utilizzando la (I.3) si costruisce l'hamiltoniana, che risulta (in questo stadio) essere una funzione di q , \dot{q} , p e t .
- d. Invertendo le (I.2) si ricavano le \dot{q}_i in funzione di (q, p, t) .
- e. Eliminando \dot{q} dall'espressione per l'hamiltoniana, si arriva ad un'hamiltoniana $H = H(q, p, t)$. Soltanto da questo punto si possono derivare le equazioni di Hamilton.

Esempio I.1 (campo elettromagnetico) Sia

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - q \left(V(\vec{r}) - \frac{1}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \right),$$

dove m e q sono la massa e la carica della particella, c è la velocità della luce e $V = V(\vec{r})$ e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ sono i potenziali elettrici e magnetici. Le tre equazioni di Eulero-Lagrange assumono la seguente forma

$$m\ddot{\vec{r}} = -q \left(\nabla V + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \left(\dot{\vec{r}} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) \right) = q\vec{E} + \frac{q}{c}(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}),$$

dove \vec{E} e \vec{B} sono i campi elettrici e magnetici. Le coordinate generalizzate sono $\vec{r} = (x, y, z)$, mentre i momenti generalizzati sono:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{q}{c}A_2, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{q}{c}A_3.$$

In altre parole, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}$. Quindi l'hamiltoniana è data da:

$$H = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 + qV(\vec{r}) = \frac{1}{2m} \left| \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right|^2 + qV(\vec{r}).$$

Le sei equazioni di Hamilton si riducono a:

$$\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} = m\dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{p}} = -q\nabla V + \frac{q}{mc}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \cdot \nabla A.$$

□

Esempio I.2 (Toda lattice periodico) Consideriamo la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + V(q_2 - q_1) + V(q_3 - q_2) + \dots + V(q_n - q_{n-1}) + V(q_1 - q_n),$$

dove

$$V(r) = e^{-r} + r - 1 = \frac{1}{2}r^2 + O(r^3), \quad V'(r) = 1 - e^{-r} = r + O(r^2), \quad r \rightarrow 0.$$

Allora le equazioni di Hamilton sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_j, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} = V'(q_{j+1} - q_j) - V'(q_j - q_{j-1}) \\ &= e^{-(q_j - q_{j-1})} - e^{-(q_{j+1} - q_j)}, \end{aligned}$$

essendo $q_0 = q_n$ e $q_{n+1} = q_1$. Di conseguenza, otteniamo la cosiddetta equazione non lineare della Toda lattice

$$\ddot{q}_j = \begin{cases} e^{-(q_1 - q_n)} - e^{-(q_2 - q_1)}, & j = 1, \\ e^{-(q_j - q_{j-1})} - e^{-(q_{j+1} - q_j)}, & j = 2, \dots, n-1, \\ e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{-(q_1 - q_n)}, & j = n. \end{cases}$$

Quest'equazione coincide con l'equazione di Eulero-Lagrange. Si vede subito che H e $p_1 + \dots + p_n$ sono costanti del moto. □

Una coordinata si dice *ciclica* se non compare esplicitamente nella lagrangiana. In virtù delle equazioni di Eulero-Lagrange, se q_j è una coordinata ciclica, allora il momento generalizzato p_j è una costante del moto, poichè

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0.$$

Inoltre, se q_j è ciclica, allora non compare esplicitamente nemmeno nell'hamiltoniana, infatti, sfruttando le equazioni di Eulero-Lagrange, si ha

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Un'altra legge di conservazione segue dalla (I.4c) nel caso in cui H (o L) non dipende esplicitamente dal tempo. Infatti, in tal caso, si ha

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}$$

Infine supponiamo che le coordinate generalizzate q_1, \dots, q_n e i momenti generalizzati p_1, \dots, p_n non siano indipendenti ma invece siano sottoposti ad m (con $m < n$) vincoli

$$\psi_k(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Introducendo i moltiplicatori di Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ e l'hamiltoniana estesa

$$\begin{aligned}H_e(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, t) &= H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \lambda_k \psi_k(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t),\end{aligned}$$

otteniamo le seguenti equazioni di Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_e}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.5a})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H_e}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.5b})$$

$$0 = \frac{\partial H_e}{\partial \lambda_j} = \psi_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (\text{I.5c})$$

Introduciamo ora la formulazione simplettica delle equazioni di Hamilton. Consideriamo le nuove variabili $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ nel seguente modo:

$$\eta_i = \begin{cases} q_i, & i = 1, \dots, n, \\ p_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Allora

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)_i = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial H}{\partial p_{i-n}} = \dot{q}_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Di conseguenza, le equazioni di Hamilton si possono scrivere nel seguente modo:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad (\text{I.6})$$

dove

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -I_n & 0_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{J} si dice *simplettica* nel senso che

$$\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -I_{2n}.$$

Inoltre, $\det \mathbf{J} = 1$.

2 Trasformazioni canoniche

Eseguiamo una trasformazione simultanea delle coordinate e dei momenti indipendenti q_i e p_i in un nuovo sistema P_i e Q_i mediante un sistema di equazioni invertibili

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t), \\ P_i = P_i(q, p, t), \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

che costituisce una trasformazione puntuale dello spazio delle fasi. Passando da coordinate canoniche q e p a coordinate canoniche Q e P , la trasformazione si dice *canonica* se esiste una funzione $K(Q, P, t)$ tale che

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (\text{I.8})$$

La funzione K gioca il ruolo dell'hamiltoniana nel nuovo sistema di coordinate. Si può dimostrare l'esistenza di una funzione generatrice $F = F_1(q, Q, t)$ tale che

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Una trasformazione canonica del tipo (I.7) si dice *ristretta* se la funzione generatrice $F = F_1(q, Q, t)$ non dipende esplicitamente da t . In tal caso $K = H$ per tutte le trasformazioni canoniche ristrette.

Esempio I.3 (oscillatore armonico) L'hamiltoniano associato all'oscillatore armonico ha, per opportune costanti m (massa) e k (coefficiente elastico), la seguente forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2 + m^2\omega^2q^2}{2m},$$

essendo $\omega = \sqrt{k/m}$. Ponendo

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q), \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos(Q),$$

risulta

$$H = \omega P.$$

È evidente che Q è una variabile ciclica, quindi $\dot{P} = 0$ e

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \implies Q = \omega t + \alpha.$$

Sostituendo, si ha

$$q = \sqrt{\frac{2H}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha), \quad p = \sqrt{2mH} \cos(\omega t + \alpha).$$

□

Discutiamo ora le trasformazioni canoniche ristrette

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p), \\ P_i = P_i(q, p), \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

nell'ambito della formulazione simplettica. Tale trasformazione

$$(q, p) \mapsto (Q, P)$$

determina che

$$\boldsymbol{\eta} = (q, p) \mapsto \boldsymbol{\zeta} = (Q, P), \quad (\text{I.10})$$

essendo

$$\eta_i = \begin{cases} q_i, & i = 1, \dots, n, \\ p_{i-n}, & i = n + 1, \dots, 2n; \end{cases}$$

$$\zeta_i = \begin{cases} Q_i, & i = 1, \dots, n, \\ P_{i-n}, & i = n + 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Definendo la matrice quadrata \mathbf{M} di ordine $2n$ come:

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \quad M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j},$$

otteniamo

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (\text{I.11})$$

Siccome

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{2n} M_{ji} \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}$$

e dunque

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}^T \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}},$$

arriviamo alle nuove equazioni di Hamilton

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \quad (\text{I.12})$$

dove nella terza uguaglianza si è fatto uso della(I.6).

Da quanto precedentemente detto per le funzioni generatrici, nel caso di trasformazioni canoniche ristrette, la nuova hamiltoniana è uguale alla vecchia espressa nelle nuove variabili:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \quad (\text{I.13})$$

La trasformazione $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ sarà canonica se e solo se la matrice \mathbf{M} verifica la condizione

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}. \quad (\text{I.14})$$

Proposizione I.4 *L'insieme delle matrici reali $2n \times 2n$*

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{\mathbf{M} : \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}\}$$

costituisce un gruppo non abeliano. Inoltre, $\mathbf{M} \in Sp(2n, \mathbb{R})$ se e solo se $\mathbf{M}^T \in Sp(2n, \mathbb{R})$.

Il gruppo $Sp(2n, \mathbb{R})$ si chiama il *gruppo simplettico*. Si può dimostrare che tutte le matrici appartenenti a $Sp(2n, \mathbb{R})$ hanno determinante uguale a 1.¹ Il caso $n = 1$ è particolarmente elementare. In tal caso la matrice reale $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartiene a $Sp(2, \mathbb{R})$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

oppure: se e solo se $ad - bc = 1$. Quindi $Sp(2, \mathbb{R})$ coincide con il gruppo $SL_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine 2 con determinante uguale a 1.

¹ $Sp(2n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie connesso e non compatto. Una matrice reale A di ordine $2n$ appartiene alla sua algebra di Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ se e solo se $A^T = \mathbf{J} A \mathbf{J}$.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Allora

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) \mathbf{J} (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)^T &= (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) \mathbf{J} (\mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_1^T) \\ &= \mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 \mathbf{J} \mathbf{M}_2^T) \mathbf{M}_1^T = \mathbf{M}_1 \mathbf{J} \mathbf{M}_1^T = \mathbf{J}, \end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Sia ora $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Allora, essendo $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$, si ha

$$(-\mathbf{J}) \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = (-\mathbf{J}) \mathbf{J} = I_{2n},$$

e quindi $-\mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{J}$ è l'inversa di \mathbf{M}^T . Dunque

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} (\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{M}^T (-\mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{J}) (\mathbf{J}) = \mathbf{J},$$

essendo $\mathbf{J}^2 = -I_{2n}$. Di conseguenza, $\mathbf{M}^T \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Sia ora $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Allora, poichè $\mathbf{M}^T \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{M}^{-1})^T &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{M}^T)^{-1} \\ &= -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{M}^T)^{-1} = -(\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M})^{-1} = -(\mathbf{J})^{-1} = \mathbf{J}, \end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{M}^{-1} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. □

È chiaro che $\det \mathbf{M} = \pm 1$ per ogni $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Infatti, se $\mathbf{M} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ e quindi $\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}$, si ha $1 = \det \mathbf{J} = (\det \mathbf{M})^2 \det \mathbf{J} = (\det \mathbf{M})^2$. Di conseguenza, la misura di un elemento di volume nello spazio delle fasi è invariante rispetto alle trasformazioni canoniche ristrette. Infatti, la matrice jacobiana della trasformazione $\boldsymbol{\eta} \mapsto \boldsymbol{\zeta}$ è data da

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \quad M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j},$$

e tale matrice ha determinante uguale ad ± 1 . Quindi *la misura di qualunque regione nello spazio delle fasi è un invariante canonico.*

Introducendo il prodotto scalare indefinito

$$\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} = (\mathbf{J} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}^T \mathbf{J} \mathbf{m}, \quad \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

si vede che il gruppo $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ consiste nelle matrici \mathbf{M} che sono \mathbf{J} -ortogonali. Infatti,

$$\{\mathbf{M} \mathbf{m}, \mathbf{M} \mathbf{n}\} = (\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{J} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}, \quad \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

3 Parentesi di Poisson e di Lagrange

a. Parentesi di Poisson. La *parentesi di Poisson* di due funzioni u e v delle variabili canoniche (q, p) viene definita da

$$\begin{aligned} [u, v]_{q,p} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = [u, v]_{\boldsymbol{\eta}}. \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Poichè

$$\begin{cases} [q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p}, \\ [q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{jk} = -[p_j, q_k]_{q,p}, \end{cases}$$

otteniamo la matrice quadrata delle parentesi di Poisson

$$[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}]_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}. \quad (\text{I.16})$$

Dimostriamo ora che ogni parentesi di Poisson è un invariante canonico.

Proposizione I.5 *La parentesi di Poisson di due variabili u e v non cambia sotto una trasformazione canonica ristretta.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ una trasformazione canonica ristretta. Allora

$$\begin{aligned} [u, v]_{\boldsymbol{\eta}} &= \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \left[\mathbf{M}^T \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \mathbf{J} \mathbf{M}^T \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = [u, v]_{\boldsymbol{\zeta}}, \end{aligned}$$

come affermato. □

Grazie alla Proposizione I.5, si può scrivere $[u, v]$ per la parentesi di Poisson $[u, v]_{\boldsymbol{\eta}}$ senza mettere in evidenza le variabili canoniche. Elenchiamo ora le proprietà algebriche della parentesi di Poisson.

Teorema I.6 *Le parentesi di Poisson hanno le seguenti proprietà algebriche:*

$$[u, u] = 0, \quad (\text{I.17a})$$

$$[u, v] = -[v, u], \quad (\text{antisimmetria}) \quad (\text{I.17b})$$

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w], \quad (\text{bilinearità}) \quad (\text{I.17c})$$

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w], \quad (\text{I.17d})$$

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (\text{identità di Jacobi}) \quad (\text{I.17e})$$

dove a e b sono costanti.

Dimostrazione. La (I.17b) è immediata dalla (I.15) e implica la (I.17a). Inoltre, la bilinearità della parentesi di Poisson è immediata dalla (I.15). Inoltre,

$$\begin{aligned} [u, w]_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial uv}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial uv}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right] v + u \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right] \\ &= [u, w]v + u[v, w], \end{aligned}$$

che dimostra la (I.17d).

La dimostrazione della identità di Jacobi comporta a molti calcoli. Infatti,

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] &= \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} [v, w] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[\sum_{k,l} \frac{\partial v}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial w}{\partial \eta_l} \right] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial w}{\partial \eta_l} + \frac{\partial v}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_l} \right], \\ [v, [w, u]] &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} [w, u] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[\sum_{k,l} \frac{\partial w}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial u}{\partial \eta_l} \right] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial u}{\partial \eta_l} + \frac{\partial w}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_j \partial \eta_l} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[w, [u, v]] &= \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} [u, v] \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[\sum_{k,l} \frac{\partial u}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial v}{\partial \eta_l} \right] \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial v}{\partial \eta_l} + \frac{\partial u}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_j \partial \eta_l} \right].
\end{aligned}$$

Raccogliendo i termini con le derivate parziali seconde di w , otteniamo

$$\sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial v}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_l} + \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial \eta_i} J_{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial u}{\partial \eta_l}.$$

Cambiando i pedici $(i, j, k, l) \mapsto (k, l, j, i)$ nel secondo termine, otteniamo

$$\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \frac{\partial v}{\partial \eta_k} [J_{ij} + J_{ji}] J_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_j \partial \eta_l}.$$

Poichè $J_{ij} + J_{ji} = 0$, risulta infine la (I.17e). \square

b. Parentesi di Lagrange. La *parentesi di Lagrange* di due variabili u e v rispetto alle variabili $\boldsymbol{\eta} = (q, p)$ è definita da:

$$\{u, v\}_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}. \quad (\text{I.18})$$

In tal caso

$$\begin{aligned}
\{u, v\}_{\boldsymbol{\zeta}} &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial v} = \left[\mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} \\
&= \left[\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} = \{u, v\}_{\boldsymbol{\eta}}.
\end{aligned}$$

Quindi la parentesi di Lagrange di due variabili u e v non cambia sotto una trasformazione canonica ristretta.

Utilizzando la definizione (I.18), risultano le seguenti identità:

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{i,j}.$$

Quindi

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \{q_i, q_j\}_{i,j=1}^n & \{q_i, p_j\}_{i,j=1}^n \\ \{p_i, q_j\}_{i,j=1}^n & \{p_i, p_j\}_{i,j=1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \quad (\text{I.19})$$

Dalle equazioni (I.16) e (I.19) e dall'invarianza delle due parentesi rispetto alle trasformazioni canoniche ristrette otteniamo

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\}[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}] = \mathbf{J}\mathbf{J} = -I_{2n}. \quad (\text{I.20})$$

c. Quantità conservate. Sia $u = u(q, p, t)$ una qualsiasi quantità. Allora

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

In notazioni simplettiche si ha:

$$\frac{du}{dt} = \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^T \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (\text{I.21})$$

Quindi *una quantità u che non dipende esplicitamente dal tempo è una costante del moto se e solo se $[u, H] = 0$* . In particolare, l'hamiltoniana H è una costante del moto se essa non dipende esplicitamente dal tempo.

Proposizione I.7 *Siano u e v quantità che non dipendono esplicitamente dal tempo. Allora la loro parentesi di Poisson è una costante del moto se lo sono u e v .*

Dimostrazione. Applicando l'identità di Jacobi (I.17e), risulta:

$$[[u, v], H] = -[H, [u, v]] = [v, [H, u]] + [u, [v, H]] = -[v, [u, H]] + [u, [v, H]] = 0,$$

essendo $[u, H] = 0 = [v, H]$. □

4 Lagrangiana per i Sistemi Continui

Lasciamoci guidare dal seguente

Esempio I.8 Consideriamo un sistema composto da una catena biinfinita di oscillatori (ciascuno di massa m) che si possono muovere solo lungo l'asse della catena. Indicando lo spostamento della i -esima particella dalla sua posizione di equilibrio con q_i , l'energia cinetica e quella potenziale sono date da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} m \dot{q}_i^2, \quad V = \frac{k}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (q_{i+1} - q_i)^2,$$

essendo k una costante positiva. In tal caso si ottiene la lagrangiana

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [m\dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} aL_i, \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

dove a è la distanza di equilibrio tra i singoli oscillatori. Le infinite equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} \right) = 0.$$

In altre parole,

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \left(\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (\text{I.23})$$

Facendo tendere $a \rightarrow 0^+$ per ottenere un continuo di oscillatori, m/a si riduce alla massa lineare del sistema continuo. D'altra parte,

$$\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2} \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{q(x+a) - 2q(x) + q(x-a)}{a^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

dove x è la coordinata spaziale. La legge di Hooke specifica che l'allungamento per unità di lunghezza ξ è proporzionale alla forza F che si esercita sull'asta:

$$F = K\xi,$$

dove K è il cosiddetto modulo di Young. Si ha:

$$F = k(q_{i+1} - q_i) = ka \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right) \rightarrow Kq_x,$$

dove $ka \rightarrow K$ se $a \rightarrow 0^+$. Di conseguenza, per $a \rightarrow 0^+$ la (I.23) tende all'equazione differenziale parziale

$$\mu \ddot{q} - Kq_{xx} = 0. \quad (\text{I.24})$$

Per $a \rightarrow 0^+$, l'espressione (I.22) per la lagrangiana tende a

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mu \dot{q}^2 - K \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(q, q_x, \dot{q}, x, t),$$

essendo \mathcal{L} la densità lagrangiana. □

In generale, il *principio di Hamilton* per i sistemi continui monodimensionali consiste nel determinare i punti stazionari dell'integrale di azione

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \mathcal{L},$$

dove

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, \dot{q}, x, t).$$

La variazione dell'integrale di azione I si applica solo a q e alle sue derivate, lasciando invariati il punto iniziale (x_1, t_1) e quello finale (x_2, t_2) . Ponendo

$$q(x, t; \alpha) = \bar{q}(x, t; 0) + \alpha \zeta(x, t),$$

dove $\zeta(x, t)$ è qualunque funzione regolare che si annulla negli estremi (x_1, t_1) e (x_2, t_2) , mediante due integrazioni per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \frac{\partial q_x}{\partial \alpha} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial q}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \right], \end{aligned}$$

essendo uguale a zero la variazione di q negli estremi. Di conseguenza, arriviamo all'*equazione di Eulero-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} = 0. \quad (\text{I.25})$$

Nella (I.25) il posto degli n gradi di libertà è stato preso dal termine contenente la derivata rispetto a x . Ci sono infiniti gradi di libertà.

Se la lagrangiana dovesse dipendere anche dalle derivate (spaziali) seconde, cioè se

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_{xx}, \dot{q}, x, t),$$

il calcolo della variazione dell'integrale di azione diventa

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \frac{\partial q_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{xx}} \frac{\partial q_{xx}}{\partial \alpha} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial q}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{xx}} \right]. \end{aligned}$$

Di conseguenza, l'equazione di Eulero-Lagrange è data da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{xx}} = 0. \quad (\text{I.26})$$

Infine, se la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_{xx}, \dots, q_{x\dots x}, \dot{q}, x, t),$$

con la derivata rispetto a x fino all'ordine m , allora l'equazione di Eulero-Lagrange sarebbe

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial^j q}{\partial x^j}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (\text{I.27})$$

essendo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial^j q}{\partial x^j}}$$

la cosiddetta *derivata funzionale* di \mathcal{L} rispetto a q .

Se ci sono n variabili spaziali x_1, \dots, x_n e la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_{x_1}, \dots, q_{x_n}, \dot{q}, x_1, \dots, x_n, t),$$

con le derivate parziali fino al primo ordine, l'equazione di Eulero-Lagrange è data da:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{x_i}} = 0, \quad (\text{I.28})$$

essendo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{x_i}}$$

la derivata funzionale di \mathcal{L} rispetto a q . La (I.28) è facilmente generalizzabile al caso in cui la lagrangiana dipende dalle derivate parziali rispetto ad x_1, \dots, x_n fino all'ordine m , ma la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange conterrà le derivate miste.

Se la lagrangiana \mathcal{L} dipende da r coordinate generalizzate **indipendenti** q_1, \dots, q_r e le sue derivate parziali prime, si hanno le r equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}_j}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [q_j]_x} = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (\text{I.29})$$

Tali equazioni sono facilmente generalizzabili al caso in cui la lagrangiana dipende da r coordinate generalizzate indipendenti e loro derivate parziali fino all'ordine m .

5 Hamiltoniana per i Sistemi Continui

Supponiamo di avere un sistema continuo descritto dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, [q_1]_{x_1}, \dots, [q_1]_{x_r}, \dots, [q_n]_{x_1}, \dots, [q_n]_{x_r}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, x_1, \dots, x_r, t),$$

dove ci sono n coordinate generalizzate q_1, \dots, q_n e r variabili spaziali x_1, \dots, x_r . Introduciamo le *densità di momento* p_i ($i = 1, \dots, n$) e la *densità hamiltoniana* \mathcal{H} da:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.30a})$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (\text{I.30b})$$

Utilizzando le n equazioni (I.30a) per esprimere $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ in p_1, \dots, p_n , si ottiene la prima equazione di Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n \left(p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \right) = \dot{q}_i, \quad (\text{I.31})$$

dove $i = 1, \dots, n$. D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n \left(p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la (I.29) per r variabili spaziali. Utilizzando la (I.30a) e l'identità

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} = \sum_{j=1}^m \left(p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}},$$

otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i + \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}},$$

Quindi abbiamo dimostrato la seconda equazione di Hamilton

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}} = -\dot{p}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{I.32})$$

essendo

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_s}}$$

la derivata funzionale di \mathcal{H} rispetto a q .

6 Esempi

Discutiamo alcuni esempi significativi.

Esempio I.9 (NLS) Consideriamo la densità Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -i[q_x r_x + (qr)^2],$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e (q, r) sono le coordinate Hamiltoniane. Dalla (I.32) seguono le seguenti equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_x} = -2iq^2 r + iq_{xx}, \\ -\dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -2iqr^2 + ir_{xx}. \end{aligned}$$

Le due equazioni hanno la forma

$$iq_t + q_{xx} - 2q^2 r = 0, \quad (\text{I.33a})$$

$$-ir_t + r_{xx} - 2qr^2 = 0, \quad (\text{I.33b})$$

e sono le cosiddette *equazioni nonlineari di Schrödinger (NLS)*. Nel caso in cui $r = q^*$, si ha il caso defocusing

$$iq_t + q_{xx} - 2|q|^2 q = 0.$$

Se $r = -q^*$ (caso focusing), si trova invece

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0.$$

□

Esempio I.10 (KdV) Consideriamo ora la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_x q_t + (q_x)^3 + \frac{1}{2}(q_{xx})^2.$$

Dalla (I.26) segue

$$\frac{1}{2}(q_x)_t + \frac{1}{2}(q_t)_x - 3(q_x^2)_x + (q_{xx})_{xx} = 0,$$

e ponendo $u = q_x$, si arriva all'*equazione di Korteweg-de Vries (KdV)*:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (\text{I.34})$$

□

Esempio I.11 (mKdV) Consideriamo infine la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_x q_t - \frac{1}{2}(q_x)^4 + \frac{1}{2}(q_{xx})^2.$$

Dalla (I.26) segue

$$\frac{1}{2}(q_x)_t + \frac{1}{2}(q_t)_x + 2(q_x^3)_x + (q_{xx})_{xx} = 0,$$

e sostituendo $u = q_x$ si arriva all'*equazione di Korteweg-de Vries modificata* (mKdV):

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0. \tag{I.35}$$

□

Capitolo II

Punti di equilibrio

In questo capitolo studieremo la tipologia dei punti di equilibrio dei sistemi dinamici autonomi $\dot{y} = f(y)$. In particolare, studieremo in maniera approfondita i punti di equilibrio del sistema dinamico $\dot{x}(t) = Ax(t)$, dove A è una matrice reale 2×2 non dipendente da t . Infine, discuteremo l'oscillatore armonico in presenza di forze di attrito. Indichiamo come libri di testo [12, 27].

1 Sistema autonomo generalizzato

Consideriamo un sistema autonomo

$$\dot{y} = f(y),$$

dove f è localmente lipschitziana¹ in un aperto Ω di \mathbb{R}^n . È possibile analizzare le soluzioni del sistema mediante le loro immagini nello spazio dei vettori y , il cosiddetto spazio delle fasi.

Definizione II.1 Data una curva $t \rightarrow \varphi(t)$, chiamiamo *orbita*, *traiettoria* o *caratteristica* l'immagine di φ .

Essa gode delle seguenti proprietà:

- i) un'orbita corrisponde ad una famiglia di soluzioni del tipo:

$$y(t) = \varphi(t + c),$$

con $c \in \mathbb{R}$, traslate nel tempo. È, dunque, fissata un'orientazione dell'orbita, comune a tutte le soluzioni corrispondenti;

¹ f si dice lipschitziana se $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \text{cost} \cdot |x_1 - x_2|$ per ogni coppia di punti x_1, x_2 . Nel caso di Lipschitzianità locale (al contrario di quella globale) la costante dipende dal sottointervallo in cui si considera la f . Per esempio, le funzioni che hanno una derivata (localmente) limitata, sono lipschitziane. La funzione $f(x) = |x|$ è globalmente lipschitziana ma non derivabile in $x = 0$.

- ii) due orbite non possono intersecarsi. Lo spazio delle fasi è, pertanto, unione di orbite disgiunte.²

Le traiettorie possono essere di tre tipi:

- a) **punti di equilibrio.** Se $y_0 \in \Omega$ è tale che $f(y_0) = 0$, allora y_0 è detto *punto di equilibrio* (o *punto critico*, *punto singolare*, *punto di equilibrio*) del sistema. Esso rappresenta l'orbita della soluzione costante

$$\varphi(t) = y_0.$$

- b) **cicli** (o curve semplici e chiuse). Si chiamano *cicli* le orbite delle soluzioni periodiche $\varphi = \varphi(t)$, per le quali esiste $T > 0$ tale che

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

- c) **curve semplici non chiuse.** Si chiamano *curve semplici non chiuse* le orbite delle soluzioni $\varphi = \varphi(t)$, per le quali non esiste $T > 0$ tale che

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2 Derivata di Lie e costanti del moto

È opportuno introdurre i concetti di derivata lungo una traiettoria del sistema (o derivata di Lie) e di integrale primo o costante del moto.

Definizione II.2 Sia $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^n , e $E \in C^1(\Omega)$.

- a) La derivata di E lungo le traiettorie del sistema è data da

$$\dot{E}(y) = \nabla E(y) \cdot \dot{y} = \nabla E(y) \cdot f(y), \quad y \in \Omega.$$

- b) Se $\dot{E}(y) = 0$ per ogni $y \in \Omega$, E si chiama *integrale primo o costante del moto* per il sistema.

L'integrale primo gode delle seguenti proprietà:

²Senza l'ipotesi di Lipschitzianità, le orbite si possono intersecare. Per esempio, per $c \geq t_0$ le funzioni $y(t; c) = \begin{cases} (t - c)^2, & t \geq c, \\ 0, & t \leq c, \end{cases}$ verificano il problema di Cauchy $\dot{y} = 2y^{1/2}$, $y(t_0) = 0$.

- i) E è un integrale primo per il sistema se e soltanto se ogni orbita è interamente contenuta in un unico insieme di livello di E o, equivalentemente, se e soltanto se E è costante su ogni soluzione del sistema.
- ii) Se la semi-orbita destra (rispettivamente, sinistra) è contenuta in un compatto, la soluzione è prolungabile a $+\infty$ (rispettivamente, $-\infty$). E, dunque, se il sistema ammette un integrale primo i cui insiemi di livello sono limitati in \mathbb{R}^n , le soluzioni esistono in tutto \mathbb{R} .

Un esempio tipico proviene dalla meccanica Newtoniana. Scrivendo l'equazione differenziale

$$\ddot{y} = f(y), \quad (\text{II.1})$$

nella forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = f(y_1), \end{cases}$$

otteniamo, per ogni zero ξ della funzione Lipschitziana f , un punto di equilibrio $(\xi, 0)$. Si verifica facilmente che

$$E(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 - \int_0^{y_1} f(\tau) d\tau$$

è una costante del moto. Infatti,

$$\frac{d}{dt}E(y_1(t), y_2(t)) = y_2\dot{y}_2 - f(y_1)\dot{y}_1 = 0.$$

Le orbite si calcolano moltiplicando la (II.1) per $2\dot{y}$ e integrando. Si ottiene

$$(\dot{y})^2 - \dot{y}(0)^2 = 2 \int_0^y f(\tau) d\tau,$$

il che si converte facilmente nell'equazione differenziale a variabili separabili

$$\dot{y} = F(y), \quad F(y) = \pm \sqrt{\dot{y}(0)^2 + 2 \int_0^y f(\tau) d\tau}.$$

3 Classificazione dei punti di equilibrio

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti

$$\dot{x} = Ax.$$

dove A è una matrice reale $n \times n$. Formalmente la sua soluzione generale ha la forma

$$x(t) = e^{tA}x(0),$$

dove il gruppo a parametro singolo

$$e^{tA} = I_n + tA + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$$

viene definito come somma di una serie totalmente convergente. Infatti, usando una norma di matrice qualsiasi,³ si ha

$$\|e^{tA}\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!} \|A\|^j = e^{|t|\|A\|}.$$

Il gruppo e^{tA} è facile da calcolare nei seguenti tre casi:

- a. [**A matrice diagonale**]. Se $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

Di conseguenza, se A è una matrice diagonalizzabile, cioè se $AK = KD$ essendo K invertibile e $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora

$$e^{tA} = K \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) K^{-1}.$$

- b. [**A matrice nilpotente**]. Se A è nilpotente, cioè se $A^m = 0_{n \times n}$ per un opportuno $m \in \mathbb{N}$, allora

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} A^j$$

è un polinomio a valori matriciali di grado $\leq m - 1$. In particolare, se $A^2 = 0_{n \times n}$, allora $e^{tA} = I_n + tA$.

- c. [**A matrice di ordine due**]. In tal caso $A = \lambda_0 I_2 + B$, dove $\text{Tr } B = B_{11} + B_{22} = 0$. Se B ha i due autovalori reali $\pm\mu \neq 0$ e quindi $B^2 = \mu^2 I_2$, si ha:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda_0 t} e^{tB} = e^{\lambda_0 t} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} (B^2)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} (B^2)^j B \right\} \\ &= e^{\lambda_0 t} \left\{ \cosh(\mu t) I_2 + \frac{\sinh(\mu t)}{\mu} B \right\}. \end{aligned}$$

³La norma di matrice viene definita tale che l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici reali $n \times n$ costituisce uno spazio di Banach reali. Inoltre, vale $\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$ per qualunque $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$. Ci sono diverse possibili scelte della norma, ma tutte conducono alla stessa topologia metrica di $M_n(\mathbb{R})$.

Se B ha i due autovalori immaginari $\pm i\nu \neq 0$ e quindi $B^2 = -\nu^2 I_2$, si ha:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda_0 t} e^{tB} = e^{\lambda_0 t} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} (B^2)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} (B^2)^j B \right\} \\ &= e^{\lambda_0 t} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \nu^{2j} t^{2j}}{(2j)!} I_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \nu^{2j} t^{2j+1}}{(2j+1)!} B \right\} \\ &= e^{\lambda_0 t} \left\{ \cos(\nu t) I_2 + \frac{\sin(\nu t)}{\nu} B \right\}. \end{aligned}$$

Se B ha l'autovalore doppio a zero, allora $B^2 = 0_{2 \times 2}$. Quindi

$$e^{tA} = e^{\lambda_0 t} [I_2 + tB].$$

In generale, la matrice A ha la forma normale di Jordan [Vedi l'appendice C]. Ciò vuol dire che $A = D + N$, dove D è diagonalizzabile, N è nilpotente e D e N commutano tra loro [$DN = ND$]. In tal caso si ha:⁴

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN},$$

dove i gruppi e^{tD} e e^{tN} possono essere calcolati come sovraindicato.

Ritorniamo ora al caso delle matrici reali di ordine due. Si distinguono quattro casi:

- a. [**A ha due autovalori reali diversi λ_1, λ_2**]: In tal caso esiste una matrice reale invertibile K tale che

$$AK = K \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

- b. [**A ha due autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$**]: In tal caso esiste una matrice reale invertibile K tale che

$$AK = K \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- c. [**A ha un autovalore reale doppio λ ma non è diagonalizzabile**]: In tal caso esiste una matrice reale invertibile K tale che

$$AK = K \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

⁴Siano A e B due matrici $n \times n$. Allora $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ se A e B commutano tra loro. Se A e B non commutano tra loro, la formula prodotto non vale.

d. [**A è un multiplo della matrice identità**]: $A = \lambda I_2$. In tal caso prendiamo $K = I_2$.

Ponendo $K^{-1}AK = J$ e $x(t) = Ky(t)$, otteniamo i seguenti sistemi semplificati:

a. [**A ha due autovalori reali diversi λ_1, λ_2**]: Si ha:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2,$$

dove $y_{1,2}$ sono i componenti del vettore y , con soluzione

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0).$$

Se λ_1 e λ_2 sono *entrambi negative*, ogni traiettoria, per $t \rightarrow +\infty$, tende all'origine, detto *nodo stabile*. Inoltre, nell'origine ogni traiettoria risulta essere tangente all'asse $y_2 = 0$ se $(\lambda_2/\lambda_1) > 1$, ed all'asse $y_1 = 0$ se $(\lambda_2/\lambda_1) < 1$. Se λ_1 e λ_2 sono *entrambi positive*, ogni traiettoria, per $t \rightarrow -\infty$, tende all'origine, detto *nodo instabile*. Se λ_1 e λ_2 hanno segni opposti, con $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, al crescere di t ogni punto si muove inizialmente verso l'origine, ne raggiunge una distanza minima e si allontana asintoticamente. In questo caso l'origine è detto *punto di sella*, che è un punto di equilibrio instabile.

b. [**A ha due autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$**]: Allora

$$y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$, le traiettorie formano una famiglia di cerchi concentrici con i centri nell'origine. L'origine è detto *centro*. Nel caso in cui $\alpha < 0$, ogni traiettoria è una spirale che si avvicina all'origine per $t \rightarrow +\infty$, in verso orario se $\beta > 0$, in verso antiorario se $\beta < 0$. L'origine è detto *fuoco stabile*. Se $\alpha > 0$, ogni traiettoria si avvolge su se stessa a spirale, avvicinandosi all'origine per $t \rightarrow -\infty$. L'origine è detto *fuoco instabile*.

c. [**A ha un autovalore reale doppio λ ma non è diagonalizzabile**]: In tal caso

$$y_1(t) = e^{\lambda t} [y_1(0) - t y_2(0)], \quad y_2(t) = e^{\lambda t} y_2(0).$$

Se $\lambda < 0$, le traiettorie tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$ e sono tangenti all'asse $y_2 = 0$ [*nodo stabile*]. Se $\lambda > 0$, si verifica il contrario [*nodo instabile*]. In entrambi i casi, l'origine è detto *nodo degenerato*.

d. [**A è un multiplo della matrice identità**]: $A = \lambda I_2$. In tal caso $y(t) = e^{\lambda t} y(0)$. Se $\lambda < 0$, le traiettorie tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$ [*nodo stabile*]. Se $\lambda > 0$, si verifica il contrario [*nodo instabile*]. In entrambi i casi, l'origine è detto *nodo degenerato*.

4 Esempi

In questo paragrafo discutiamo tre esempi importanti.

Esempio II.3 Analizziamo, nel piano delle fasi, l'equazione delle piccole oscillazioni del pendolo in presenza di forze dissipative:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0, \quad \omega > 0, \quad (\text{II.2})$$

in prossimità della soluzione di equilibrio $x(t) = 0$, $\dot{x}(t) = 0$. Il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - ky. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -k \end{pmatrix},$$

dove $\text{Tr } A = -k$, $\det A = \omega^2$, $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det A = k^2 - 4\omega^2$.

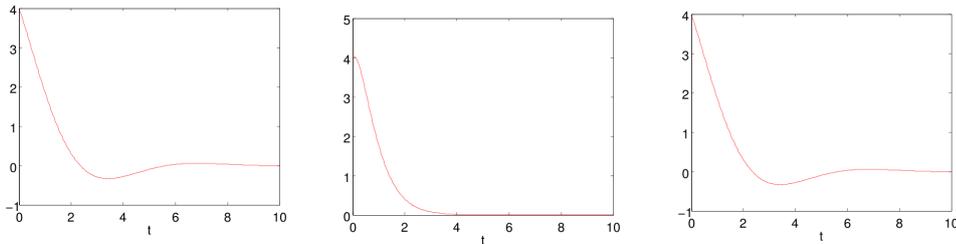


Figura II.1: Grafici delle funzioni $x(t)$ per $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 1$ nei casi $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$, scegliendo $\omega = 1$.

Distinguiamo i seguenti casi:

- a. $\Delta < 0$, $0 < k < 2\omega$. L'origine è un fuoco asintoticamente stabile. Il pendolo compie oscillazioni smorzate, avvicinandosi alla posizione di equilibrio, tanto più lentamente quanto più piccolo è il coefficiente d'attrito, k . Infatti,

$$x(t) = x(0)e^{-kt/2} \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4\omega^2 - k^2}\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{k}{2}x(0)\right]e^{-kt/2} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4\omega^2 - k^2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - k^2}}.$$

- b. $\Delta = 0$, $k = 2\omega$. L'origine è un nodo degenerato asintoticamente stabile. Infatti,

$$x(t) = e^{-\omega t} \{x(0) + [\dot{x}(0) + \omega x(0)]t\}.$$

c. $\Delta > 0$, $k > 2\omega$. L'origine è un nodo asintoticamente stabile. Se il coefficiente d'attrito k è sufficientemente grande ($k > 2\omega$), il pendolo non compie oscillazioni smorzate, ma raggiunge la posizione di equilibrio direttamente. Infatti,

$$x(t) = x(0)e^{-kt/2} \cosh\left(\frac{t}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega^2}\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{k}{2}x(0)\right]e^{-kt/2} \frac{\sinh\left(\frac{t}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega^2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega^2}}.$$

□

Esempio II.4 Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = -x + \frac{2y}{\log(x^2 + y^2)}, \quad \dot{y} = -y - \frac{2x}{\log(x^2 + y^2)}.$$

L'origine è un nodo singolare del corrispondente sistema ottenuto trascurando i termini logaritmici:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Considerando nuovamente il sistema originale e, passando alle coordinate polari, otteniamo

$$\dot{r} = -r, \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{\log r},$$

da cui, per $t \neq \log(r_0)$,

$$r = r_0 e^{-t}, \quad \theta = \theta_0 + \log|t - \log r_0|.$$

Allora si ha che $r \rightarrow 0^+$ e $\theta \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$; quindi l'origine è un fuoco stabile del sistema. □

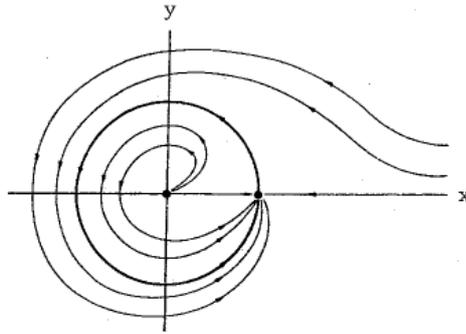


Figura II.2: Orbite per un sistema dinamico con due punti di equilibrio instabili (vedi [33]).

Esempio II.5 Consideriamo il sistema dinamico in coordinate polari

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta).$$

Quindi lungo le orbite è crescente l'angolo polare θ e, per $0 < r < 1$, la distanza dall'origine r , mentre la distanza dall'origine r è decrescente per $r > 1$. I punti di equilibrio (in coordinate cartesiane) sono $(0, 0)$ e $(1, 0)$, ambedue instabili. Il punto $(1, 0)$ è un attrattore con bacino di attrazione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. L'instabilità del punto di equilibrio $(1, 0)$ risulta dal fatto che ogni suo intorno contiene delle orbite che si allontanano da $(1, 0)$. Si noti che il tempo di viaggio lungo un'orbita chiusa che parte da $(1, 0)$ e ci ritorna, è dato da

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2(\frac{1}{2}\theta)} = [-2\cotg(\frac{1}{2}\theta)]_0^{2\pi} = +\infty.$$

□

Capitolo III

Stabilità secondo Liapunov

In questo capitolo verrà discussa in modo approfondito la nozione di stabilità secondo Liapunov.¹ Dopo l'introduzione del concetto di stabilità, verranno catalogati i diversi casi rilevanti al sistema dinamico lineare $\dot{x} = Ax$, dove A è una matrice reale $n \times n$. Verrà infatti dimostrato che, sotto opportune condizioni, un sistema dinamico nonlineare è stabile se e solo se lo è la sua linearizzazione. Discuteremo tre applicazioni: il pendolo semplice, le oscillazioni smorzate ed il modello preda-predatore di Lotka-Volterra.

1 Stabilità secondo Liapunov

Nello studio dei sistemi dinamici, il concetto di stabilità risulta essere tra i più importanti sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista applicativo. L'evoluzione temporale dello stato di un sistema fisico può essere descritto matematicamente da un campo vettoriale appartenente al cosiddetto spazio delle fasi. Ciascun punto dello spazio delle fasi definisce un determinato stato del sistema e nel tale punto il vettore indica la velocità con cui varia lo stato del sistema. Abbiamo visto che i punti in cui il vettore risulta essere nullo sono detti *punti di equilibrio* e lo stato non varia nel tempo. Sappiamo anche che i sistemi che descrivono l'evoluzione di un fenomeno fisico dipendono dai dati iniziali. Se applichiamo una piccola variazione nei dati, essa produce una variazione nella soluzione, trasformando un particolare sistema in un altro.

Ecco la nozione intuitiva di stabilità: una sorta di “continuità” per cui un piccolo cambiamento dei dati produce un piccolo e controllabile cambiamento della soluzione. Diamo, ora, la definizione di *stabilità secondo Liapunov*.

¹Il cognome Liapunov del matematico russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), viene scritto in molti modi. È molto diffusa, in particolare nel mondo anglosassone, la scrittura Lyapunov.

Definizione III.1 Consideriamo il sistema

$$\dot{y} = f(y),$$

e sia $\varphi = \varphi(t; 0, \xi)$ una soluzione del sistema definita nell'intervallo $[0, +\infty)$. Tale soluzione si dice *stabile secondo Liapunov* se esiste un intorno U di ξ tale che per ogni $\eta \in U$ la traiettoria $\{\varphi(t; 0, \eta) : t \in [0, +\infty)\}$ si estende per $t \rightarrow +\infty$ ed è contenuta in U . Essa è *asintoticamente stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che se $\|\eta - \xi\| < \delta$, allora la soluzione $\psi(t) = \psi(t; 0, \eta)$ è definita in $[0, +\infty)$ e $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, per ogni t appartenente all'intervallo $[0, +\infty)$.

Infine, se un punto di equilibrio $\varphi(t) \equiv y_0$ [dove $f(y_0) = 0$] è asintoticamente stabile, l'insieme dei punti $\xi \in \Omega$ tale che $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow y_0$ per $t \rightarrow +\infty$ è detto *bacino di attrazione* di y_0 . Se il bacino di attrazione è tutto Ω , y_0 è detto *globalmente asintoticamente stabile* nello spazio delle fasi Ω .

2 Sistemi autonomi sulla retta

Sia data un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$\dot{x} = f(x), \tag{III.1}$$

dove la f è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Da un punto di vista applicativo, un'equazione differenziale costituisce un modello per la descrizione dell'evoluzione temporale di un determinato fenomeno. Ad essa si possono associare delle condizioni iniziali. L'esistenza delle soluzioni del corrispondente problema di Cauchy garantisce l'attendibilità del modello, mentre la sua unicità implica la causalità.

Supponiamo, allora, che siano note le condizioni iniziali. Siano

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, \quad f(x) \neq 0 \text{ per } x \neq x_1, x_2, \quad f'(x_1) < 0 \text{ e } f'(x_2) > 0.$$

Sull'asse orizzontale o *asse delle fasi*, si può visualizzare l'andamento di $x = x(t)$. Tra le ordinate vengono collocati i valori di $f(x)$: se risulta che la f è positiva, allora x sta crescendo, e, dunque, il suo movimento, sull'asse orizzontale, procede verso destra. Se la f risulta negativa, si verifica il contrario. Considerando i dati iniziali e quanto è stato detto sopra, si trova che x_2 è instabile: partendo da un punto ad esso vicino, da esso ci si allontana.

Consideriamo x_1 . Dimostriamo che una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con $x_1 < x_0 < x_2$, o, $x_0 < x_1 < x_2$, esiste per qualunque $t \geq t_0$ e che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1.$$

Supponiamo che $x_1 < x_0 < x_2$. Osserviamo che, essendo la f negativa tra x_1 e x_2 , $x(t)$ risulta decrescente per $t \geq t_0$. Consideriamo, ora, l'intervallo massimale di definizione di $x(t)$, $[t_0, \tau)$. Poichè $x(t) > x_1$, allora esiste finito $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t)$. Se fosse $\tau < +\infty$, allora la soluzione si potrebbe prolungare oltre τ e l'intervallo $[t_0, \tau)$ non sarebbe più massimale. Quindi, $\tau = +\infty$. Sia, ora, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$. Poichè $\dot{x} = f(x)$ e la f è continua, allora risulta che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = f(\bar{x}).$$

Dunque, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ esiste $\varepsilon(h) \in (0, h)$ tale che

$$\frac{x(t+h) - f(t)}{h} = \dot{x}(t + \varepsilon(h)) \rightarrow f(\bar{x}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Quindi, per $t \rightarrow +\infty$ e ogni $h > 0$ risulta

$$f(t+h) - f(t) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} - \bar{x} = 0, \\ hf(\bar{x}), \end{cases}$$

che implica $f(\bar{x}) = 0$ e quindi $\bar{x} = x_1$. In altre parole, x_1 è asintoticamente stabile.

3 Sistemi lineari a coefficienti costanti

Sia dato il sistema a coefficienti costanti

$$\dot{y} = Ay, \tag{III.2}$$

dove A è una matrice reale di ordine n . Indichiamo con λ_i gli autovalori di A , dove $i = 1, \dots, n$. Vale il seguente teorema:

Teorema III.2 *Abbiamo i seguenti tre casi:*

- i) L'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hanno parte reale negativa. La stabilità è globale in \mathbb{R}^n .*
- ii) L'origine è stabile, ma non asintoticamente, se e solo se tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hanno parte reale non positiva e tutti gli autovalori immaginari autospazi pari in dimensione alla molteplicità algebrica dell'autovalore). La stabilità non è globale in \mathbb{R}^n .*
- iii) In tutti gli altri casi l'origine è punto di equilibrio instabile.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima la parte (i). La soluzione generale del sistema (III.2) ha la seguente forma:

$$y(t) = e^{tA}y(0).$$

Utilizzando la forma normale di Jordan [vedi Ch. C], esistono due matrici S diagonalizzabile e N nilpotente (cioè, $N^m = 0_{n \times n}$ per un opportuno $m \in \mathbb{N}$) tali che $SN = NS$ e $A = S + N$. Diagonalizzando la matrice S , si ha: $S = K^{-1}\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)K$ per un'opportuna matrice invertibile K . Di conseguenza,

$$y(t) = e^{tS}e^{tN}y(0) = K^{-1}\text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})K \sum_{s=0}^{m-1} \frac{t^s}{s!} N^s y(0).$$

Stimando la norma della soluzione risulta per $t \geq 0$:

$$\|y(t)\| \leq \|K^{-1}\| \|K\| e^{t \max \text{Re}(\lambda_i)} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{t^s}{s!} \|N\|^s \|y(0)\|,$$

il che tende a zero per $t \rightarrow +\infty$ se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa.

Dimostriamo ora la parte (ii). Partendo da una matrice A i cui autovalori sono tutti non positivi, esiste una matrice invertibile K tale che

$$A = K^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & A_2 \end{pmatrix} K,$$

$p + q = n$, tutti gli autovalori di A_1 hanno parte reale negativa e tutti gli autovalori di A_2 sono immaginari. La soluzione generale del sistema (III.2) ha la forma

$$y(t) = e^{tA}y(0) = K^{-1} \begin{pmatrix} e^{tA_1} & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & e^{tA_2} \end{pmatrix} K y(0).$$

Dalla prima parte segue che

$$\begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \end{pmatrix} K y(t) = e^{tA_1} \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \end{pmatrix} K y(0),$$

il che tende a zero se $t \rightarrow +\infty$. Analizzando la matrice A_2 e i suoi autovalori μ_1, \dots, μ_q (sottoinsieme di $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$), esistono una matrice invertibile K_2 e una matrice nilpotente N_2 (cioè, $N_2^{m_2} = 0_{q \times q}$ per un opportuno $m_2 \in \mathbb{N}$), ambedue di ordine q , tali che $A_2 N_2 = N_2 A_2$ e

$$A_2 = K_2^{-1} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_q) K_2 + N_2.$$

In tal caso si ha:

$$e^{tA_2} = K_2^{-1} \text{diag}(e^{\mu_1 t}, \dots, e^{\mu_q t}) K_2 \sum_{s=0}^{m_2} \frac{t^s}{s!} N_2^s.$$

Calcolando la sua norma, si ha:

$$\|K_2 e^{tA_2} K_2^{-1}\| = \left\| \sum_{s=0}^{m_2} \frac{t^s}{s!} [K_2 N_2 K_2^{-1}]^s \right\|,$$

il che rimane limitata per $t \rightarrow +\infty$ se e solo se $N_2 = 0_{q \times q}$. Inoltre, scegliendo $y(0)$ autovettore di A corrispondente ad un suo autovalore μ_i immaginario, si vede che la corrispondente soluzione $y(t) = e^{\mu_i t} y(0)$ è oscillatoria senza mai tendere a zero. Di conseguenza, l'origine è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente e non globalmente.

Dimostriamo infine la parte (iii). Se μ_i è un autovalore immaginario di A a cui corrispondono vettore \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 non banali tali che $A\mathbf{h}_2 = \mu_i \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1$ e $A\mathbf{h}_1 = \mu_i \mathbf{h}_1$, allora

$$\begin{aligned} e^{tA} \mathbf{h}_2 &= e^{\mu_i t} e^{t[A - \mu_i I_n]} \mathbf{h}_2 = e^{\mu_i t} \left\{ \mathbf{h}_2 + t[A - \mu_i I_n] \mathbf{h}_2 + \frac{1}{2} (t[A - \mu_i I_n])^2 \mathbf{h}_2 + \dots \right\} \\ &= e^{\mu_i t} \{ \mathbf{h}_2 + t \mathbf{h}_1 \}, \end{aligned}$$

il che non rimane limitato se $t \rightarrow +\infty$. Quindi l'origine non è punto di equilibrio.

Se λ_i è un autovalore con parte reale positiva e \mathbf{h} è un corrispondente autovettore, allora

$$e^{tA} \mathbf{h} = e^{\lambda_i t} e^{t[A - \lambda_i I_n]} \mathbf{h} = e^{\lambda_i t} \{ \mathbf{h} + t[A - \lambda_i I_n] \mathbf{h} + \dots \} = e^{\lambda_i t} \mathbf{h},$$

la cui norma $e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \|\mathbf{h}\| \rightarrow +\infty$ se $t \rightarrow +\infty$. Quindi l'origine non è punto di equilibrio. ■

Discutiamo ora il caso bidimensionale ($n = 2$). Sia dato un sistema omogeneo bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $\det(A) = ad - bc \neq 0$, in modo che l'origine sia l'unico punto di equilibrio del sistema. Indichiamo con λ_1 e λ_2 gli autovalori di A , soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - (\operatorname{Tr} A)\lambda + \det A = 0,$$

dove $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

Distinguiamo i seguenti casi a seconda che la matrice A possieda:

- i) due autovalori λ_1, λ_2 reali e distinti;
- ii) due autovalori reali e coincidenti;

iii) due autovalori complessi coniugati.

Inoltre, a seconda dei relativi segni degli autovalori, avremo ulteriori sottocasi.

i) **Autovalori reali e distinti.** Il sistema presenta le due soluzioni linearmente indipendenti

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}^1, \quad e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}^2,$$

dove \mathbf{h}^1 e \mathbf{h}^2 sono autovettori reali corrispondenti rispettivamente agli autovalori λ_1 e λ_2 . Ogni soluzione sarà del tipo

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}^2,$$

dove c_1, c_2 sono costanti reali. Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria, partendo da un qualunque punto dello spazio delle fasi, si avvicina indefinitamente all'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo stabile**.
- 2) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. L'origine è instabile. La soluzione, partendo da un qualunque punto dello spazio delle fasi [tranne l'origine], si allontana indefinitamente dall'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo instabile**.
- 3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. L'origine è instabile. Osservando il grafico, per $c_2 = 0$, le traiettorie rettilinee γ_1^\pm guidano il punto mobile, rappresentante la soluzione, ad avvicinarsi indefinitamente all'origine. Per $c_1 = 0$, le traiettorie γ_2^\pm lo inducono ad allontanarsi indefinitamente. Il punto di equilibrio è detto **colle** o **sella**.

ii) **Autovalori reali uguali.** Indichiamo con λ l'autovalore doppio della matrice A , supponendo che A non coincida con λI_2 e quindi non sia diagonalizzabile. La soluzione sarà del tipo

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{c}_1 + t e^{\lambda t} \mathbf{c}_2,$$

dove \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 sono due vettori costanti tali che $A\mathbf{c}_1 = \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$. Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1) $\lambda < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria tende all'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo stabile**.
- 2) $\lambda > 0$. L'origine è instabile: tutte le traiettorie si allontanano indefinitamente dall'origine. Il punto 0 è detto **nodo instabile**.

iii) **Autovalori complessi coniugati.** Indichiamo con

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

gli autovalori complessi coniugati della matrice A . La coppia di soluzioni linearmente indipendenti è data da

$$e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{h}, \quad e^{(\alpha-i\beta)t}\bar{\mathbf{h}}.$$

A questa coppia di soluzioni sostituiamo la seguente coppia di soluzioni reali:

$$\varphi^1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{h}^1 - \sin(\beta t)\mathbf{h}^2), \quad \varphi^2(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\mathbf{h}^1 + \cos(\beta t)\mathbf{h}^2),$$

dove abbiamo posto $\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2)$, con $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^2$. La soluzione generale in forma reale è data da

$$\varphi(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)(c_1\mathbf{h}_1 + c_2\mathbf{h}_2) + \sin(\beta t)(c_2\mathbf{h}_1 - c_1\mathbf{h}_2)],$$

dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie. Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1) $\alpha = 0$. L'origine è stabile. Le traiettorie sono delle ellissi. Il punto 0 è detto **centro**.
- 2) $\alpha < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Le traiettorie tendono all'origine con un andamento a spirale. Il punto 0 è detto **fuoco stabile**.
- 3) $\alpha > 0$. L'origine è instabile. Le traiettorie si allontanano indefinitamente dall'origine. Il punto 0 è detto **fuoco instabile**.

Riassumiamo, ponendo $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det(A)$, quanto descritto sopra con il seguente schema:

i)

$$\Delta > 0 : \begin{cases} \det(A) > 0, \text{ Tr } A < 0 : & \text{asintoticamente stabile,} \\ \det(A) > 0, \text{ Tr } A > 0 : & \text{instabile,} \\ \det(A) > 0 : & \text{colle o sella, instabile.} \end{cases}$$

ii)

$$\Delta = 0 : \begin{cases} b^2 + c^2 > 0 : & \text{nodo,} \\ b = c = 0, \text{ Tr } A < 0 : & \text{nodo a stella, asintoticamente stabile,} \\ b = c = 0, \text{ Tr } A > 0 : & \text{instabile.} \end{cases}$$

iii)

$$\Delta < 0 : \begin{cases} \text{Tr } A = 0 : & \text{centro, neutralmente stabile,} \\ \text{Tr } A < 0 : & \text{fuoco asintoticamente stabile,} \\ \text{Tr } A > 0 : & \text{fuoco instabile.} \end{cases}$$

Giù presenteremo in modo grafico alcuni esempi di punti di equilibrio: centro, fuoco stabile, nodo stabile, nodo a stella e colle.

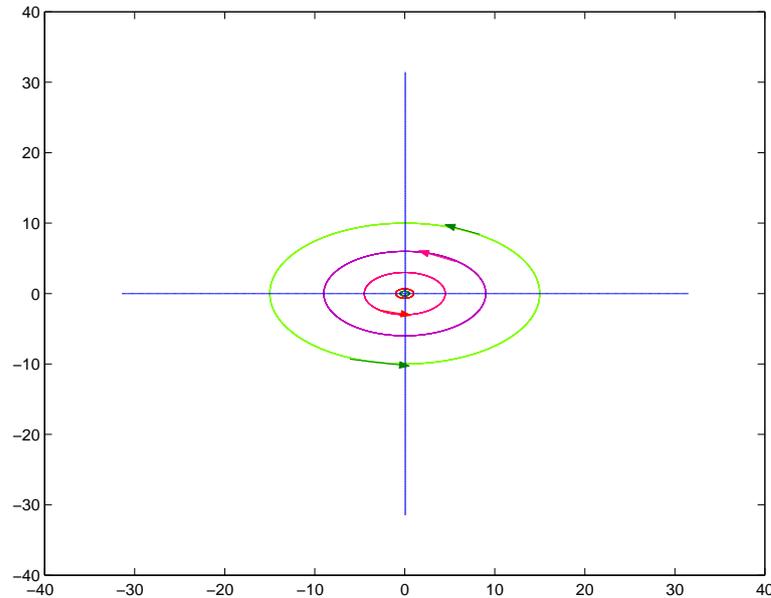


Figura III.1: Centro con orientazione positiva.

4 Funzione di Liapunov e linearizzazione

Tra i metodi utilizzati nell'analisi della stabilità dell'origine, vi è quello di Liapunov che deve la sua formulazione al classico teorema di Lagrange (1788):

Se in un sistema meccanico conservativo l'energia potenziale ha un minimo locale forte, allora in quel punto l'equilibrio è stabile.

Dunque, nell'ambito dei sistemi meccanici conservativi si può arrivare alla ricerca della stabilità, studiando le proprietà dell'energia potenziale. Analogamente, nel **metodo di Liapunov** risulta rilevante lo studio di una funzione scalare (detta **funzione di Liapunov**), che generalizza l'energia totale.

Per questa funzione vale il seguente teorema:

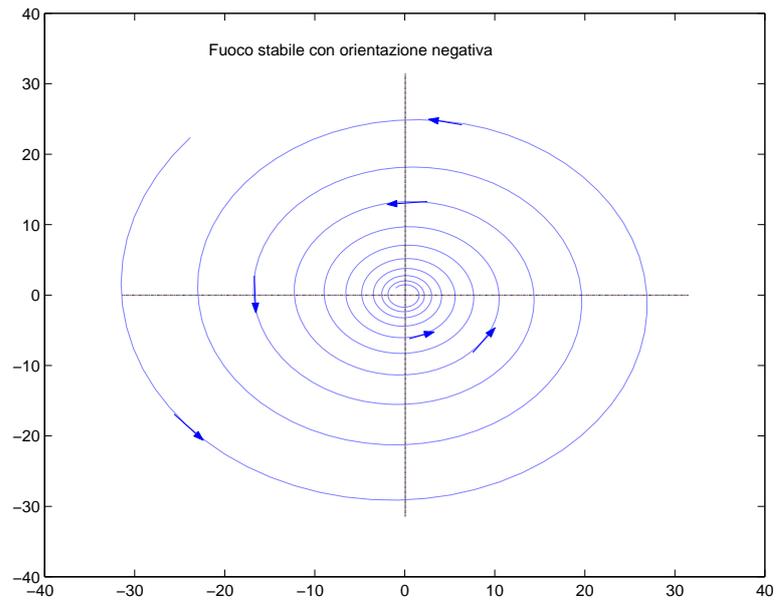


Figura III.2: Fuoco stabile con orientazione positiva.

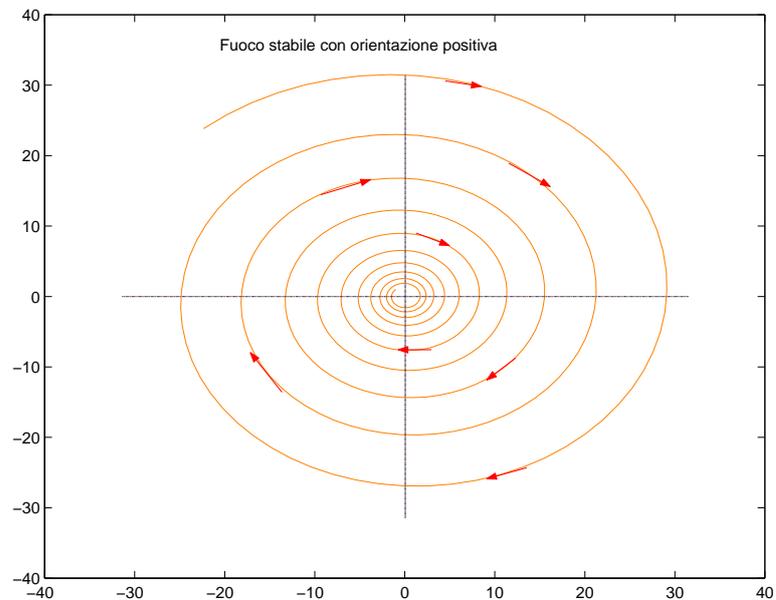


Figura III.3: Fuoco stabile con orientazione negativa.

Teorema III.3 (Liapunov) *Sia l'origine un punto di equilibrio del sistema dinamico*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)),$$

dove, per un aperto Ω in \mathbb{R}^n contenente l'origine, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente

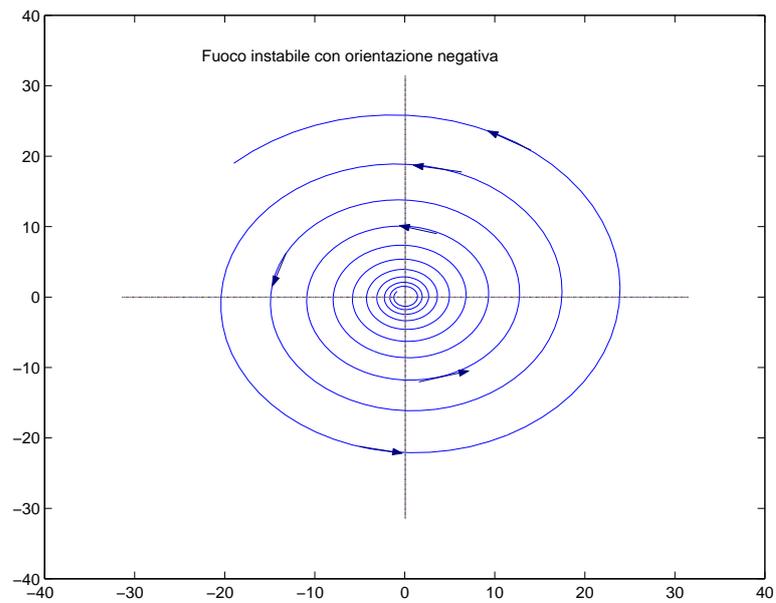


Figura III.4: Fuoco instabile con orientazione negativa.

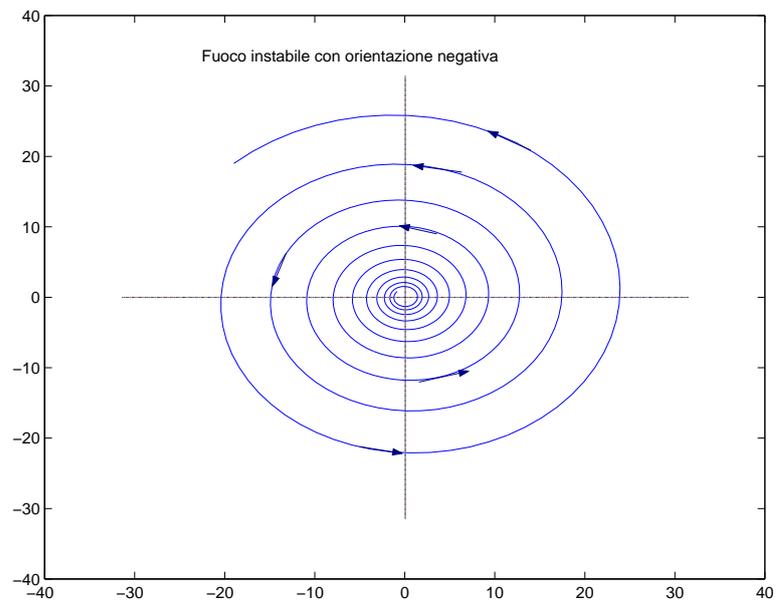


Figura III.5: Fuoco instabile con orientazione positiva.

lipschitziana e $\mathbf{F}(0) = 0$. Supponiamo che, per un aperto A con $0 \in A \subset \Omega$, esista una cosiddetta funzione di Liapunov $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

i) H è di classe C^1 in A ;

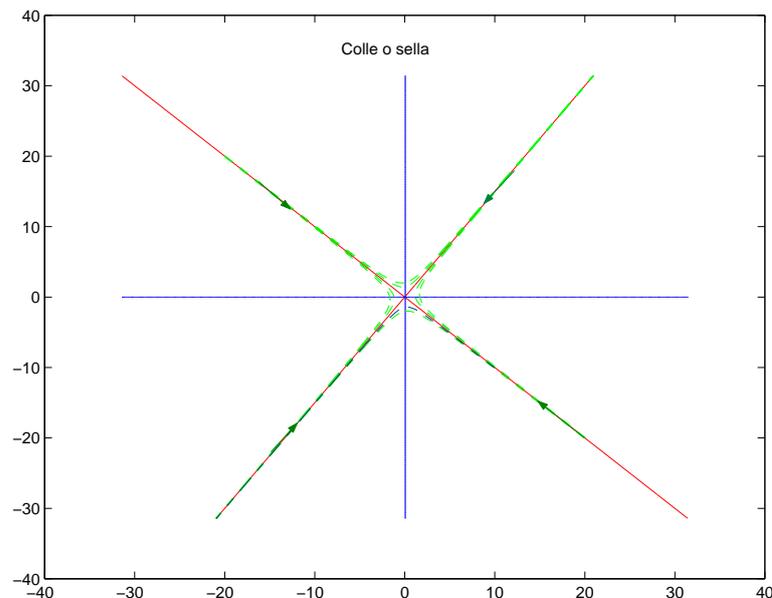


Figura III.6: Colle o sella.

ii) $H(y) > 0$ per ogni $y \in A \setminus \{0\}$;

iii) vale una delle seguenti condizioni:

a) $\mathbf{F} \cdot \nabla H \leq 0$ in A ;

b) $\mathbf{F} \cdot \nabla H < 0$ in $A \setminus \{0\}$;

c) $\mathbf{F} \cdot \nabla H > 0$ in $A \setminus \{0\}$.

Allora il punto di equilibrio 0 è stabile se vale la (a), asintoticamente stabile se vale la (b), o non stabile se vale la (c).

Prima di dimostrare il teorema di Liapunov, discutiamo un esempio significativo. Siano a, b, c, d quattro costanti reali con $a > 0$ e consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax - cy, \\ \dot{y}(t) = cx + ay. \end{cases}$$

Ponendo $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ risulta

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= x \dot{x} + y \dot{y} \\ &= x(-ax - cy) + y(cx + ay) \\ &= -a(x^2 + y^2) = -2aH \leq 0, \end{aligned}$$

dove vale il segno uguale se e solo se $x = y = 0$. Quindi

$$H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0))e^{-2at} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

per ogni $(x(0), y(0))$. Quindi $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ se $t \rightarrow +\infty$, che mostra la stabilità asintotica del punto di equilibrio 0. Si osservi che

$$\mathbf{F} \cdot \nabla H = x(-ax - cy) + y(cx - ay) = \dot{H}(t) < 0$$

per $(x, y) \neq (0, 0)$.

Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x - 2y^2, \\ \dot{y}(t) = xy - y^3, \end{cases}$$

per cui 0 è un punto di equilibrio. Ponendo $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, risulta

$$\dot{H}(t) = x\dot{x} + 2y\dot{y} = -x(x + 2y^2) + 2y(xy - y^3) = -(x^2 + 2y^4) \leq 0,$$

dove vale il segno uguale se e solo se $x = y = 0$. Quindi 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Si osservi che

$$\mathbf{F} \cdot \nabla H = -x(x + 2y^2) + 2y(xy - y^3) = \dot{H}(t) < 0$$

per $(x, y) \neq (0, 0)$.

Infine, consideriamo il sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H,$$

dove $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e la funzione hamiltoniana ha la forma

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}),$$

T è una forma quadratica definita positiva e $\mathbf{q} = 0$ è un minimo stretto della funzione V . In tal caso $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ è un punto di equilibrio, H è definita positiva in un intorno di $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\dot{H}(t) = 0$. Quindi la H è una funzione di Liapunov e l'origine è un punto di equilibrio stabile.

Dimostrazione del Teorema di Liapunov. La dimostrazione del Teorema di Liapunov prosegue mediante alcune proposizioni intermedie.

Intrappolamento delle orbite. Sia H una funzione di Liapunov con $\dot{H} < 0$ in $A \setminus \{0\}$. Siano Ω un aperto limitato e ξ un punto tali che

$$\xi \in \Omega \subset \bar{\Omega} \subset A.$$

Supponiamo che, per un'opportuna costante positiva a , $H(\xi) < a$ e $H(y) \geq a$ per ogni $y \in \partial\Omega$. Allora esiste la soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$ per ogni $t \geq 0$ e $\varphi(t; 0, \xi) \in \Omega$ per ogni $t \geq 0$.

Supponiamo, per assurdo, che $\varphi(t; 0, \xi)$ esca da Ω . Sia $t^* = \inf\{t \geq 0 : \varphi(t) \notin \Omega\}$, cioè t^* è il primo istante di uscita da Ω . Per la continuità di φ , si ha $\varphi(t^*) \in \partial\Omega$; inoltre, $\varphi(t) \in \Omega$ per $0 \leq t < t^*$. Allora si ha:

$$H(\varphi(0)) = H(\xi) < a, \quad \dot{\phi}(t) = (H \circ \varphi)'(t) \leq 0, \quad H(\varphi(t^*)) \geq a.$$

Contraddizione. Dunque, φ non può uscire da Ω . In base alle proprietà delle orbite viste nel capitolo precedente, φ esiste per ogni $t \geq 0$.

Escursione delle orbite. Sia Ω un aperto limitato tale che $\bar{\Omega} \subset A$. Supponiamo che a e b sono opportune costanti positive tali che $H(y) \geq a$ e $\dot{H}(y) \leq -b < 0$ per ogni $y \in \Omega$. Se $\xi \in \Omega$ e $\varphi(t; 0, \xi)$ è definita per $t \geq 0$, allora $\varphi(t; 0, \xi)$ esce da Ω .

Supponendo, per assurdo, che $\varphi(t; 0, \xi) \in \Omega$ per ogni istante $t \geq 0$, si ha:

$$a \leq H(\varphi(t)) = H(\xi) + \int_0^t \dot{H}(\varphi(s)) ds \leq [H(\xi) - bt].$$

Per $t \rightarrow +\infty$, $H(\xi) - bt \rightarrow -\infty$. Contraddizione.

Attrattività dell'origine. Sia Ω un aperto limitato tale che

$$0 \in \Omega \subset \bar{\Omega} \subset A.$$

Sia H una funzione di Liapunov con $\dot{H} < 0$ in $A \setminus \{0\}$. Se $\xi \in \Omega$ e $\varphi(t; 0, \xi) \in \Omega$ per ogni $t \geq 0$, allora $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Essendo $\dot{H} < 0$ in $A \setminus \{0\}$, la funzione $H(\varphi(t))$ è strettamente decrescente. Mostriamo che $H(\varphi(t)) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Se non fosse così, ponendo $0 < \mu = \limsup_{t \rightarrow +\infty} H(\varphi(t))$, si avrebbe $\varphi(t) \rightarrow \mu > 0$ per $t \rightarrow +\infty$ e $\phi(t) \geq \mu$ per $t \geq 0$. Essendo $H(0) = 0$, esiste un intorno $B_\delta(0)$ tale che, se $y \in \overline{B_\delta(0)}$, $H(y) \leq \frac{\mu}{2}$. Quindi $\xi \in \Omega \setminus \overline{B_\delta(0)}$. Siano $a > 0$ il minimo di H e $-b < 0$ il massimo di \dot{H} nell'insieme compatto $\bar{\Omega} \setminus B_\delta(0)$. In base al punto precedente, $\varphi(t; 0, \xi)$ deve uscire da $\Omega \setminus \overline{B_\delta(0)}$. Non può, tuttavia, uscire attraverso $\partial\Omega$ per ipotesi e neppure attraverso $\partial B_\delta(0)$ [poichè se $\varphi(t) \in \overline{B_\delta(0)}$, allora $H(\varphi(t)) \leq \frac{\mu}{2}$]. Contraddizione.

Dunque, $H(\varphi(t)) \rightarrow 0$, il che implica che $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Osservazione. Se si riesce a trovare un aperto Ω , limitato e contenente come unico punto di equilibrio l'origine, in cui sono intrappolate le orbite e in cui \dot{H} è definita negativa, allora Ω è contenuto nel bacino di attrazione dell'origine.

Dimostriamo infine il Teorema di Liapunov. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subset A$. Poniamo

$$a = \min\{H(\vec{x}) : \vec{x} \in \partial B_\varepsilon(0)\},$$

il che è strettamente positiva per motivi di compattezza di $\partial B_\varepsilon(0)$. Poichè $H(0) = 0$, esiste $B_\delta(0)$ tale che $H(y) \leq \frac{a}{2}$ per ogni $y \in B_\delta(0)$. In base all'intrappolamento delle orbite, per ogni $\xi \in B_\delta(0)$, $\varphi(t; 0, \xi)$ esiste e non esce da $B_\delta(0)$. Per questo motivo, 0 è stabile. Se $\dot{H} < 0$, la stabilità asintotica segue dall'attrattività dell'origine con $\Omega = B_\varepsilon(0)$. ■

Valgono, dunque, le seguenti proposizioni:

Corollario III.4 *Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e 0 l'unico punto di equilibrio per il sistema*

$$\dot{y} = f(y).$$

Se $\frac{d}{dt}H(y(t)) < 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $H(y) \rightarrow +\infty$ per $\|y\| \rightarrow +\infty$, allora l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Sia ξ qualunque punto di \mathbb{R}^n , $\xi \neq 0$, e $H(\xi) = a > 0$. Poichè $H(y) \rightarrow +\infty$ per $\|y\| \rightarrow +\infty$, esiste una sfera $B_r(0)$ di raggio r abbastanza grande, tale che $H(y) \geq 2a$ per $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$. In particolare, $H(y) \geq 2a$ su $\partial B_r(0)$. Ma allora, in base all'intrappolamento delle orbite, $\varphi(t; 0, \xi)$ esiste per $t \geq 0$ e non esce da $B_r(0)$. Essendo $\dot{H} < 0$ in tutto \mathbb{R}^n , segue dall'attrattività dell'origine che $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Essendo ξ arbitrario, il bacino di attrazione di 0 è tutto \mathbb{R}^n . ■

Si è già detto, in precedenza, che la ricerca della funzione di Liapunov potrebbe presentare delle difficoltà. Esiste, però, un altro metodo di procedere nella ricerca della stabilità. Tale metodo consiste nella sostituzione del sistema di partenza non lineare con un sistema lineare approssimante in modo tale da utilizzare la teoria lineare e trasferire le nuove informazioni ottenute sul sistema linearizzato. L'approssimazione è, però, valida solo localmente, ovvero nell'intorno del punto di equilibrio considerato.

Sia, ora, dato un sistema autonomo

$$\dot{y} = f(y), \tag{III.3}$$

dove $f \in C^1(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{R}^n e tale che $f(0) = 0$. Si suppone che la matrice jacobiana di f in 0, A , sia non singolare. Allora, si può scrivere

$$f(y) = Ay + g(y), \tag{III.4}$$

dove $g(y) = o(\|y\|)$ per $y \rightarrow 0$. Si consideri il sistema

$$\dot{z} = Az \tag{III.5}$$

che prende il nome di *sistema linearizzato*.

Ne segue

Teorema III.5 (Oskar Perron (1880-1975)) *Sia la (III.5) la linearizzazione del sistema dinamico (III.3). Allora*

- a. *Se 0 è asintoticamente stabile per il sistema (III.5), allora lo è anche per il sistema (III.3).*
- b. *Se esiste un autovalore della matrice A nella (III.5) con parte reale positiva, allora 0 è instabile per il sistema (III.3).*

La dimostrazione di questo teorema fa ricorso al seguente lemma (vedi la Sezione 5):

Lemma III.6 *Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora esiste una matrice Q simmetrica e definita positiva tale che $QA + A^T Q$ è definita negativa. In altre parole, esiste un prodotto scalare $[x, y] = \langle Qx, y \rangle$ rispetto a cui è definita negativa la matrice A.*

Dimostrazione del Teorema III.5a. Supponendo 0 asintoticamente stabile per il sistema (III.5), tutti gli autovalori di A presentano parte reale negativa. Consideriamo la matrice Q del lemma sopra enunciato e la forma quadratica definita positiva

$$H(y) = \langle Qy, y \rangle.$$

Calcoliamo la derivata di H lungo le traiettorie del sistema non lineare (III.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(y(t)) &= \langle Qy, \dot{y} \rangle + \langle Q\dot{y}, y \rangle \\ &= \langle Qy, Ay + g(y) \rangle + \langle Q[Ay + g(y)], y \rangle \\ &= \langle [QA + A^T Q]y, y \rangle + 2\langle Qy, g(y) \rangle, \end{aligned} \tag{III.6}$$

dove abbiamo utilizzato la simmetria di Q e $g(y) = c(y)y$ per $c(y) \rightarrow 0$ per $\|y\| \rightarrow 0$. Si ha:

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) \leq [-\delta + c(y)]\|y\|^2$$

per un'opportuna costante $\delta > 0$. Di conseguenza, esiste un intorno di 0 su cui

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) \leq -\frac{1}{2}\delta\|y\|^2.$$

Per il teorema di Liapunov, 0 è asintoticamente stabile. ■

5 Stabilità e loro applicazioni

1. Pendolo semplice. Consideriamo ora l'equazione del moto del pendolo semplice di lunghezza

$$\ell\ddot{\theta} = -g \sin(\theta), \quad (\text{III.7})$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e la verticale, g l'accelerazione gravitazionale sulla superficie della Terra e ℓ la lunghezza del pendolo. Moltiplicando la (III.7) per $d\theta/dt$ e integrando rispetto a θ arriviamo all'equazione

$$\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2 = \frac{g}{\ell}(\cos \theta - \cos a),$$

dove a è l'angolo positivo per cui $(d\theta/dt) = 0$. Nella Figura 5 abbiamo tracciato le orbite chiuse, le orbite eterocliniche (collegando i punti di sella) e le orbite aperte. Il periodo T delle orbite chiuse ha la forma

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-a}^a \frac{d\theta}{\sqrt{2g(\cos \theta - \cos a)/\ell}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^a \frac{d\theta}{\sqrt{4(\sin^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \phi d\phi}{\cos \frac{1}{2}\theta \sqrt{4(\sin^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a \sin^2 \phi)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K(\sin^2 \frac{1}{2}a) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}a^2 + O(a^4)\right), \end{aligned}$$

dove

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi}}, \quad 0 \leq m < 1,$$

si chiama integrale ellittico completo di prima specie [2, 17.3.1]. Si osservi che abbiamo applicato la sostituzione $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}a \sin \phi$.

Applichiamo ora il teorema di Liapunov. Riscrivendo l'equazione del moto del pendolo, (III.7), si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -(g/\ell) \sin \theta_1, \end{cases}$$

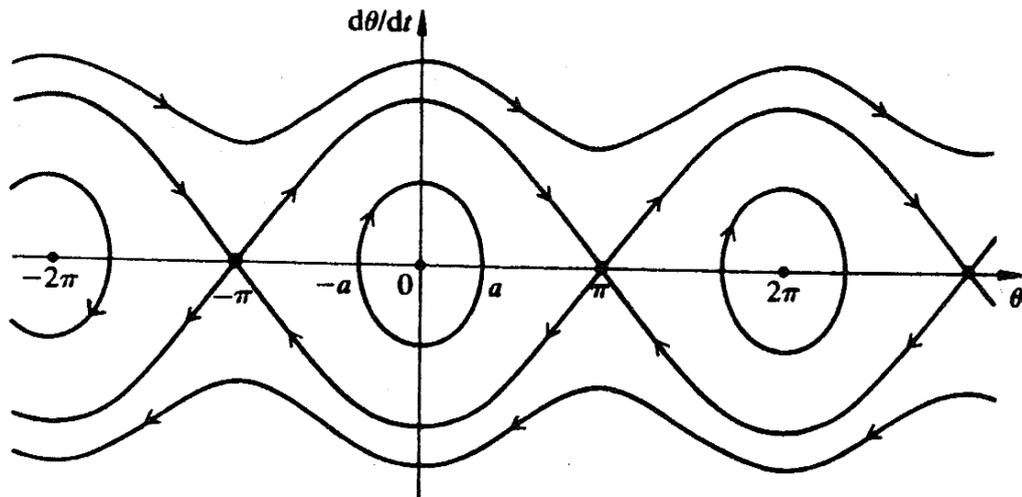


Figura III.7: Diagramma delle fasi del pendolo nel piano $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$.

e ponendo

$$H(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1],$$

otteniamo $H(\theta_1, \theta_2) > 0$ per $(0, 0) \neq (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ e $H'(t) = 0$. Quindi $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.

Spesso il sistema (III.7) viene linearizzato nel seguente modo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta. \quad (\text{III.8})$$

In tal caso la (III.8) si trasforma nel sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -(g/\ell)\theta_1, \end{cases}$$

con funzione di Liapunov

$$H(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/2\ell)\theta_1^2.$$

Siccome $H(\theta_1, \theta_2) > 0$ per $(0, 0) \neq (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ e $H'(t) = 0$, l'origine $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile, che non è asintoticamente stabile.

2. Pendolo semplice vincolato ad un piano che subisce una rotazione costante. In tal caso

$$\ell\ddot{\theta} = -g \sin(\theta) + \frac{1}{2}\ell\omega^2 \sin(2\theta),$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e la verticale, g è l'accelerazione gravitazionale, ℓ la lunghezza del pendolo e ω la velocità angolare. Scriviamo l'equazione del moto nella forma

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -(g/\ell) \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1). \end{cases}$$

Nei punti di equilibrio (θ_1, θ_2) abbiamo $\theta_2 = 0$ e

$$\sin(\theta_1) \left\{ -\frac{g}{\ell} + \omega^2 \cos(\theta_1) \right\} = 0.$$

Quindi i punti di equilibrio sono $(\theta_0, 0)$ per $\sin \theta_0 = 0$ o per $\cos \theta_0 = (g/\ell\omega^2)$.

Per studiare l'andamento delle orbite intorno all'origine introduciamo la funzione di Liapunov

$$\begin{aligned} H(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1] + \frac{1}{2}\omega^2 \cos^2(\theta_1) \\ &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right) [1 - \cos \theta_1] + \frac{1}{2}\omega^2 \{1 + [1 - \cos(\theta_1)]^2\} \geq 0, \end{aligned}$$

dove $(g/\ell) \geq \omega^2$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\theta_1(t), \theta_2(t)) &= \theta_2 \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1) \right\} \dot{\theta}_1 \\ &= \left\{ \dot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1) \right\} \dot{\theta}_1 = 0. \end{aligned}$$

Quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile se $(g/\ell) \geq \omega^2$.²

3. Oscillazioni smorzate e fenomeno della risonanza. Nel capitolo precedente abbiamo già studiato l'oscillatore armonico con attrito. Ora, consideriamo l'equazione che modella un sistema meccanico, in cui le forze in gioco sono rappresentate da una forza elastica $(-ky)$, da un attrito proporzionale alla velocità del sistema $(-h\dot{y})$ e da una sollecitazione esterna, dipendente dal tempo $(F(t))$, cioè si consideri l'equazione

$$m\ddot{y} = -ky - h\dot{y} + F(t),$$

dove $m > 0$ è la massa. In un primo istante, calcoliamo l'integrale generale del sistema meccanico, sul quale, oltre alla forza di tipo elastico, agisce una resistenza di tipo viscoso, ossia proporzionale alla velocità, che, come vedremo,

²L'origine è anche un punto di equilibrio stabile se $\omega^2 > (g/\ell)$. Infatti, poichè $H(0,0) = \frac{1}{2}\omega^2$, esiste un intorno U dell'origine in cui $H(\theta_1, \theta_2) > \frac{1}{4}\omega^2$. Applicando il Teorema di Liapunov si conclude che l'origine è un punto di equilibrio stabile, qualunque sia $\omega > 0$.

tenderà a smorzare le oscillazioni del moto. Quindi, l'equazione del moto è data da

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

dove $\delta = h/2m$. L'equazione caratteristica associata ha la forma

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

che presenta due radici

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

Analizziamo i seguenti casi:

- i) $\delta > \omega$, ovvero la resistenza è elevata. Le radici, λ_1, λ_2 , risultano essere reali negative e distinte. L'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie. Il moto non è oscillatorio.

- ii) $\delta = \omega$. Allora risulta che $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta < 0$ e l'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t},$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie. Il moto non è oscillatorio.

- iii) $0 < \delta < \omega$. Allora risulta che

$$\lambda_1 = -\delta + i\nu, \quad \lambda_2 = -\delta - i\nu,$$

dove $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$. L'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = A e^{-\delta t} \cos(\nu t + \alpha),$$

dove A e α sono due costanti arbitrarie. Il sistema esegue infinite oscillazioni attorno al centro con una frequenza $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ ed un'ampiezza $A e^{-\delta t}$, che diventa sempre più piccola al trascorrere del tempo. Questo tipo di oscillazioni è detto *smorzato*.

Ora, supponiamo che sul sistema agisca anche una forza esterna. L'equazione del moto non è più omogenea, ma è data da

$$m\ddot{y} = -ky - h\dot{y} + F(t), \quad m \neq 0.$$

Ponendo $f(t) = F(t)/m$, l'equazione diventa

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = f(t).$$

La soluzione generale è data da

$$y(t) = \varphi(t) + \psi(t),$$

dove $\varphi(t)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e $\psi(t)$ è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Possiamo considerare una sollecitazione esterna del tipo

$$f(t) = B \cos(\gamma t).$$

Se $\gamma = 0$, la forza esterna è una costante B . Diversamente, essa risulta essere armonica con frequenza $\nu = \gamma/2\pi$.

Analizziamo i seguenti casi:

- i) Supponiamo che la resistenza sia nulla, ovvero $\delta = 0$. Allora un integrale particolare presenta la seguente forma:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t & \gamma \neq \omega, \\ \frac{Bt}{2\omega} \sin \omega t & \gamma = \omega. \end{cases}$$

Alle oscillazioni descritte da $\varphi(t)$ si sovrappongono le *oscillazioni forzate* rappresentate da $\psi(t)$, di ampiezza costante (e uguale a $B/(\omega^2 - \gamma^2)$ se $\gamma \neq \omega$). Se, invece, si verifica che $\gamma = \omega$, l'ampiezza delle oscillazioni (uguale a $Bt/2\omega$) aumenta con il trascorrere del tempo: si ha il *fenomeno della risonanza*.

- ii) Sia $\delta > 0$. L'integrale particolare è dato da

$$\psi(t) = B\rho \cos[\gamma(t - r)],$$

dove $\rho = 1/\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\delta^2\gamma^2}$ e $\tan(\gamma r) = 2\gamma\delta/(\omega^2 - \gamma^2)$. Poichè l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $\varphi(t)$, tende a zero al tendere di t all'infinito, dopo un moto iniziale transitorio, la situazione di regime è descritta dall'integrale $\psi(t)$. Il moto è armonico con ampiezza $B\rho$ (dove ρ è una funzione di γ) e periodo $\frac{2\pi}{\gamma}$. Quest'ultima compare quando la frequenza di eccitazione è quasi uguale a quella caratteristica ω . Se, invece, $\delta \geq \frac{1}{2}\omega\sqrt{2}$, la funzione $\rho(\gamma)$ è decrescente e non si ha risonanza.

4. Modello preda-predatore di Lotka-Volterra. Dopo la prima guerra mondiale, al largo del Mar Adriatico, si riscontrò una diminuzione di una determinata specie di pesci commestibili e un aumento del numero di predatori. La

questione fu posta all'attenzione del matematico italiano Vito Volterra [1860-1940], che risolse il problema introducendo il seguente modello divenuto celebre e già studiato precedentemente da Alfred James Lotka [1880-1949], in relazione ad un problema di cinetica chimica.

Indicando con $x = x(t)$ il numero di prede e con $y = y(t)$ il numero di predatori, Volterra considerò che il tasso relativo di crescita delle prede era costante in assenza di predatori, ma decrescente linearmente con y ; il tasso relativo di diminuzione del numero di predatori era costante in assenza di prede, ma crescente linearmente con x . Il modello proposto fu il seguente:

$$\boxed{\frac{\dot{x}}{x} = a - by, \quad \frac{\dot{y}}{y} = -c + dx,}$$

dove $a, b, c, d > 0$. Poniamo $F(x, y) = ax - bxy$; $G(x, y) = -cy + dxy$. I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema $F(x, y) = G(x, y) = 0$, cioè $x = (c/d)$ e $y = (a/b)$. L'integrale primo del sistema è

$$E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by.$$

Infatti, moltiplicando $(\dot{x}/x) = a - by$ per $(-c + dx)$ e $(\dot{y}/y) = -c + dx$ per $(a - by)$ e sottraendo termine a termine, si ottiene

$$\left(-\frac{c}{x} + d\right) \dot{x} - \left(\frac{a}{y} - b\right) \dot{y} = \frac{d}{dt} (-c \log x + dx - a \log y + by) = \dot{E}.$$

Poichè

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{c}{x} + d = 0 \text{ per } x = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{a}{y} + b = 0 \text{ per } y = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{c}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{a}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} = 0,$$

E risulta essere strettamente convessa in \mathbb{R}^2 e il punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ è il minimo globale per E . In particolare, consideriamo come integrale primo definito positivo la funzione

$$H(x, y) = E(x, y) - E\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right),$$

che verifica le condizioni $H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = 0$, $H(x, y) > 0$ e $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) \leq 0$ e risulta quindi essere una funzione di Liapunov. Il punto di equilibrio del sistema è stabile ma non asintoticamente. A questo sistema, dunque, non è possibile in modo utile applicare il metodo di linearizzazione.

Gli insiemi di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : E(x, y) = k, k > E(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\}$ sono curve chiuse regolari che racchiudono $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Il moto avviene in senso antiorario.

L'evoluzione della coppia $(x(t), y(t))$ avviene con periodo T dipendente da k . Quindi, $x(0) = x(T)$ e $y(0) = y(T)$. Calcolando

$$\int_0^T \frac{\dot{x}}{x} dt = \log x(T) \Big|_0^T - \log x(0) \Big|_0^T = 0.$$

$$\int_0^T \frac{\dot{y}}{y} dt = \log y(T) - \log y(0) = 0.$$

$$0 = \int_0^T (a - by) dt = aT - b \int_0^T y dt.$$

Quest'ultima equazione implica $\frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a}{b}$;

$$0 = \int_0^T (-c + dx) dt = -cT + d \int_0^T x dt,$$

da cui si ottiene $\frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{c}{d}$.

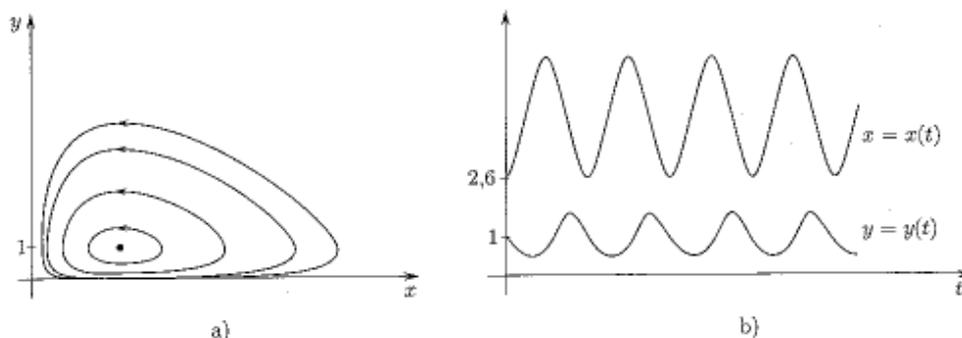


Figura III.8: (a) Orbite del sistema di Lotka-Volterra corrispondenti ai dati iniziali $(0.5, 1)$, $(0.7, 1)$, $(1.4, 1)$ e $(2.6, 1)$. (b) Grafici delle soluzioni dei sistemi di Lotka-Volterra con dati iniziali $(2.6, 1)$. Vedi [26, 8].

Il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra descrive la competizione tra prede e predatori. Il numero dei predatori è y e quello di prede è x . Questa competizione è ciclica. In ogni periodo T (con T che dipende dalla curva di livello di E) l'aumento delle prede comporta una riduzione del numero di predatori e vice versa, ma in ogni periodo il numero medio di prede e quello di predatori non cambia. Nessuna delle due specie si può estinguere.

Capitolo IV

Stabilità dei sistemi dinamici discreti

Consideriamo il cosiddetto *sistema dinamico discreto*

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (\text{IV.1})$$

dove $x_n \in \mathbb{R}^m$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua. Allora l'insieme $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ si dice *traiettoria* o *orbita*. Un'orbita si chiama *p-ciclo* se $x_{n+p} = x_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ ma $x_0 \notin \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$. Dunque p denota il periodo minimo.

Un'orbita che consiste in un singolo punto si dice *punto di equilibrio* e, indicato tale punto con X , esso è soluzione dell'equazione $F(X) = X$. Nel caso di un p -ciclo esistono p punti diversi X_1, X_2, \dots, X_p tali che

$$F(X_1) = X_2, F(X_2) = X_3, F(X_3) = X_4, F(X_{p-1}) = F(X_p), F(X_p) = X_1.$$

In tal caso l'orbita consiste in tali p punti. Ovviamente, X_1, \dots, X_p sono punti di equilibrio dell'iterato p -esimo della F (cioè, della mappa F^p , dove $F^1(X) = F(X)$ e $F^p(X) = F(F^{p-1}(X))$).

Un punto di equilibrio X si dice *asintoticamente stabile* se esiste un intorno U di X tale che $x_n \rightarrow X$ per ogni $x_0 \in U$. Il punto di equilibrio X si dice *stabile* se esiste un intorno U di X tale che ogni orbita con il punto iniziale $x_0 \in U$ è contenuta in U .

1 Teorema delle contrazioni

In questo paragrafo si dimostra il seguente teorema:

Teorema IV.1 (delle contrazioni) *Supponiamo che esista una costante $\delta \in (0, 1)$ tale che*

$$\|F(\xi) - F(\eta)\| \leq \delta \|\xi - \eta\|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Allora il sistema dinamico (IV.1) ha un singolo punto di equilibrio e quel punto è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Per $x_0 \in \mathbb{R}^m$ si consideri l'orbita $\{x_n\}_{n=0}^\infty$. Allora

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (\delta^{n+p-1} + \delta^{n+p-2} + \dots + \delta^n) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R}^m e quindi ha limite, X . Facendo tendere il pedice p all'infinito, risulta

$$\|x_n - X\| \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|.$$

Inoltre, facendo tendere n all'infinito nella (IV.1) risulta $X = F(X)$, cioè X è un punto di equilibrio che è ovviamente asintoticamente stabile. L'unicità del punto di equilibrio si dimostra facilmente. Infatti, se ne esistessero due, X e Y , allora $\|X - Y\| = \|F(X) - F(Y)\| \leq \delta \|X - Y\|$ implicherebbe $X = Y$. ■

Corollario IV.2 *Supponiamo che esistano una costante $\delta \in (0, 1)$ e un intero $p \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\|F^p(\xi) - F^p(\eta)\| \leq \delta \|\xi - \eta\|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Allora il sistema dinamico (IV.1) ha un singolo punto di equilibrio e quel punto è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Secondo il Teorema delle contrazioni esiste un unico punto fisso X della mappa F^p . Definiamo per $j = 0, 1, \dots, p-1$, $X_j = F^j(X)$. Allora

$$F^p(X_j) = F^{p+j}(X) = F^j(F^p(X)) = F^j(X) = X_j, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Poichè ovviamente ciascun X_j è punto fisso di F^p e tale mappa ha soltanto un singolo punto fisso, risulta $X_0 = X_1 = \dots = X_{p-1} = X$. Di conseguenza, $F(X) = X_1 = X_0 = X$. Siccome, per $j = 0, 1, \dots, p-1$ e dato il punto iniziale ξ_0 , le p successioni $\{\xi_{j+np}\}_{n=0}^\infty$ convergono tutte ad X , anche la successione $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ tende ad X . Ciò dimostra l'asintotica stabilità di F . ■

Se la mappa F è differenziabile in un intorno del punto di equilibrio X e $\|F'(X)\| < 1$ (essendo $F'(X)$ la matrice jacobiana in X), allora la F è una

contrazione (per qualsiasi δ tra $\|F'(X)\|$ e 1) in un opportuno intorno di X . Di conseguenza, X è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Sia $F : J \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ derivabile e sia X_1, \dots, X_p un p -ciclo di F . Applicando la regola di derivazione di una funzione composta p volte in seguito:

$$\begin{aligned} (F^p)'(X) &= F'(F^{p-1}(X))(F^{p-1})'(X) = F'(F^{p-1}(X))F'(F^{p-2}(X))(F^{p-2})'(X) \\ &= F'(F^{p-1}(X))F'(F^{p-2}(X)) \dots F'(F(X))F'(X). \end{aligned}$$

si conclude che il p -ciclo $\{X_1, \dots, X_p\}$ è asintoticamente stabile se

$$|F'(X_1)F'(X_2) \dots F'(X_p)| < 1.$$

2 Alcuni esempi illustrativi

In questo paragrafo presentiamo alcuni sistemi dinamici discreti quali il sistema producendo il metodo di Newton-Raphson, la mappa logistica e lo shift di Bernoulli.

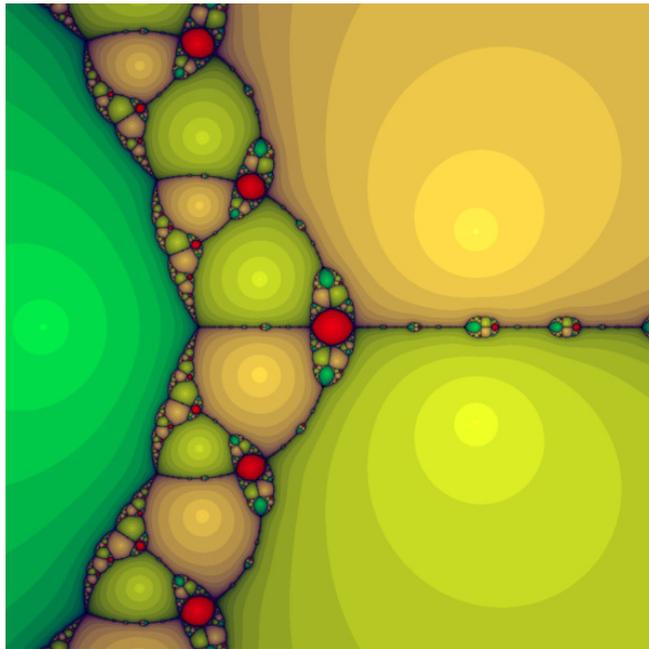


Figura IV.1: Gli attrattori provenienti dall'applicazione del metodo di Newton-Raphson alla funzione $f(z) = z^3 - 2z + 2$ (wikipedia).

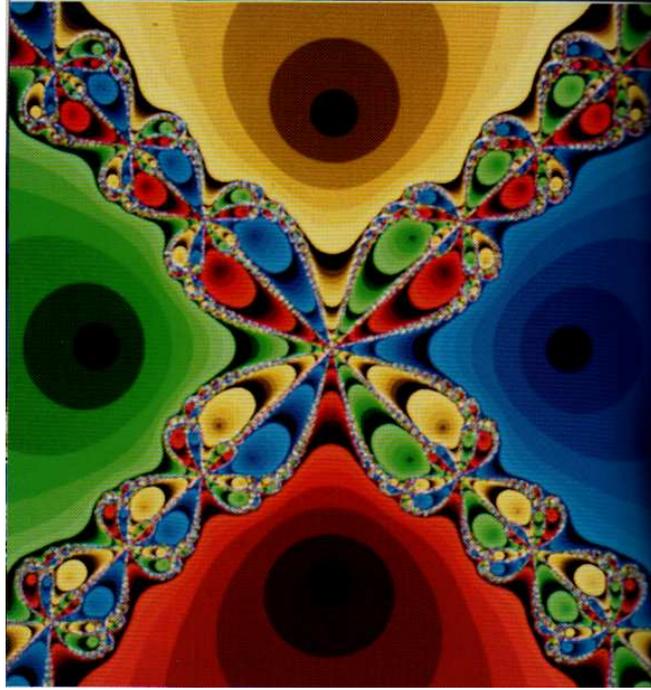


Figura IV.2: Gli attrattori provenienti dall'applicazione del metodo di Newton-Raphson alla funzione $f(z) = z^4 - 1$ (vedi [18]).

1. Metodo di Newton-Raphson. Questo metodo per determinare gli zeri di una funzione f di classe C^2 conduce al seguente sistema dinamico:¹

$$x_{n+1} = F(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (\text{IV.2})$$

Osserviamo ora che

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Quindi se $f(X) = 0$ e $f'(X) \neq 0$, esiste un intorno U di X in cui $|F'(x)| < 1$. In tal caso X è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostriamo ora che la convergenza allo zero X è quadratica. Infatti, scrivendo la (IV.2) nella forma

$$x_{n+1} - X = [x_n - X] - \frac{f(x_n) - f(X)}{f'(x_n)},$$

¹La tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_n, f(x_n))$ deve passare per il punto $(x_{n+1}, 0)$.

applichiamo il teorema del valor medio e troviamo ξ_n tra x_n e X tale che $f(x_n) - f(X) = f'(\xi_n)[x_n - X]$. Dunque,

$$x_{n+1} - X = \frac{x_n - X}{f'(x_n)} [f'(x_n) - f'(\xi_n)].$$

Applicando il teorema del valor medio alla f' troviamo η_n tra x_n e ξ_n tale che $f'(x_n) - f'(\xi_n) = f''(\eta_n)[x_n - \xi_n]$. Dunque,

$$x_{n+1} - X = \frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)} [x_n - X][x_n - \xi_n].$$

Ponendo $M = \max\{|f''(z)|\}$ e $m = \min\{|f'(z)|\}$, otteniamo la stima

$$|x_{n+1} - X| \leq \frac{M}{m} |x_n - X|^2.$$

Poichè la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge ad X in modo monotono, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $|x_k - X| < (m/M)$. Per induzione matematica si dimostra facilmente che

$$|x_n - X| \leq \frac{m}{M} \left(\frac{M}{m} |x_k - X| \right)^{2^{n-k}}.$$

Di conseguenza, $x_n \rightarrow X$.

Lo stesso ragionamento mostra che se la funzione f di classe C^2 cambia segno in $[a, b]$ e le sue derivate prima e seconda hanno segno costante in $[a, b]$, allora per ogni $x_0 \in [a, b]$ per cui $x_1 \in [a, b]$, la successione degli iterati $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge in modo monotono e quadratico all'unico zero X della f .

Il metodo di Newton-Raphson può anche essere applicato nel piano complesso. Sia f una funzione analitica intera.² Allora gli zeri complessi della f possono, in principio, essere trovati dal sistema dinamico

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

In generale, si ottiene un calderone di attrattori complicati. Per esempio, per $f(z) = z^4 - 1$ abbiamo attrattori attorno agli zeri ± 1 e $\pm i$.

2. Mappa logistica. Consideriamo la cosiddetta *mappa logistica*

$$x_{n+1} = F(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} rx_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{IV.3})$$

²Cioè: La funzione f ha un numero infinito di derivate successive nel piano complesso e la serie di potenze $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} [f^{(j)}(z_0)/j!](z - z_0)^j$ è assolutamente convergente in ogni $z \in \mathbb{C}$.

dove $0 \leq x_n \leq 1$ e r è una costante positiva. Per far appartenere x_{n+1} all'intervallo $[0, 1]$ per qualsiasi $x_n \in [0, 1]$, bisogna limitarsi alle costanti r tali che $0 \leq r \leq 4$. La mappa logistica (IV.3) ha i due punti di equilibrio $X = 0$ e, per $1 < r \leq 4$, $X = ((r - 1)/r)$, per cui $F(X) = X$. Ponendo $F(x) = rx(1 - x)$ e $x'_n = x_n - X$ si ha

$$X + x'_{n+1} = F(X + x'_n) = F(X) + x'_n F'(X) + O([x'_n]^2), \quad x'_n \rightarrow 0,$$

dove $F(X) = X$. Quindi

$$x'_{n+1} = x'_n F'(X) + O([x'_n]^2), \quad x'_n \rightarrow 0,$$

Dunque, se $|F'(X)| < 1$, si ha la stabilità asintotica della mappa logistica (nel senso che $x_n \rightarrow X$ se $n \rightarrow +\infty$, qualunque sia x_0). Se $|F'(X)| \leq 1$, si ha solo la sua stabilità (nel senso che x_n rimane vicino ad X).

Per $X = 0$ abbiamo $F'(X) = r(1 - 2X) = r$. Quindi $|F'(X)| < 1$ se e solo se $0 \leq r < 1$. In altre parole, per $0 \leq r < 1$ abbiamo $x_n \rightarrow 0$ qualunque sia $x_0 \in [0, 1]$. Quindi il punto di equilibrio $X = 0$ è asintoticamente stabile se $0 \leq r < 1$, e stabile se $0 \leq r \leq 1$.³

Per $X = ((r - 1)/r)$ abbiamo $F'(X) = 2 - r$. Quindi $|F'(X)| < 1$ se e solo se $1 < r < 3$. In altre parole, per $1 < r < 3$ abbiamo $x_n \rightarrow ((r - 1)/r)$ qualunque sia $x_0 \in (0, 1)$. Per $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$ abbiamo $x_n = 0$ per $n \geq 2$. Quindi il punto $X = ((r - 1)/r)$ è asintoticamente stabile se $1 < r < 3$ e stabile se $1 \leq r \leq 3$.^{4 5}

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} F^2(X) &= F(F(X)) = r[rX(1 - X)](1 - [rX(1 - X)]) \\ &= r^2 X(1 - X)(1 - rX + rX^2). \end{aligned}$$

Quindi $X = F^2(X)$ se e solo se

$$X \in \left\{ 0, \frac{r-1}{r}, \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)} \right\}.$$

Le altre due soluzioni dell'equazione $F^2(X) = X$ appartengono all'intervallo $[0, 1]$ se e solo se $3 \leq r \leq 4$.

³Per $r = 1$ e $x_0 \in (0, 1]$, si ha: $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > 0$ e quindi $x_n \rightarrow X$ per un opportuno punto di equilibrio X . Siccome 0 è l'unico punto di equilibrio, risulta $X = 0$. Quindi 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se $r = 1$.

⁴Per $r = 2$ la (IV.3) ha la soluzione esplicita $x_n = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2x_0)^{2^n}]$. Tale soluzione tende a $\frac{1}{2}$ per $n \rightarrow +\infty$ se e solo se $0 < x_0 < 1$.

⁵Per $r = 3$ il punto $\frac{2}{3}$ è asintoticamente stabile con convergenza sottolineare [Wikipedia, logistic map].

Si verifica facilmente che

$$F\left(\frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{(r+1)(r-3)}\right) = \frac{r+1}{2r} \mp \frac{1}{2r}\sqrt{(r+1)(r-3)}.$$

Inoltre,

$$(F^2)'(X) = F'(F(X))F'(X) = r^2(1 - 2F(X))(1 - 2X).$$

Per $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{(r+1)(r-3)}$ troviamo $(F^2)'(X) = -(r-1)^2 + 5$ il quale verifica $|(F^2)'(X)| < 1$ se e solo se $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$. In altre parole, i punti di equilibrio $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{(r+1)(r-3)}$ del secondo iterato della mappa logistica sono asintoticamente stabili se e solo se $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ e stabili se e solo se $3 \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$.

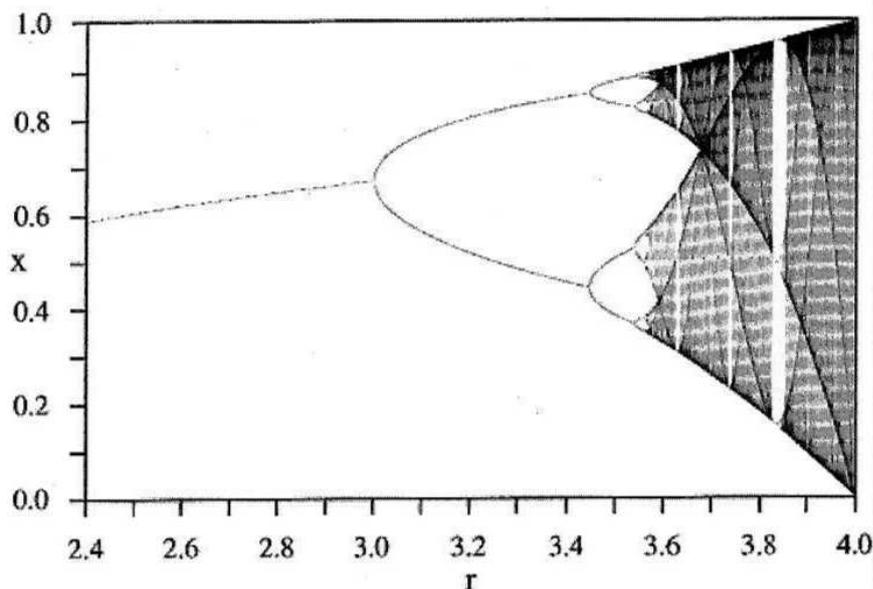


Figura IV.3: Diagramma di biforcazione della mappa logistica.

La sperimentazione numerica condotta da Mitchell Feigenbaum (1978) [nato nel 1944] ha portato ai seguenti risultati:

- Per $0 \leq r \leq 1$ esiste un singolo punto di equilibrio ($X = 0$) che è asintoticamente stabile.
- Per $1 < r \leq 3$ esiste un secondo punto di equilibrio ($X = ((r-1)/r)$) che è asintoticamente stabile.
- Per $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ esistono due punti di equilibrio della mappa F^2 ($X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{(r+1)(r-3)}$) che sono asintoticamente stabili. Quindi la mappa logistica ha un 2-ciclo asintoticamente stabile.

- d. Più generalmente, esiste una successione crescente $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ nell'intervallo $[0, 4)$ (dove $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1 + \sqrt{6}$) tale che per $\alpha_{k-1} < r < \alpha_k$ la mappa logistica ha un 2^{k-2} -ciclo asintoticamente stabile.
- e. Il rapporto delle lunghezze degli intervalli dei valori di r per cui esiste un 2^{k-2} -ciclo e per cui esiste un 2^{k-1} -ciclo della mappa logistica, hanno un rapporto che tende alla cosiddetta costante di Feigenbaum (4.669202 circa). In altre parole, la costante di Feigenbaum è il seguente limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}.$$

Si ha $\alpha_4 \approx 3.54409$. Infatti $\alpha_k \rightarrow 3.5699456$ (circa) se $k \rightarrow +\infty$.

- f. Oltre il valor limite di 3.5699456 ci sono intervalli di r per cui l'iterazione della mappa logistica esibisce un comportamento caotico. Ci sono anche intervalli di r per cui esistono un 3-ciclo (per $r = 1 + \sqrt{8} \simeq 3.828427$; vedi [11]), un 6-ciclo, un 12-ciclo, ecc.

Per $r = 4$ si ha $x_n = \sin^2(2^{n-1}\theta\pi)$, dove $\theta = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x_0})$. Quindi, se $\theta = (m/2^{n-1})$ per un opportuno intero m e per il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ possibile, allora per $x_0 = \sin^2(\frac{1}{2}\theta\pi)$ si genera un n -ciclo. Si dimostra facilmente l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra la mappa $x_n \mapsto x_{n+1}$ e lo shift di Bernoulli $\theta_n \mapsto \theta_{n+1}: x_n = \sin^2(\frac{\pi}{2}\theta_n)$.

3. Lo shift di Bernoulli. Sia $\sigma : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definita da

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$\theta_{n+1} = \sigma(\theta_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV.4})$$

Nel sistema binario (in cui si rappresentano i numeri tramite le due cifre 0 e 1) ogni numero $\theta \in [0, 1)$ si rappresenta in modo unico come

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{2^j},$$

dove $d_j \in \{0, 1\}$. In tal caso $0.d_1d_2d_3\dots$ è la rappresentazione binaria del numero θ . Si verifica facilmente che

$$\sigma(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{j+1}}{2^j}.$$

In altre parole, l'evoluzione del sistema dinamico (IV.4) consiste nell'allontanamento della prima cifra dallo sviluppo binario.

Lo sviluppo binario di un numero $\theta \in [0, 1)$ è finito (nel senso che tutte le cifre tranne un numero finito, m , sono uguali a zero) se e solo se $\theta = (q/2^m)$ per opportuni $m = 1, 2, 3, \dots$ intero e $q = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1$ dispari. In tal caso

$$\sigma^m(\theta) = 0.$$

D'altra parte, se θ è un numero razionale, da un certo punto in poi il suo sviluppo binario sarà periodico: $\theta_{n+p} = \theta_n$ per $n \geq s$. In tal caso

$$\{\theta_s, \theta_{s+1}, \dots, \theta_{s+p-1}\}$$

è un p -ciclo. Infine, se θ è irrazionale, il suo sviluppo binario è aperiodico.

Presentiamo ora alcuni esempi numerici.⁶

$$\theta_0 = \frac{1}{3}, \quad \theta_1 = \frac{2}{3}, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}; \quad (2\text{-ciclo})$$

$$\theta_0 = \frac{1}{7}, \quad \theta_1 = \frac{2}{7}, \quad \theta_2 = \frac{4}{7}, \quad \theta_3 = \frac{1}{7}; \quad (3\text{-ciclo})$$

$$\theta_0 = \frac{1}{5}, \quad \theta_1 = \frac{2}{5}, \quad \theta_2 = \frac{4}{5}, \quad \theta_3 = \frac{3}{5}, \quad \theta_4 = \frac{1}{5}. \quad (4\text{-ciclo})$$

L'unico punto di equilibrio della mappa σ è lo zero. Purtroppo, lo zero può essere approssimato da numeri irrazionali (per esempio, $\sqrt{2}/2n$) e quindi lo zero è un punto di equilibrio instabile. Dallo stesso ragionamento segue che tutti i p -cicli sono instabili. Ciò implica un comportamento caotico della mappa σ .

Ci sono esattamente 2^p punti in $[0, 1)$ che generano un p -ciclo. Tali punti periodici costituiscono un sottoinsieme infinito numerabile denso di $[0, 1)$.

Inoltre, esistono traiettorie dense in $[0, 1)$, ovviamente generate da un punto nonperiodico z [12, Sec. 1.6]. Per esempio,

$z \simeq 0,0100011011000001010011100101110111$

$000000100100011010001010110011110001001101010111100110111101111 \dots,$

composto dai due blocchi di una cifra, poi dai quattro blocchi di due cifre, poi dagli otto blocchi di tre cifre, poi dai 16 blocchi di quattro cifre, ecc. Per approssimare $x \simeq 0, d_1 d_2 \dots$ con un errore inferiore a 2^{-m} , dove $(d_1 d_2 \dots d_m)$ è il blocco s -esimo di m cifre (per un opportuno $s = 1, 2, \dots, m 2^m$,⁷ si applichi σ esattamente $N = \sum_{j=1}^{m-1} j 2^j + m(s-1)$ volte. In tal caso

$$|x - \sigma^N(z)| < 2^{-m},$$

⁶Per $\theta_0 = \frac{1}{N}$ si inizia un p -ciclo se p è il numero naturale più piccolo per cui $2^p - 1$ è divisibile da N . Quindi $\frac{1}{31}$ genera un 5-ciclo, $\frac{1}{9}$ un 6-ciclo, $\frac{1}{127}$ un 7-ciclo, $\frac{1}{17}$ un 8-ciclo, $\frac{1}{73}$ un 9-ciclo, $\frac{1}{11}$ un 10-ciclo e $\frac{1}{23}$ e $\frac{1}{89}$ 11-cicli.

⁷In altre parole, $s = 2^m \sum_{j=1}^m (d_j/2^j) = s - 1$.

poichè le prime m cifre di $\sigma^N(z)$ e x coincidono. La mappa σ si dice *topologicamente transitiva*.

Esistono anche $z \in [0, 1)$ irrazionali che non generano un sottoinsieme denso di $[0, 1)$. Per esempio,

$$z \simeq 0, 10100100010000100000100000010000000100000001 \dots,$$

composta da 1, una volta 0, poi 1, poi due volte 0, poi 1, poi tre volte 0, ecc. In tal caso lo sviluppo binario è aperiodico. Inoltre, applicando σ ripetutamente, non si arriva mai ad uno sviluppo binario iniziando con 0, 11. In altre parole, $\{\sigma^N(z) : N \in \mathbb{N}\} \subset (0, \frac{3}{4})$.

4. Esempio di una mappa cubica. Per il parametro $a \in \mathbb{R}$ consideriamo il sistema dinamico

$$x_{n+1} = f(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} ax_n - [x_n]^3. \quad (\text{IV.5})$$

I punti fissi sono 0 per $a \leq 1$ e $\{0, \pm\sqrt{a-1}\}$ per $a > 1$. Siccome $f'(x) = a - 3x^2$, si ha $f'(0) = a$ e, per $a > 1$, $f'(\pm\sqrt{a-1}) = 3 - 2a$. Quindi il punto fisso $z = 0$ è stabile per $a < 1$ e instabile per $a > 1$. I punti fissi $\pm\sqrt{a-1}$ sono stabili per $1 < a < 2$ e instabili per $a > 2$. Inoltre,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= a(ax - x^3) - (ax - x^3)^3 \\ &= x \{x^8 - 3ax^6 + 3a^2x^4 - (a^3 + a)x^2 + a^2\}. \end{aligned}$$

Quindi $f^2(x) = x$ se e solo se

$$\underbrace{x(x^2 - a + 1)}_{\text{punti fissi}}(x^2 - a - 1)(x^4 - ax^2 + 1) = 0.$$

Abbiamo $f(\pm\sqrt{a+1}) = \pm\sqrt{a+1}$ e $f'(\pm\sqrt{a+1}) = -3 - 2a < -1$ per $a > -1$; dunque il 2-ciclo $\{\pm\sqrt{a+1}\}$ è instabile. Inoltre, per $a > 2$ si ha

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}}\right) = \pm\sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}},$$

dove ci sono due coppie con segni \pm indipendenti.

5. Mappe differenziabili in \mathbb{R}^2 . Consideriamo ora la mappa

$$z_{n+1} = \mathbf{F}(z_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{IV.6})$$

Ponendo $z = x + iy$, potremmo convertire la (IV.6) nel sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = F_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

dove abbiamo sfruttato l'equivalenza tra il piano complesso e \mathbb{R}^2 . Per esempio, per $\mathbf{F}(z) = z^2$ otteniamo al posto della (IV.7)

$$\begin{cases} x_{n+1} = [x_n]^2 - [y_n]^2, \\ y_{n+1} = 2x_n y_n. \end{cases}$$

Se \mathbf{F} è una funzione analitica e Z è un punto di equilibrio, allora Z è asintoticamente stabile se $|\mathbf{F}'(Z)| < 1$ e instabile se $|\mathbf{F}'(Z)| > 1$.

Quest'ultimo sistema dinamico ha due punti di equilibrio, ambedue stabili: 0 e ∞ (in \mathbb{C}). Siccome $z_n = [z_0]^{2^n}$ determina l'orbita con punto iniziale z_0 , si ha $z_n \rightarrow 0$ per $|z_0| < 1$ e $z_n \rightarrow \infty$ per $|z_0| > 1$. Il cerchio unitario viene trasformato in se stesso. Le radici dell'unità primitive di ordine p conducono ad un p -ciclo.⁸ Tutti gli altri punti del cerchio unitario producono un'orbita aperiodica che è densa nel cerchio.

Consideriamo il caso $\mathbf{F}(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. In tal caso i punti di equilibrio sono $Z = \pm 1$ (e $Z = \infty$). Siccome $\mathbf{F}'(\pm 1) = 0$, i punti di equilibrio $Z = \pm 1$ sono ambedue stabili. Il semipiano destro aperto ($\operatorname{Re}(z) > 0$) è l'attrattore per $Z = 1$, mentre quello sinistro ($\operatorname{Re}(z) < 0$) è l'attrattore per $Z = -1$. L'asse immaginario andrà a finire a $Z = \infty$ dopo uno (per $z_0 = 0$) o due (per $z_0 \neq 0$) passaggi. Siccome ogni numero immaginario può essere approssimato da numeri complessi non immaginari, il punto di equilibrio $Z = \infty$ è instabile.

3 L'insieme di Mandelbrot

Consideriamo ora la mappa interessante

$$f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

dove f è un polinomio oppure una funzione razionale, studiata da Pierre Fatou [1878-1929], Gaston Julia [1893-1978] e Benoît Mandelbrot [1924-2010]. Mandelbrot (1980) è stato uno dei primi a studiare tali problemi con l'aiuto di adeguati strumenti informatici. La mappa più studiata è stata la seguente:

$$f(z) = z^2 + c, \tag{IV.8}$$

dove $c \in \mathbb{C}$ è una costante, in particolare il sistema dinamico di equazione

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = [z_n]^2 + c. \tag{IV.9}$$

Per questa mappa si definisce *insieme di Mandelbrot* l'insieme M di tutti i numeri complessi c per cui la successione $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ è limitata. In tal caso $\{z_n\}_{n=0}^\infty$

⁸ z se dice radice dell'unità primitiva se $z^p = 1$ e $1 \notin \{z, z^2, z^3, \dots, z^{p-1}\}$.

può essere suddivisa in alcune sottosuccessioni aventi come limite uno degli zeri dell'equazione polinomiale $z = f^n(z)$ di grado 2^n . Per $c = \pm i$, la successione $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ consiste in quattro punti, poichè

$$0 \xrightarrow{f} \pm i \xrightarrow{f} -1 \pm i \xrightarrow{f} \mp i \xrightarrow{f} -1 \pm i \xrightarrow{f} \mp i \xrightarrow{f} \dots,$$

quindi $\{i, -i\} \subset M$. D'altra parte, per $c = 1$ abbiamo $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_n \geq 1$ per $n = 1, 2, 3, \dots$, e quindi $z_{n+1} \geq z_n + 1 > z_n$, che implica che $z_n \rightarrow +\infty$. In altre parole, $1 \notin M$.

Per $c > \frac{1}{4}$, abbiamo

$$z_{n+1} - z_n = (z_n - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{4}) > 0,$$

implicando la monotonia stretta della successione $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ e quindi l'esistenza (finita o infinita) del limite $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$. Siccome $z = z^2 + c$, risulterebbe $(z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - c < 0$ e dunque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se z fosse finito. Di conseguenza, $z_n \rightarrow +\infty$ e quindi $(\frac{1}{4}, +\infty) \cap M = \emptyset$.

Per $c = \frac{1}{4}$ abbiamo $z_{n+1} = [z_n]^2 + \frac{1}{4}$. Perciò se $\frac{1}{4} < z_n < \frac{1}{2}$, allora $\frac{1}{4} < z_{n+1} < \frac{1}{2}$, mentre $z_{n+1} - z_n = (z_n - \frac{1}{2})^2 > 0$. Di conseguenza, $z_n \rightarrow \frac{1}{2}$, che è la soluzione dell'equazione $z = z^2 + \frac{1}{4}$ e perciò $\frac{1}{4} \in M$. Inoltre, per $c = -2$ abbiamo $z_0 = 0$, $z_1 = -2$, $z_2 = z_3 = \dots = 2$, e quindi $-2 \in M$. Per dimostrare che $(-\infty, -2)$ non interseca M , prendiamo $c < -2$. In tal caso $z_0 = 0$, $z_1 = c < -2$, $z_2 > (-2)^2 - 2 = 2$, $z_3 > (2)^2 - 2$, dunque $z_n > 2$ per $n = 2, 3, 4, \dots$. Inoltre, $z_{n+1} - z_n = (z_n - 2)(z_n + 1) > 0$ per $n = 2, 3, 4, \dots$. Quindi $\{z_n\}_{n=2}^\infty$ è strettamente crescente con limite $+\infty$ (poichè in caso contrario il limite sarebbe uno degli zeri 2 e -1 dell'equazione $z = z^2 - 2$ e questo è impossibile). Di conseguenza, $c \notin M$ e quindi $(-\infty, -2) \cap M = \emptyset$.

I punti fissi della (IV.8) sono $z_\pm = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{1 - 4c}]$. In questi due punti abbiamo $f'(z_\pm) = 2z_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$. Affinchè uno dei punti fissi z_\pm sia attraente, è necessario e sufficiente che $|f'(z_\pm)| < 1$ per almeno uno delle z_\pm , oppure: che $\sqrt{1 - 4c}$ si trovi all'interno di uno dei due dischi di raggio 1 e centro ± 1 . Ponendo $w = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$, risulta $c = \frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2]$. In altre parole, la mappa (IV.8) ha un punto fisso attraente se e solo se

$$c \in \left\{ \frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2] : |w| < 1 \right\}.$$

Si vede facilmente che la frontiera di questa regione è una cardiode⁹ con una cuspide nel punto di ascissa $\frac{1}{4}$ e l'estremo sinistro a $-\frac{3}{4}$. Di conseguenza, questa regione più la sua frontiera sono contenute nell'insieme di Mandelbrot.

⁹Si ha $|c(\theta)| = \frac{1}{4}\sqrt{5 - 4\cos\theta}$, dove $\theta = \arg(c)$. L'area rinchiusa è $5\pi/16$. La lunghezza della cardiode vale $3K(\frac{2}{3}\sqrt{2})$, dove $K(m)$ è l'integrale ellittico di prima specie [2, 17.3.1].

Iterando la (IV.9), risulta $z_{n+2} = [z_n]^4 + 2c[z_n]^2 + c(c+1)$. Quindi i punti fissi del secondo iterato f^2 sono gli zeri del polinomio

$$p(z) = z^4 + 2cz^2 - z + c(c+1) = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1);$$

dunque i punti di periodo 2 sono $z_{\pm}^{[2]} = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1 - 4(c+1)}]$. Adesso osserviamo che $(f^2)'(z) = f'(f(z))f'(z) = 4zf(z) = 4z(z^2 + c)$. Sostituendo $z = z_{\pm}^{[2]}$, si ha $(f^2)'(z_{\pm}^{[2]}) = 4(c+1)$. Dunque $\{z_{+}^{[2]}, z_{-}^{[2]}\}$ è un attrattore se e solo se c appartiene al disco $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta + 1| < \frac{1}{4}\}$. In altre parole, il disco chiuso di centro -1 e raggio $\frac{1}{4}$ (che tocca la cardiode nel punto $-\frac{3}{4}$) è contenuto nell'insieme di Mandelbrot. Abbiamo dimostrato che

$$[-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}] \subset M \cap \mathbb{R} \subset [-2, \frac{1}{4}].$$

Si può infatti dimostrare che $M \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$.

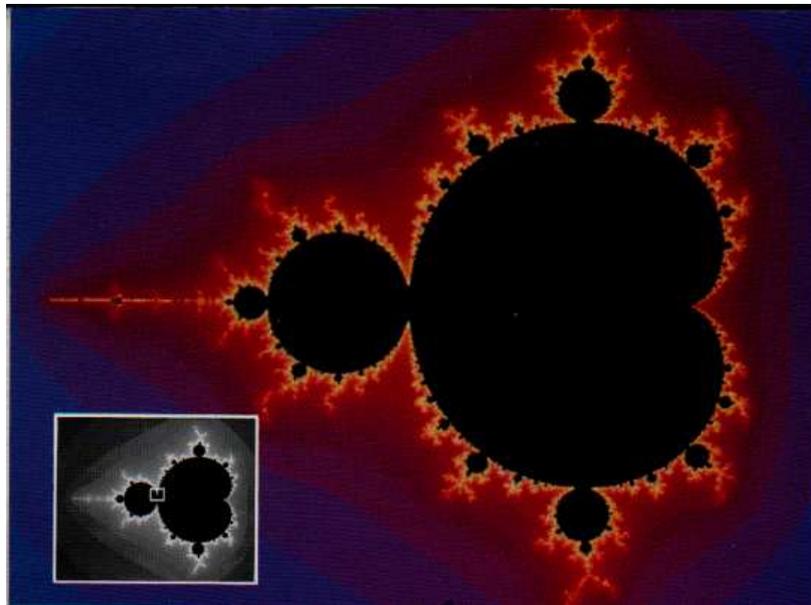


Figura IV.4: L'insieme di Mandelbrot per la mappa $f(z) = z^2 + c$ (vedi [18]). Esso contiene il disco di centro -1 e raggio $\frac{1}{4}$ attaccato, nel punto $z = \frac{3}{4}$, alla regione racchiusa dalla cardiode $\{\frac{1}{4}[1 - (w-1)^2] : |w| = 1\}$.

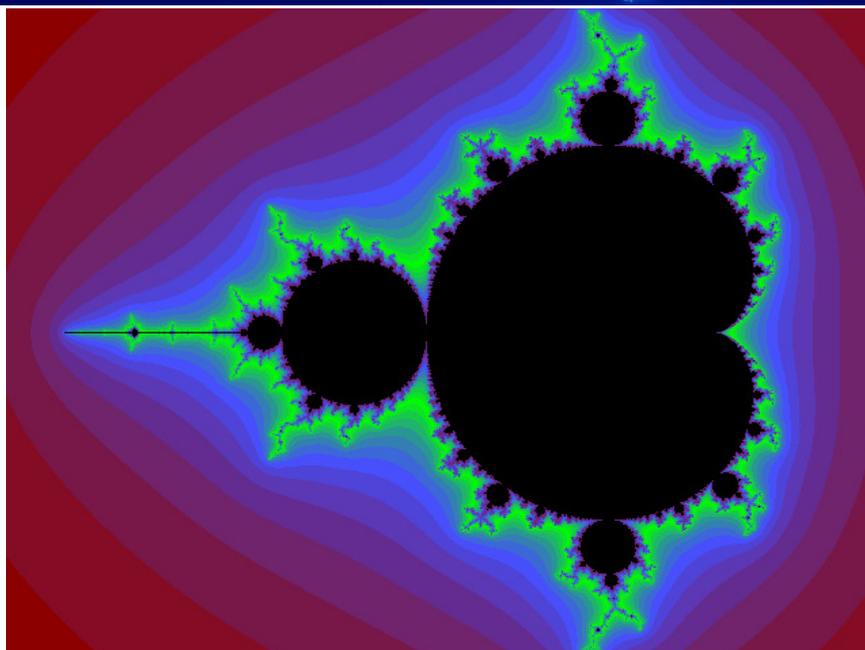
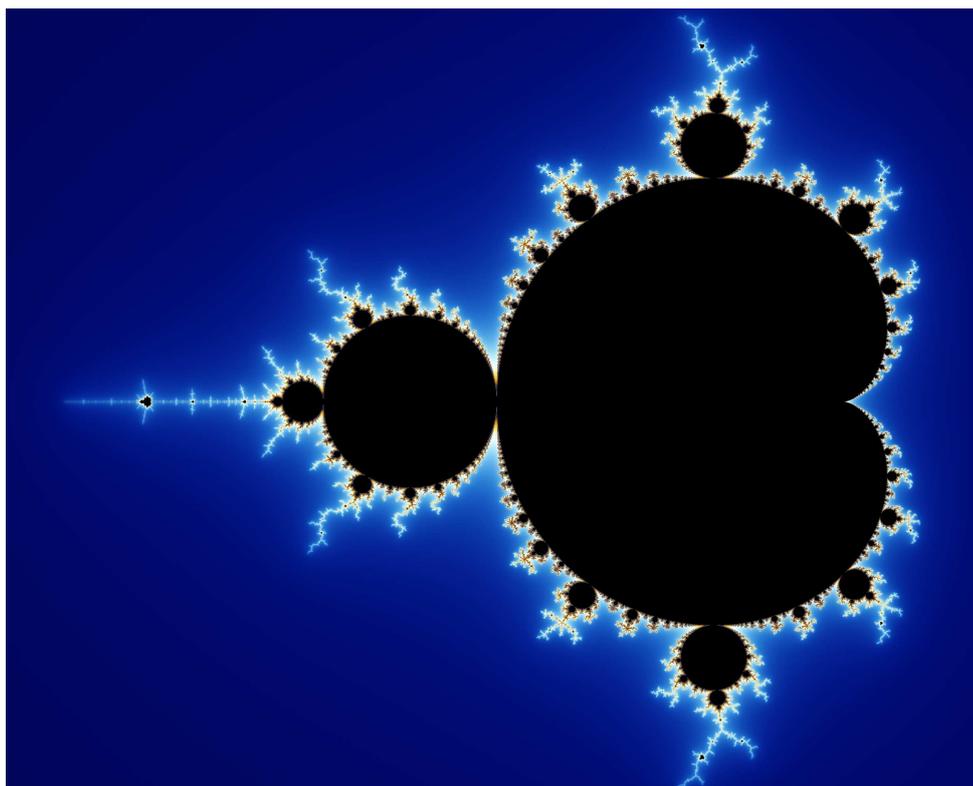


Figura IV.5: Due altre rappresentazioni dell'insieme di Mandelbrot per la mappa $f(z) = z^2 + c$ (vedi Wikipedia).

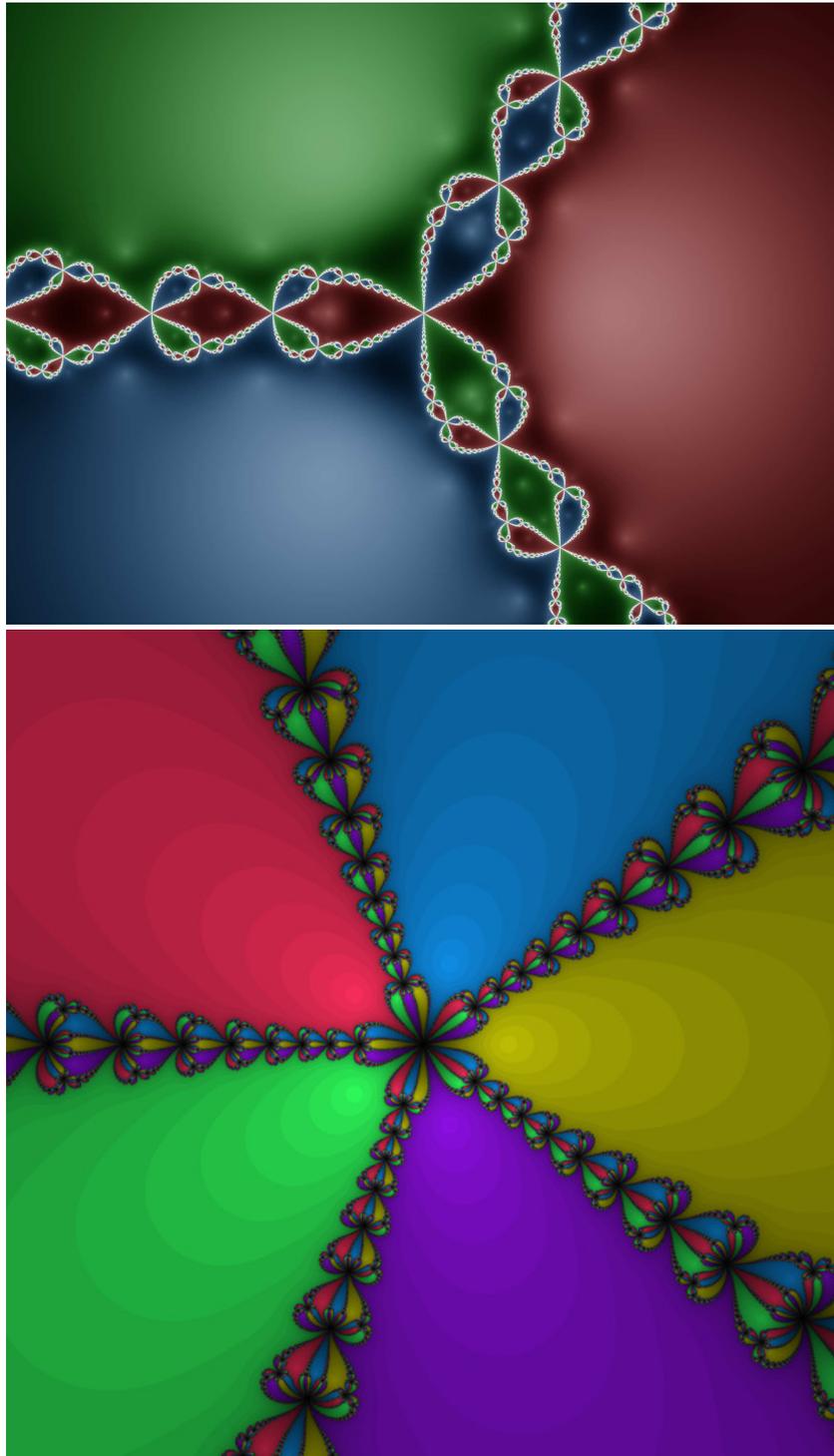


Figura IV.6: Bacini di attrazione per calcolare gli zeri dei polinomi $z^3 - 1$ e $z^5 - 1$ usando il metodo di Newton-Raphson (wikipedia, *Newton fractal*).

Capitolo V

Biforcazioni e cicli-limite

In questo capitolo discuteremo il teorema di Poincaré-Bendixson che costituisce uno strumento basilare per lo studio dei sistemi dinamici in \mathbb{R}^2 e fornisce un criterio valido per individuare i cicli-limite nel piano. Successivamente, applicheremo questo teorema all'oscillatore di Van der Pol. Infine discuteremo il modello logistico di Verhulst e l'oscillatore di Lorenz.

1 Teorema di Poincaré-Bendixson

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad f = (f_1, f_2), \quad f_1, f_2 \in C^1(\Omega), \quad (\text{V.1})$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto.

Teorema V.1 (Criterio di Bendixson) *Sia Ω un aperto semplicemente connesso. Se*

$$\operatorname{div}(f)(x) = \partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x)$$

non cambia segno in Ω e non è identicamente nulla in ogni sottoinsieme aperto di Ω , allora il sistema (V.1) non ammette soluzioni periodiche.

Nel caso in cui f_1 dipende soltanto da x_2 e f_2 soltanto da x_1 si ha $\operatorname{div}(f) \equiv 0$ in Ω , cioè non si verificano le ipotesi del Criterio di Bendixson (Ivar Otto Bendixson [1861–1935]). Ciò vale anche per il pendolo semplice. Nel caso del sistema di Lotka-Volterra la divergenza della f cambia segno in ogni intorno del punto di equilibrio. In entrambi gli esempi esiste un intorno del punto di equilibrio che consiste in cicli.

D'altra parte, l'oscillatore armonico con attrito (II.2) fornisce un'applicazione del criterio di Bendixson: infatti, in tal caso $\operatorname{div}(f) = -k < 0$. Di conseguenza non ne esiste alcuna soluzione periodica.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $t \rightarrow \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ sia una soluzione periodica del sistema (V.1), con periodo $T > 0$. Indichiamo con C la curva $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e con D il dominio delimitato da C . Poichè Ω è semplicemente connesso, $D \subset \Omega$. Per il Teorema di Gauss-Green e per le ipotesi date, si ha

$$\begin{aligned} 0 &\neq \iint_D \underbrace{\left(\partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x) \right)}_{\text{non cambia segno}} dx_1 dx_2 = \oint_{+C} (-f_2(x) dx_1 + f_1(x) dx_2) \\ &= \int_0^T (-f_2(x(t)) \dot{x}_1(t) + f_1(x(t)) \dot{x}_2(t)) dt \\ &= \int_0^T (-f_2(x(t)) f_1(x(t)) + f_1(x(t)) f_2(x(t))) dt = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

il che è assurdo. ■

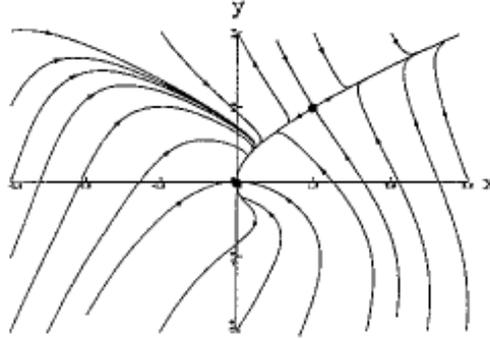


Figura V.1: Orbite per un sistema dinamico con due punti di equilibrio [33].

Esempio V.2 Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -y^3 + x^2. \end{cases}$$

I suoi punti di equilibrio si ottengono risolvendo le equazioni $x = y^2$ e $y^3 = x^2$, cioè: $(0, 0)$ [degenere] e $(1, 1)$ [punto di sella].¹ Abbiamo

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(-x + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^3 + x^2) = -1 - 3y^2 < 0,$$

quindi non ci sono soluzioni periodiche.

¹Sistema linearizzato: $\dot{z} = Az$, dove $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per $(0, 0)$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ per $(1, 1)$.

Indichiamo con

$$\varphi^+ = \varphi^+(x_0) = \{\varphi(t; x_0) : t \geq 0\}$$

una semi-orbita positiva.

Definizione V.3 Un punto P è detto *punto limite positivo* per φ^+ se esiste una successione monotona crescente $t_k \rightarrow +\infty$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x_0) = P$. Indichiamo con $L(\varphi^+)$ l'insieme di tutti i punti limite positivi.

Teorema V.4 L'insieme $L(\varphi^+)$ è invariante, cioè

$$P \in L(\varphi^+) \Rightarrow \varphi(t; P) \in L(\varphi^+), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se φ^+ è limitata, allora $L(\varphi^+)$ è un insieme non vuoto, compatto e connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che $P \in L(\varphi^+)$, $t_k \rightarrow +\infty$, $P_k = \varphi(t_k; x_0)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P$. Fissiamo un $t \in \mathbb{R}$. Tenendo conto della dipendenza continua dai dati iniziali, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t + t_k; x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t; \varphi(t_k; x_0)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t; P_k) = \varphi(t; P). \quad (\text{V.3})$$

Quindi, $\varphi(t; P) \in L(\varphi^+)$.

Sia $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(\varphi^+)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P$. Questo implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu > 0$ tale che

$$\delta_k = \|P - P_k\| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad k \geq \nu. \quad (\text{V.4})$$

Poichè $P_k \in L(\varphi^+)$, esiste una successione monotona crescente tale che

$$\|\varphi(t_k; x_0) - P_k\| < \delta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{V.5})$$

Dalle relazioni (V.4) e (V.5) segue che $\|\varphi(t_k; x_0) - P\| < \varepsilon$ per $k \geq \nu$, e quindi $L(\varphi^+)$ è chiuso.

Ora, supponiamo che φ^+ sia limitata. Essendo composto da punti di accumulazione di φ^+ , l'insieme $L(\varphi^+)$ è non vuoto e limitato. Dunque, per il teorema di Heine-Borel,² l'insieme $L(\varphi^+)$ è compatto. Supponiamo, inoltre, che $L(\varphi^+)$ non sia connesso. Devono allora esistere due insiemi M ed N chiusi tali che $M \cup N = L(\varphi^+)$ e $M \cap N = \emptyset$. Poniamo

$$\delta = d(M, N) = \min_{[\xi \in M, \eta \in N]} \|\xi - \eta\| > 0. \quad (\text{V.6})$$

Allora esistono due successioni $\{t'_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{t''_k\}_{k=1}^{\infty}$ monotone e crescenti tali che per $k \in \mathbb{N}$:

$$d(\varphi(t'_k; x_0), M) < \frac{1}{2}\delta, \quad d(\varphi(t''_k; x_0), N) < \frac{1}{2}\delta. \quad (\text{V.7})$$

²Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato [Heine-Borel].

Dalle relazioni (V.6) e (V.7) e dalla disuguaglianza triangolare, segue che per $k \in \mathbb{N}$

$$d(\varphi(t'_k; x_0), M) < \frac{1}{2}\delta, \quad d(\varphi(t''_k; x_0), M) \geq \frac{1}{2}\delta. \quad (\text{V.8})$$

Quindi, per il teorema degli zeri di una funzione continua, applicato alla funzione continua $h(t) = d(\varphi(t; x_0), M)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $t_k \in [t'_k, t''_k]$ tale che

$$d(\varphi(t_k; x_0), M) = \frac{\delta}{2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{V.9})$$

La successione $\{\varphi(t_k; x_0)\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata e quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass,³ una sua sottosuccessione converge ad un punto Q che, per la definizione dell'insieme $L(\varphi^+)$, deve appartenere a $L(\varphi^+) = M \cup N$. Inoltre, $d(Q, M) = (\delta/2)$ e quindi $Q \in N$, il che contraddice la relazione (V.6). Quindi, $L(\varphi^+)$ è connesso. ■

Teorema V.5 (Poincaré-Bendixson) *Sia φ^+ limitata e $L(\varphi^+) \subset \Omega$. Se $L(\varphi^+)$ contiene solo punti regolari, cioè*

$$P \in L(\varphi^+) \Rightarrow f(P) \neq (0, 0), \quad (\text{V.10})$$

allora vale una delle due seguenti tesi:

- i) $\varphi^+ = L(\varphi^+)$ ed essa è un'orbita periodica.*
- ii) $\varphi^+ \cap L(\varphi^+) = \emptyset$ e $L(\varphi^+)$ è un'orbita periodica.*

Di conseguenza, si ha che se D è un sottoinsieme di Ω , aperto e limitato e tale che ogni orbita che entri in D non possa più uscirne, allora esiste un'orbita periodica in D .

Per dimostrare il Teorema V.5, introduciamo il concetto di trasversale e dimostriamo quattro lemmi preliminari.

Definizione V.6 Sia ℓ un segmento chiuso e limitato di una retta nel piano. Diremo che ℓ è *trasversale rispetto a $\varphi(x)$* se $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P))$ non è parallelo ad ℓ per nessun $P \in \ell$.

Lemma V.7 *Valgono le seguenti proprietà:*

- i) se $P \in \Omega$ è un punto regolare per $\varphi(x)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è un versore non parallelo a $\varphi(P)$, allora esiste un segmento trasversale ℓ parallelo a ν e tale che $P \in \ell$.*

³Ogni successione limitata in \mathbb{R}^n ha una sottosuccessione convergente.

ii) Se ℓ è un segmento trasversale, ogni orbita interseca ℓ trasversalmente. Questo significa che la retta alla quale appartiene ℓ divide il piano \mathbb{R}^2 in due semi-piani π_+ e π_- per cui si verifica una delle due seguenti alternative:

a) se $x(\bar{t}, x^0) \in \ell$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $x(t', x^0) \in \pi_+$ per $t' \in (\bar{t}, \bar{t} + \delta)$ e $x(t'', x^0) \in \pi_-$ per $t'' \in (\bar{t} - \delta, \bar{t})$;

b) se $x(\bar{t}, x^0) \in \ell$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $x(t', x^0) \in \pi_-$ per $t' \in (\bar{t}, \bar{t} + \delta)$ e $x(t'', x^0) \in \pi_+$ per $t'' \in (\bar{t} - \delta, \bar{t})$.

iii) Sia $P_0 \in \ell$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|P - P_0\| < \varepsilon$ si ha che $x(t, P) \in \ell$ per un opportuno $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Dimostrazione. Sia

$$a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2) = 0, \quad a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad (\text{V.11})$$

l'equazione normale di una retta che passa per il punto \bar{x} . L'equazione parametrica di un segmento ℓ presenta la seguente forma:

$$x_j(\tau) = \bar{x}_j + \nu_j \tau, \quad j = 1, 2, \quad -\delta' \leq \tau \leq \delta'', \quad \nu_1 = -a_2, \quad \nu_2 = a_1, \quad (\text{V.12})$$

dove $\delta', \delta'' > 0$. Il segmento ℓ è trasversale se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{pmatrix} = a_1 \varphi_2(x) - a_2 \varphi_1(x) = \nu_1 \varphi_1(x) + \nu_2 \varphi_2(x) \neq 0. \quad (\text{V.13})$$

Se $\nu_1 \varphi_2(\bar{x}) + \nu_2 \varphi_1(\bar{x}) \neq 0$, dall'ipotesi di continuità segue che, per δ' e δ'' abbastanza piccoli, vale la relazione (V.13), e, dunque, la parte i) risulta dimostrata.

Definiamo ora i seguenti due semipiani:

$$\pi_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \pm[\nu_1(x_1 - \bar{x}_1) + \nu_2(x_2 - \bar{x}_2)] > 0\}. \quad (\text{V.14})$$

Supponiamo, per assurdo, che ℓ sia trasversale e che esistano due punti $P, Q \in \ell$ tali che le traiettorie $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ intersecano ℓ in direzioni opposte, cioè per un certo $\delta > 0$ si ha

$$x(t, P) \in \pi_{\pm}, \quad 0 < \pm t < \delta, \quad (\text{V.15a})$$

$$x(t, Q) \in \pi_{\mp}, \quad 0 < \pm t < \delta. \quad (\text{V.15b})$$

Osserviamo che per (V.14) si conclude che (V.15a) equivale a

$$\nu_1 \frac{x_1(t', P) - x_1(t'', P)}{t' - t''} + \nu_2 \frac{x_2(t', P) - x_2(t'', P)}{t' - t''} > 0, \quad (\text{V.16a})$$

dove $0 < t' < \delta$ e $-\delta < t'' < 0$. L'equazione (V.15b) equivale a

$$\nu_1 \frac{x_1(t', Q) - x_1(t'', Q)}{t' - t''} + \nu_2 \frac{x_2(t', Q) - x_2(t'', Q)}{t' - t''} < 0, \quad (\text{V.16b})$$

dove $0 < t' < \delta$ e $-\delta < t'' < 0$. Utilizzando il Teorema di Lagrange, la continuità di $\varphi(x)$, il teorema della permanenza del segno e considerando che $x(t, P)$ e $x(t, Q)$ sono soluzioni di (V.1), da (V.16) otteniamo

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) \geq 0, \quad \nu_1 \varphi_1(Q) + \nu_2 \varphi_2(Q) \leq 0.$$

La definizione di trasversale implica

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) > 0, \quad \nu_1 \varphi_1(Q) + \nu_2 \varphi_2(Q) < 0. \quad (\text{V.17})$$

Queste disuguaglianze ed il teorema per gli zeri di una funzione continua implicano l'esistenza di un punto $R \in \ell$, compreso tra P e Q , tale che $\nu_1 \varphi_1(R) + \nu_2 \varphi_2(R) = 0$. Questo è assurdo, poiché ℓ è trasversale. Dunque, anche la parte ii) è dimostrata.

Sia $(\xi, \eta) \in \Omega$. L'orbita definita da $x(t, (\xi, \eta))$ interseca il segmento trasversale se e solo se l'equazione

$$H(t, \xi, \eta) = a_1(x_1(t, (\xi, \eta)) - \bar{x}_1) + a_2(x_2(t, (\xi, \eta)) - \bar{x}_2) = 0 \quad (\text{V.18})$$

ammette almeno una soluzione $t = t(\xi, \eta)$. Poichè abbiamo $H(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ e $\partial_t H(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \nu_1 \varphi_1(\bar{x}) + \nu_2 \varphi_2(\bar{x}) \neq 0$, l'applicazione del Teorema delle funzioni implicite permette di stabilire anche la parte iii). ■

Lemma V.8 *Sia $A = \{x(t, \bar{x}) : \underline{t} \leq t \leq \bar{t}\}$ un arco chiuso di un'orbita $\varphi(\bar{x})$ e sia ℓ un segmento trasversale. Se $A \cap \ell \neq \emptyset$, allora $A \cap \ell$ è un insieme finito e l'ordine dei punti dell'intersezione su A e su ℓ è lo stesso. Più precisamente, se*

$$A \cap \ell = \{Q_1, \dots, Q_m\}, \quad (\text{V.19})$$

dove

$$Q_k = x(\tau_k, \bar{x}), \quad k = 1, \dots, m, \quad \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m, \quad (\text{V.20})$$

allora i vettori

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2}, \overrightarrow{Q_2 Q_3}, \dots, \overrightarrow{Q_{m-1} Q_m} \quad (\text{V.21})$$

hanno la stessa direzione. Quindi, se l'orbita $\varphi(\bar{x})$ è chiusa, allora essa non può intersecare ℓ in più di un punto.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $A \cap \ell$ sia un insieme infinito. Allora esiste una successione $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [\underline{t}, \bar{t}]$ tale che $t_k \neq t_i$ per $k \neq i$ e $P_k = \varphi(t_k) \in \ell$, $\varphi(t) = x(t, \bar{x})$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, considerando una sottosuccessione di $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, esiste $\widehat{t} \in [\underline{t}, \bar{t}]$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \widehat{t}$. Poichè ℓ è chiuso, $P = \varphi(\widehat{t}) \in \ell$. Il vettore $\varphi(\widehat{t})\varphi(t_k)$ è parallelo ad ℓ . Più precisamente, dividendo per $t_k - \widehat{t} \neq 0$, si ha

$$\nu_1 \frac{\varphi_1(t_k) - \varphi_1(\widehat{t})}{t_k - \widehat{t}} + \nu_2 \frac{\varphi_2(t_k) - \varphi_2(\widehat{t})}{t_k - \widehat{t}} = 0, \quad (\text{V.22})$$

per infiniti $k \in \mathbb{R}$. Dal fatto che $\varphi(t)$ è soluzione di (V.1) e dal teorema di Lagrange, segue che esistono dei θ_k, ρ_k compresi tra t_k e \widehat{t} tali che

$$\nu_1 \varphi_{1*}(\varphi_1(\theta_k), \varphi_2(\rho_k)) + \nu_2 \varphi_{2*}(\varphi_1(\theta_k), \varphi_2(\rho_k)) = 0, \quad (\text{V.23})$$

per infiniti $k \in \mathbb{R}$. Facendo tendere k ad infinito, si ottiene

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) = 0,$$

e quest'ultima equazione conduce a una contraddizione, giacché ℓ è un segmento trasversale e $P \in \ell$.

Abbiamo dimostrato che $A \cap \ell$ è un insieme finito e per $m \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere le relazioni (V.19) e (V.20). Senza perdita di generalità, con opportune traslazioni e rotazioni sul piano $O_{x_1 x_2}$ e tenendo conto che nella relazione (V.21) l'ordine è invariante rispetto alle traslazioni e rotazioni, possiamo supporre che per certi $\bar{b} > \underline{b} > 0$:

$$\ell = \{(0, x_2) : \underline{b} \leq x_2 \leq \bar{b}\}, \quad (\text{V.24})$$

$$A \cap \ell = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}, \quad (\text{V.25})$$

$$Q_j = (0, b_j) = \varphi(\tau_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad \tau_1 < \dots < \tau_m, \quad (\text{V.26})$$

dove $b_k \in [\underline{b}, \bar{b}]$ per $k = 1, \dots, m$. Per la simmetria rispetto all'origine e per il lemma precedente, possiamo supporre che le orbite intersechino ℓ in verso antiorario, cioè

$$\varphi_1(P) = \varphi_1(0, x_2) < 0, \quad P = (0, x_2) \in \ell. \quad (\text{V.27})$$

La relazione (V.21) diventa

$$b_1 - b_2, \quad b_2 - b_3, \quad \dots, \quad b_{m-1} - b_m, \quad (\text{V.28})$$

che presentano lo stesso segno.

Si possono avere due possibilità:

$\alpha)$ $b_1 > b_2$;

$\beta)$ $b_2 > b_1$.

Consideriamo il primo caso. Indichiamo con J la curva regolare di Jordan formata dall'arco:

$$\widehat{Q_1 Q_2} = \{x(t, \bar{x}) : t_1 \leq t \leq t_2\},$$

e del segmento $[Q_2 Q_1]$. Per il teorema della curva di Jordan, J divide il piano \mathbb{R}^2 in due componenti distinte, aventi entrambe J come frontiera, una delle quali è limitata e l'altra no. Cioè

$$\mathbb{R}^2 \setminus J = D_{int} \cup D_{ext}, \quad D_{int} \cap D_{ext} = \emptyset, \quad (\text{V.29})$$

dove D_{int} è la componente interna limitata e D_{ext} è la componente esterna illimitata. Inoltre, risulta che per ogni curva di Jordan S si ha

$$S \cap D_{int} \neq \emptyset, \quad S \cap D_{ext} \neq \emptyset \Rightarrow S \cap J \neq \emptyset. \quad (\text{V.30})$$

Dalla definizione di t_1 , l'arco $\{\varphi(t) : \underline{t} \leq t \leq t_1\}$ non interseca ℓ . L'arco $\{\varphi(t) : t_2 \leq t \leq \bar{t}\}$, per l'unicità delle soluzioni di (V.1), non può intersecare l'arco $\widehat{Q_1 Q_2}$. E non può intersecare il segmento $[Q_2 Q_1]$ per il lemma precedente. Ci rimane un'unica possibilità: il punto Q_3 deve essere contenuto in D_{int} , e, dunque, Q_2 si trova tra Q_1 e Q_3 . Si procede di pari passo per $m > 3$, fino a quando si arriva alla conclusione (V.21).

Se $Q_1 = Q_2$, l'orbita $\varphi(\bar{x})$ e l'arco \widehat{A} sono chiusi. Se, per assurdo, $\varphi(\bar{x})$ è chiusa e $\varphi(\bar{x}) \cap \ell$ è costituita da almeno due punti, allora gli argomenti utilizzati per la dimostrazione della relazione (V.21) mostrano che $\varphi(\bar{x})$ non è chiusa, e questa è una contraddizione. ■

Lemma V.9 *Se $\varphi^+ \cap L(\varphi^+) \neq \emptyset$, allora φ^+ è periodica e si ha*

$$\varphi^+ = L(\varphi^+).$$

Dimostrazione. Sia

$$P_1 = \varphi(t_1) \in \varphi^+ \cap L(\varphi^+), \quad t_1 > 0, \quad \varphi(t) = x(t, x^0). \quad (\text{V.31})$$

Se P_1 è un punto critico, vale $\varphi^+ = L(\varphi^+) = \{P_1\}$.

Supponiamo che P_1 sia regolare. Per il lemma V.7, esiste un segmento trasversale ℓ tale che $P_1 \in \ell$. Poichè $P_1 \in L(\varphi^+)$, dalla definizione di $L(\varphi^+)$ segue che per ogni $\delta > 0$ esiste \widehat{t} tale che

$$Q = \varphi(\widehat{t}) \in B_\delta(P_1), \quad \widehat{t} > t_1 + 2. \quad (\text{V.32})$$

Fissiamo Q . Sia $\varepsilon \in (0, 1)$ e si prenda δ tale che venga rispettata la parte iii) del lemma V.7, in modo che

$$\tilde{P} = \varphi(\tilde{t}) = x(\tilde{t} - \hat{t}, \varphi(\hat{t})) = x(\tilde{t} - \hat{t}, Q) \in \ell \cap \varphi^+ \cap B_\delta(P_1), \quad (\text{V.33})$$

dove $|\tilde{t} - \hat{t}| < \varepsilon < 1$.

Supponiamo che $\tilde{P} \neq P_1$. Allora l'arco $\widehat{P_1\tilde{P}}$, per il lemma precedente, interseca ℓ in un numero finito di punti, più precisamente, i punti successivi di possibili intersezioni con $\varphi(t)$, dove $t > \max\{\tilde{t}, \hat{t}\}$. Di conseguenza, possiamo trovare un numero positivo μ tale che

$$\|\varphi(t) - P_1\| \geq \mu, \quad t > \max\{\tilde{t}, \hat{t}\}. \quad (\text{V.34})$$

Questo, però, porta ad un assurdo, perché $P_1 \in L(\varphi^+)$. Quindi, $\tilde{P} = P_1$ e φ è periodica. ■

Gli argomenti utilizzati nella dimostrazione precedente mostrano che se ℓ è un segmento trasversale ed $\ell \cap L(\varphi^+) \neq \emptyset$, allora $\ell \cap L(\varphi^+)$ contiene un solo punto.

Lemma V.10 *Se $L(\varphi^+)$ contiene un'orbita periodica C , allora $C = L(\varphi^+)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $L(\varphi^+) \setminus C \neq \emptyset$. Poichè $L(\varphi^+)$ è connesso e compatto, $L(\varphi^+) \setminus C$ non è un insieme chiuso, il che implica l'esistenza di un punto $Q_0 \in C$, che è un punto di accumulazione per $L(\varphi^+) \setminus C$. Sia ℓ un segmento trasversale tale che $Q_0 \in \ell$. Ricordando la parte iii) del lemma V.7, possiamo trovare $\delta > 0$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e un punto

$$Q \in B_\delta(Q_0) \cap (L(\varphi^+) \setminus C),$$

tali che

$$\bar{Q} = x(\bar{t}, Q) \in \ell. \quad (\text{V.35})$$

Poichè $Q \in L(\varphi^+)$, dall'invarianza di $L(\varphi^+)$ segue che l'orbita $\varphi(Q)$ è data da

$$\varphi(Q) = \{x(t, Q) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Dalla relazione (V.31) si deduce che $\bar{Q} \in L(\varphi^+)$. L'unicità delle soluzioni di (V.1) e il fatto che $Q \notin C$ comportano

$$\varphi(Q) \cap C = \emptyset$$

e, in particolare, $\bar{Q} \neq Q_0$, e questo è assurdo. Quindi, deve essere $C = L(\varphi^+)$. ■

Torniamo ora alla dimostrazione del **Teorema di Poincaré-Bendixson**.

Dimostrazione. Se φ^+ è periodica, lo è anche $L(\varphi^+)$. Supponiamo che φ^+ non sia periodica. Per la limitatezza di φ^+ e per il primo teorema V.4 segue che $L(\varphi^+) \neq \emptyset$. Sappiamo, inoltre, che $L(\varphi^+)$ è compatto e, per ipotesi, che tutti i suoi punti sono regolari. Fissiamo $q_0 \in L(\varphi^+)$ e poniamo

$$\varphi_0 = \{x(t, Q) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{V.36})$$

Dall'invarianza di $L(\varphi^+)$ segue che $\varphi_0 \subset L(\varphi^+)$. Fissiamo $P_0 \in L(\varphi_0^+)$. Sia ℓ un segmento trasversale passante per P_0 . L'inclusione $L(\varphi_0^+) \subset L(\varphi^+)$ comporta

$$\ell \cap L(\varphi^+) = \{P_0\}. \quad (\text{V.37})$$

D'altra parte, poichè $P_0 \in L(\varphi_0^+)$, la parte iii) del lemma V.7 implica che $\varphi_0^+ \cap \ell \neq \emptyset$. Quindi, tenendo conto che $\varphi_0^+ \subset L(\varphi^+)$ e la relazione (V.37) si conclude che $\varphi_0^+ \cap \ell = \{P_0\}$. Per il Lemma V.9 e poichè $P_0 \in \varphi_0^+ \cap L(\varphi_0^+)$, φ_0^+ (e quindi φ_0) è periodica.

Essendo $\varphi_0 = L(\varphi_0^+)$ e utilizzando il lemma V.10, si conclude che $\varphi_0 = L(\varphi^+)$. ■

2 Applicazioni ai sistemi non lineari

1. Esempi di biforcazione. Consideriamo un sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

che dipende in modo continuo da un parametro μ . Al variare di μ , una soluzione (che dipende in modo continuo da μ) può spezzarsi in due soluzioni al oltrepassare del valore critico μ_0 di μ . In tal caso si dice che occorre una *biforcazione*.

Esempio V.11 Consideriamo il sistema dinamico per $x(t, \mu) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = 1 - 2(1 + \mu)x + x^2.$$

Tale sistema ha i punti critici $x \equiv \mu_{\pm} = 1 + \mu \pm [\mu(\mu + 2)]^{\frac{1}{2}}$ per $\mu \leq -2$ e per $\mu \geq 0$.⁴ Per $\mu \leq -2$ e per $\mu \geq 0$ le soluzioni sono le seguenti:

$$x(t) = \frac{x(0)[\mu_+ - \mu_- e^{(\mu_+ - \mu_-)t}] + [-1 + e^{(\mu_+ - \mu_-)t}]}{x(0)[1 - e^{(\mu_+ - \mu_-)t}] + [-\mu_- + \mu_+ e^{(\mu_+ - \mu_-)t}]}$$

⁴Per $\mu = 0$ e per $\mu = -2$ esiste solo un singolo punto di equilibrio [$x \equiv 1$ e $x \equiv -1$ rispettivamente, dove il corrispondente sistema linearizzato $\dot{x} = 0$. Poichè $\dot{x} = \pm 2[\mu(\mu + 2)]^{1/2}(x - \mu_{\pm}) + (x - \mu_{\pm})^2$, il teorema di Perron implica che μ_+ è un punto critico instabile e μ_- un punto critico asintoticamente stabile se $\mu < -2$ oppure $\mu > 0$.

Quindi per $\mu = 0$ e per $\mu = -2$ esistono biforcazioni. Si osservi che $x(t) \rightarrow \mu_-$ se $t \rightarrow +\infty$ e $x(0) \neq \mu_+$. Per $-2 < \mu < 0$ la soluzione ha la forma

$$x(t) = 1 + \mu + \sqrt{-\mu(\mu + 2)} \tan(c + t\sqrt{-\mu(\mu + 2)}),$$

dove $\tan(c) = \frac{x(0)-1-\mu}{\sqrt{-\mu(\mu+2)}}$; quindi essa non esiste globalmente nel tempo. \square

Esempio V.12 Consideriamo

$$\dot{x}(t) = \mu - x^2.$$

In tal caso

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mu} \frac{x(0)[1 + e^{-2t\sqrt{\mu}}] + \sqrt{\mu} [1 - e^{-2t\sqrt{\mu}}]}{x(0)[1 - e^{-2t\sqrt{\mu}}] + \sqrt{\mu} [1 + e^{-2t\sqrt{\mu}}]}, & \mu > 0, \\ \frac{x(0)}{1 + tx(0)}, & \mu = 0, \\ \frac{\sqrt{-\mu} \frac{x(0) - \sqrt{-\mu} \tan[t\sqrt{-\mu}]}{\sqrt{-\mu} + x(0) \tan[t\sqrt{-\mu}]}, & \mu < 0. \end{cases}$$

Per $\mu < 0$ la soluzione $x(t)$ esiste soltanto in un intervallo temporale di lunghezza $< (\pi/|\mu|)$, poichè

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \mu^2} = \frac{\pi}{|\mu|};$$

quindi per $\mu < 0$ non ci sono punti di equilibrio e non si possono prendere in considerazione le orbite per $t \rightarrow +\infty$.

Per $\mu = 0$ c'è un singolo punto di equilibrio asintoticamente stabile $x = 0$. Per $\mu > 0$ ci sono i due punti di equilibrio $\pm\sqrt{\mu}$, dove è asintoticamente stabile $x = \sqrt{\mu}$ e instabile $x = -\sqrt{\mu}$. \square

Esempio V.13 Consideriamo

$$\dot{x}(t) = \mu x - bx^3,$$

dove $\mu \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. In tal caso

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x(0)\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu e^{-2\mu t} + bx(0)^2[1 - e^{-2\mu t}]}}, & \mu > 0, \\ \frac{x(0)}{\sqrt{1 + 2bx(0)^2t}}, & \mu = 0, \\ \frac{x(0)\sqrt{-\mu} e^{\mu t}}{\sqrt{-\mu + bx(0)^2[1 - e^{2\mu t}]}}, & \mu < 0. \end{cases}$$

Quindi $x(t) \rightarrow \text{sgn}[x(0)]\sqrt{\mu/b}$ se $\mu > 0$, e $x(t) \rightarrow 0$ se $\mu \leq 0$. Per $\mu \leq 0$ c'è il singolo punto di equilibrio $x = 0$ asintoticamente stabile, mentre per $\mu > 0$ sono asintoticamente stabili i punti di equilibrio $\pm\sqrt{\mu/b}$ e è instabile l'origine. \square

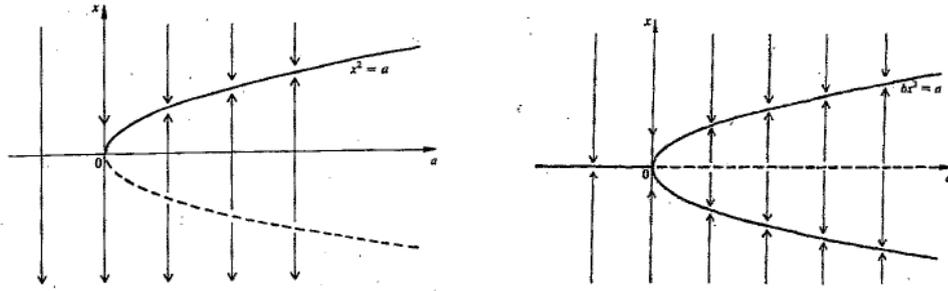


Figura V.2: Diagrammi di biforcazione per $\dot{x}(t) = \mu - x^2$ e per $\dot{x}(t) = \mu x - b x^3$ con $b > 0$. Le curve solide indicano i punti di equilibrio asintoticamente stabili, mentre le curve tratteggiate indicano quelli instabili.

Interessiamoci ora della perdita di stabilità di uno punto di equilibrio x_0 di un sistema dinamico al variare del parametro μ , dove, al variare di μ , una coppia di autovalori complessi coniugati della matrice principale del corrispondente sistema linearizzato attraversa l'asse immaginario. In tal caso, al variare di μ , può avvenire uno dei seguenti due modi:

- a) Il punto stato di equilibrio genera un ciclo limite [cioè, un'orbita chiusa ed isolata sulla quale, almeno localmente, le altre traiettorie si avvolgono a spirale] e diventa instabile.
- b) Un ciclo limite instabile scompare convertendosi in un punto di equilibrio; allo stesso momento il bacino di attrazione del punto di equilibrio si riduce a nulla insieme con il ciclo, che, infine, scompare, trasferendo la sua instabilità al punto di equilibrio.

Nel caso a), dopo la perdita di stabilità, si ha un fenomeno oscillatorio periodico e l'ampiezza di oscillazione è proporzionale alla radice quadrata della criticità, cioè la differenza tra il valore del parametro e il suo valore critico in cui l'equilibrio perde la sua stabilità. Poiché questo comportamento oscillatorio differisce di poco dallo stato di equilibrio, la perdita di stabilità è detta *soffice*. Nel caso b), invece, la perdita di stabilità è detta *dura*, poiché, prima che si verifichi, il bacino di attrazione diventa piccolo e le perturbazioni generate tendono ad allontanare il sistema da questo bacino, ancor prima che il bacino stesso sia sparito.

Le nuove condizioni rappresentanti il sistema, dopo la perdita di stabilità, prendono il nome di *attrattori*, dal momento che diventano dei centri di attrazione per stati iniziali temporanei. Le graduali perdite di stabilità a favore della nascita di un ciclo limite sono chiamate *biforcazioni di Hopf*. L'esempio più famoso riguarda l'equazione di Van der Pol [da discutere tra poco]. Trattiamo ora un esempio più elementare di una biforcazione di Hopf.

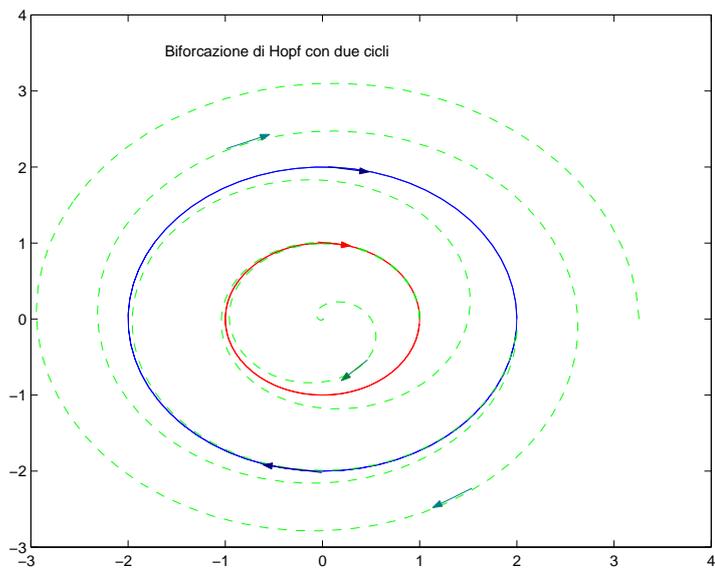


Figura V.3: Biforcazione di Hopf con due cicli.

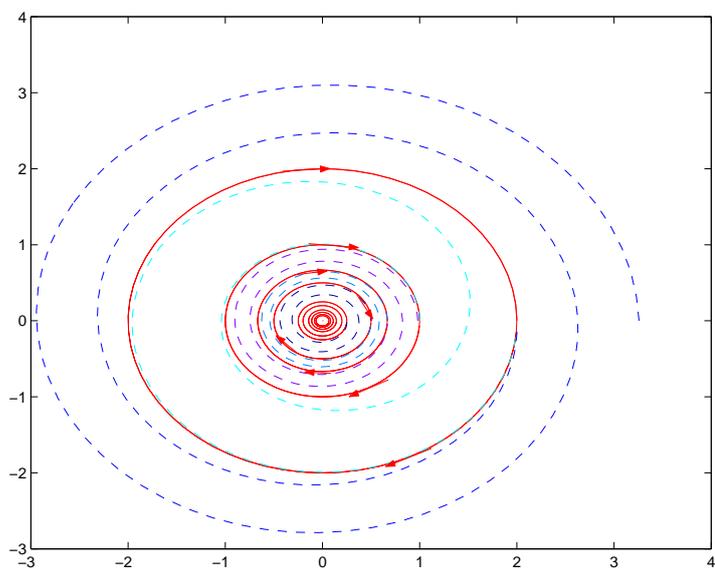


Figura V.4: Cicli che si stringono intorno all'origine.

Esempio V.14 Determiniamo il ritratto delle fasi del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = -x + y(\mu - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. Troviamo il punto critico del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y + x(\mu - x^2 - y^2) = 0, \\ -x + y(\mu - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = -x(\mu - x^2 - y^2), \\ -x - x(\mu - x^2 - y^2)^2 = 0 \end{cases}$$

e, dunque, $(0, 0)$ è l'unico punto critico del sistema.

Passando alle coordinate polari in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

Una traiettoria particolare è data da $\rho = 0$, che rappresenta l'origine. Se $\rho = \sqrt{\mu}$, dove $\mu > 0$, essa rappresenta la circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt{\mu}$.

Le soluzioni del sistema sono

- $\mu < 0$ $\begin{cases} \rho(t) = \frac{\rho(0)\sqrt{-\mu}}{\sqrt{[\rho(0)^2 - \mu]e^{-2\mu t} - \rho(0)^2}} \rightarrow 0, & t \rightarrow +\infty, \\ \theta(t) = -t + \theta(0), \end{cases}$
- $\mu = 0$ $\begin{cases} \rho(t) = \frac{\rho(0)}{\sqrt{1+2t\rho(0)^2}} \rightarrow 0, & t \rightarrow +\infty, \\ \theta(t) = -t + \theta(0), \end{cases}$
- $\mu > 0$ $\begin{cases} \rho(t) = \frac{\rho(0)\sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho(0)^2[1-e^{-2\mu t}] + \mu e^{-2\mu t}}} \rightarrow \sqrt{\mu}, & t \rightarrow +\infty, \\ \theta(t) = -t + \theta(0). \end{cases}$

Studiamo ora la stabilità. La matrice jacobiana del sistema (V.38) è

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = \mu^2 + 1, \quad \text{Tr } A = 2\mu, \quad \Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4\det(A) = -4 < 0.$$

Risulta, pertanto, che se $\mu < 0$, l'origine è un fuoco stabile, con bacino di attrazione \mathbb{R}^2 . Se $\mu = 0$, l'origine è un centro, che, degenerando nella spirale del fuoco instabile al crescere di μ , diventa un ciclo limite. Se $\mu > 0$, $(0, 0)$ è un fuoco instabile. Le orbite delle soluzioni sono delle spirali che per $t \rightarrow +\infty$, tendono indefinitamente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = \mu$.

Più generalmente, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon x f(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y f(x^2 + y^2), \end{cases}$$

dove $f \in C^k([0, +\infty[; \mathbb{R})$, $k \geq 1$, $f(0) = a$ ed ε è un piccolo parametro reale. È facile verificare che l'unico punto critico del sistema risulta essere l'origine $(0, 0)$. Passando alle coordinate polari in \mathbb{R}^2 , otteniamo

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho f(\rho^2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

Poniamo

$$N_f = \{z : z \geq 0, z f(z) = 0\}.$$

Dunque, se $z \in N_f$ e $z > 0$ allora il sistema precedente ammette una soluzione periodica, cioè un ciclo definito dalla relazione $\rho^2 = x^2 + y^2 = z$, ovvero la circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio \sqrt{z} se $\varepsilon \neq 0$, giacché $\varepsilon = 0$ rappresenta il valore di biforcazione.

Supponiamo che N_f sia finito, cioè

$$N_f = \{z_0, z_1, \dots, z_N\}, \quad 0 = z_0 < \dots < z_N,$$

per un certo numero naturale N . In tal caso il sistema ammette esattamente N cicli definiti dalle circonferenze $\rho^2 = x^2 + y^2 = z_j$, $j = 1, \dots, N$. Se $N = 0$ non esistono cicli. Il ritratto delle fasi dipende dal segno di ε e di $f(z)$ negli intervalli (z_j, z_{j+1}) , dove $j = 0, \dots, N - 1$, se $N \geq 1$.

2. Equazione di Van der Pol. Consideriamo l'equazione

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \quad (\varepsilon > 0), \quad (\text{V.39})$$

che può essere pensata come perturbazione dell'oscillatore armonico $\ddot{y} + y = 0$, mediante il termine $\varepsilon(y^2 - 1)$. Considerando l'energia

$$E(y, \dot{y}) = \frac{(\dot{y})^2 + y^2}{2},$$

si vede che

$$\frac{d}{dt}E(y(t), \dot{y}(t)) = \dot{y}\ddot{y} + y\dot{y} = \dot{y}[\varepsilon(1 - y^2)\dot{y} - y] + y\dot{y} = \varepsilon(1 - y^2)(\dot{y})^2. \quad (\text{V.40})$$

Quest'ultima espressione mostra come il sistema dissipi energia quando $|y| > 1$, mentre fornisce energia quando $|y| < 1$.

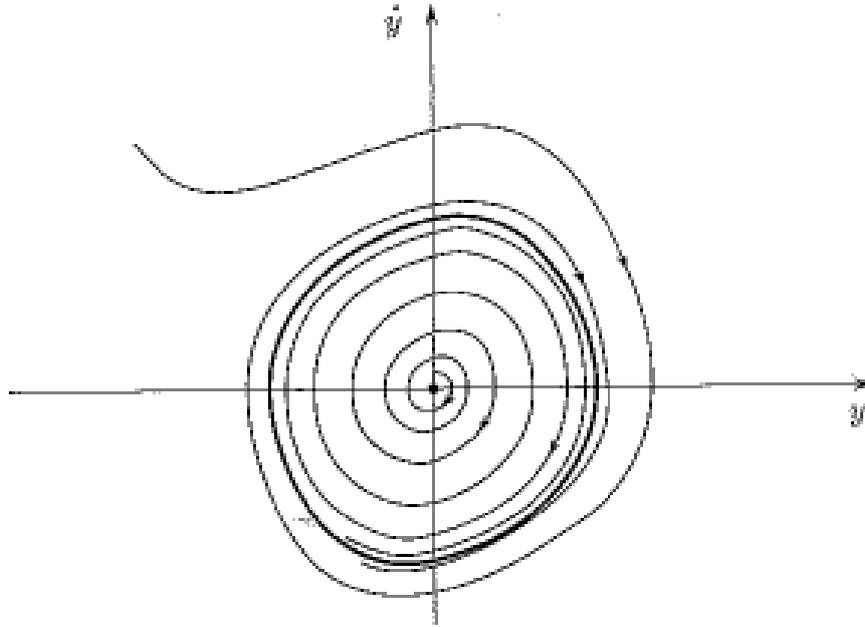


Figura V.5: Orbite nel piano delle fasi per l'equazione di Van der Pol (Balthasar van der Pol [1889-1959]) con $\varepsilon = 2$. La linea spessa indica l'unica orbita chiusa [26, 8].

Seguendo un suggerimento di Liénard [1869-1958], il sistema (V.39) diventa

$$\begin{cases} \dot{y} = z - \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y), \\ \dot{z} = -y. \end{cases} \quad (\text{V.41})$$

La corrispondenza $(y, \dot{y}) \leftrightarrow (y, z)$ tra i punti dei due piani è biunivoca e regolare, cosicché punti di equilibrio ed orbite si corrispondono nei due piani. Il punto di equilibrio è $(0, 0)$. Provando a linearizzare, otteniamo

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon y + z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases} \quad (\text{V.42})$$

Al precedente sistema è associata la matrice $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\text{Tr } A = \varepsilon > 0$, $\det(A) = 1 > 0$, $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det(A) < 0$, per $\varepsilon \in (0, 2)$ l'origine è un fuoco instabile e le orbite che partono da un suo intorno si allontanano da essa muovendosi su una spirale.

Dimostriamo ora che esiste un unico ciclo stabile, ossia che ogni traiettoria diversa da $(0, 0)$ tende, per $t \rightarrow +\infty$, ad avvolgersi su di esso. Consideriamo il campo vettoriale associato al sistema (V.41):

$$[z - F(y)] dy - y dz,$$

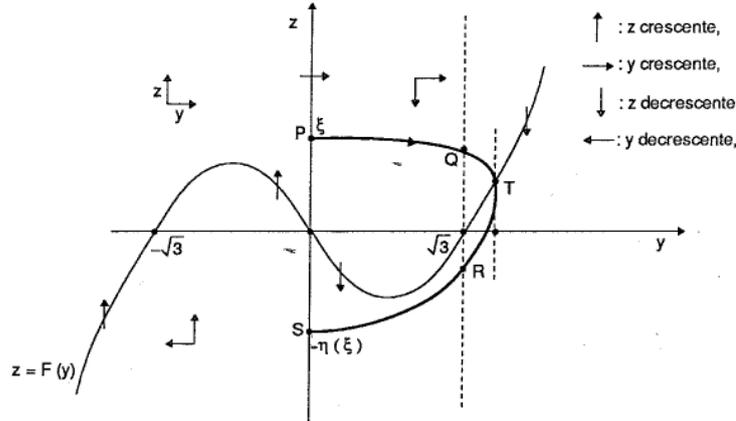


Figura V.6: Dimostrazione dell'esistenza di una soluzione periodica dell'equazione di Van der Pol [26].

essendo $F(y) = \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y)$. L'equazione differenziale che descrive la famiglia di traiettorie è data da

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z - F(y)}. \quad (\text{V.43})$$

La sostituzione $z \rightarrow -z$ e $y \rightarrow -y$ lascia invariata l'equazione (V.43), essendo dispari la funzione $F(y)$. Facendo partire l'orbita da un punto $P = (0, \xi)$, dopo un tempo finito essa interseca la cubica $z = F(y)$ in un punto T . Mentre la variabile y decresce, l'orbita interseca l'asse z in un punto $S = (0, -\eta(\xi))$, dove $\eta(\xi) > 0$. Ora, se esiste $\xi > 0$ tale che $\eta(\xi) = \xi$, allora si ottiene simmetricamente rispetto all'origine un'altra orbita che si salda con la precedente, dando luogo ad una nuova orbita chiusa. Poichè tutte le orbite chiuse si avvolgono intorno all'origine, i punti fissi dell'applicazione $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ sono in corrispondenza biunivoca con le orbite chiuse.

Dimostriamo l'unicità di questi punti fissi. Consideriamo la funzione di Liapunov $V(y, z) = y^2 + z^2$ e chiamiamo φ_ξ il tratto di orbita compreso tra $(0, \xi)$ e $(0, -\eta(\xi))$, e τ il relativo tempo di percorrenza. Abbiamo

$$\delta(\xi) = \eta(\xi)^2 - \xi^2 = \int_0^\tau \frac{dV}{dt} dt = 2 \int_0^\tau (y\dot{y} + z\dot{z}) dt = -2 \int_0^\tau yF(y) dt. \quad (\text{V.44})$$

Dimostriamo le seguenti proprietà:

- i) $\delta(\xi) > 0$ nei punti vicino l'origine;
- ii) $\delta(\xi)$ è strettamente decrescente;
- iii) $\delta(\xi) \rightarrow -\infty$ per $\xi \rightarrow +\infty$.

Il verificarsi di queste proprietà ci assicura l'esistenza di un unico punto $\bar{\xi}$ tale che $\delta(\bar{\xi}) = 0$, cioè $\bar{\xi} = \eta(\bar{\xi})$. Dimostriamo ora i)-iii).

- i) Se ξ è nelle vicinanze dell'origine, il punto T si trova nel tratto in cui $y > 0$ e la funzione $z = F(y)$ è negativa. Dalla (V.44) segue che $\delta(\xi) > 0$.
- ii) Usando l'espressione (V.43), possiamo scrivere

$$F(y)dz = -\frac{yF(y)}{z - F(y)}dy. \quad (\text{V.45})$$

Inoltre:

$$\int_{\varphi_\xi} F(y)dz = \int_{\widehat{PQ}} \dots + \int_{\widehat{QR}} \dots + \int_{\widehat{RS}} \dots. \quad (\text{V.46})$$

Al crescere di ξ , \widehat{PQ} aumenta di quota, mentre \widehat{RS} si abbassa. Cioè $z - F(y)$ aumenta in modulo in questi tratti, mentre $yF(y)$ resta negativo. Poiché $F(y)dz > 0$, il contributo di \widehat{PQ} e \widehat{RS} all'espressione (V.46) deve diminuire. Sul tratto \widehat{QR} , F è positiva e strettamente crescente e $dz < 0$. Dunque, al crescere di ξ , l'integrale $\int_{\widehat{QR}} F(y)dz$ diminuisce.

- iii) Consideriamo il tratto di orbita \widehat{QR} . Sia N il punto di intersezione del tratto con l'asse y . Allora

$$\int_{\widehat{QR}} F(y) dz = - \int_{\widehat{NQ}} F(y) dz + \int_{\widehat{NR}} F(y) dz. \quad (\text{V.47})$$

Il secondo integrale nella parte a destra di (V.47) è negativo, poichè $F(y) \geq 0$ e l'integrazione è diretta verso valori negativi di z . Quindi

$$\int_{\widehat{QR}} F(y)dz \leq \int_{\widehat{NQ}} F(y)dz.$$

Poiché la lunghezza del tratto \widehat{NQ} tende a $+\infty$ se $\xi \rightarrow +\infty$, si ha $\int_{\widehat{QR}} F(y)dz \rightarrow -\infty$ se $\xi \rightarrow +\infty$.

3. Modello logistico. Partiamo dalla seguente equazione alle derivate parziali, nota come *equazione di Burgers*:

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \quad (\text{V.48})$$

Ponendo $u(x, t) = v(x + ct)$, dove $c > 0$, si ottiene

$$c\dot{v} = \ddot{v} + v\dot{v},$$

che possiamo scrivere anche nel seguente modo:

$$(cv)' = \frac{d}{dt}(\dot{v} + \frac{1}{2}v^2).$$

Da quest'ultima equazione si ottiene

$$cv = \dot{v} + \frac{1}{2}v^2,$$

ossia⁵

$$\dot{v} = cv \left(1 - \frac{v}{2c}\right).$$

La soluzione del corrispondente problema di Cauchy è la seguente:

$$v(t) = \frac{2cv(0)}{[1 - e^{-4c^3t}]v(0) + 2ce^{-4c^3t}}.$$

e le due soluzioni costanti $v = 0$ e $v = 2c$. Si vede subito che $v(t) \rightarrow 2c$ per $v(0) \neq 0$. Quindi il punto di equilibrio $2c$ è asintoticamente stabile e quello $v = 0$ è instabile.

In modo analogo discutiamo l'equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo

$$\dot{y} = ay(1 - by), \quad a, b > 0. \quad (\text{V.49})$$

Le rette $y = 0$ e $y = (1/b)$ sono le due soluzioni costanti. Le altre soluzioni si trovano integrando nel seguente modo:

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a dt \rightsquigarrow \log \left| \frac{y}{1 - by} \right| = at + c,$$

ossia

$$y(t) = \frac{y(0)}{by(0) + [1 - by(0)]e^{-at}}.$$

Questa espressione è la soluzione del modello logistico proposto nel 1845 dal matematico Pierre Verhulst (1804-1849). Lo scopo di questo modello è la determinazione del tasso di crescita relativo della popolazione, nell'ipotesi in cui gli unici fattori di evoluzione siano la fertilità e la mortalità. Siano, dunque, $N(t)$ il numero di individui presenti all'istante t ; λ il numero di neonati per individuo nell'unità di tempo; μ la percentuale di individui che muore nell'unità di tempo. Indichiamo, inoltre, con $\varepsilon = \lambda - \mu$ il potenziale biologico della popolazione e con k le risorse dell'ambiente. La legge di evoluzione di Verhulst è data dall'equazione (V.49), in cui si pone $a = \varepsilon$, $b = (1/k)$ e $y = N$, cioè

$$\dot{N}(t) = \varepsilon N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \quad \varepsilon, k > 0. \quad (\text{V.50})$$

⁵Mettendo $cv = \dot{v} + \frac{1}{2}v^2 + d$ per un'opportuna costante d , si arrivano ad altre soluzioni.

Il termine $\varepsilon N(t)$, che modella la crescita esponenziale della popolazione [secondo la legge di Malthus (1798)], è mitigato dal termine $-\frac{\varepsilon}{k}N(t)^2$, che descrive la competizione all'interno della popolazione. La soluzione è, dunque, data da

$$N(t) = \frac{kN(0)}{N(0)[1 - e^{-\varepsilon t}] + ke^{-\varepsilon t}}. \quad (\text{V.51})$$

Per $t \rightarrow +\infty$, $N(t) \rightarrow k$, tranne nel caso $N(0) = 0$.

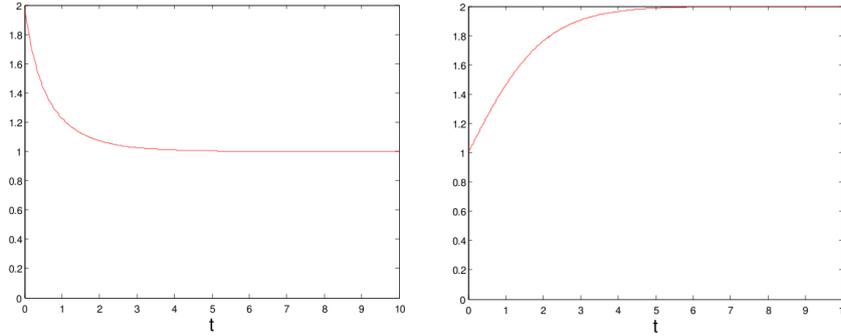


Figura V.7: Le soluzioni $N(t)$ del modello di Verhulst per $N(0) = 2$, $k = 1$ e $\varepsilon = 1$ [grafico sinistro] e per $N(0) = 1$, $k = 2$ e $\varepsilon = 1$ [grafico destro].

4. Oscillatore di Lorenz. Consideriamo il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = \sigma(y - x), \quad (\text{V.52a})$$

$$\dot{y}(t) = x(\rho - z) - y, \quad (\text{V.52b})$$

$$\dot{z}(t) = xy - \beta z, \quad (\text{V.52c})$$

dove $\sigma > 0$ si dice numero di Prandtl, $\rho > 0$ si dice numero di Rayleigh e $\beta > 0$ è una terza costante fisica positiva. L'oscillatore di Lorenz [33, Cap. 14] è un sistema dinamico di flusso caotico. Tale sistema fu proposto da Edward Lorenz [1917–2008] nel 1963, semplificando le equazioni di Boussinesq che descrivono le convezioni nell'atmosfera sotto condizioni di riscaldamento da sotto e raffreddamento da sopra.

L'oscillatore di Lorenz ha alcune proprietà elementari:

- a. Se $(-x, -y, z)$ è soluzione, lo è anche (x, y, z) .
- b. Per $x = y = 0$ le equazioni (V.52a) e (V.52b) diventano tautologie ($0 = 0$), mentre $\dot{z}(t) = -\beta z$. Quindi $x = y = 0$ e $z(t) = z(0)e^{-\beta t}$ è soluzione delle (V.52).

c. Vale la seguente disuguaglianza:

$$\nabla \cdot (\sigma[y - x], x[\rho - z] - y, xy - \beta z) = -(\sigma + 1 + \beta) < 0.$$

Dunque, considerando un volume iniziale $v(0)$ che evolve nel tempo, all'istante t il volume $v(t)$ è descritto dalla seguente legge:

$$\dot{v}(t) = -(\sigma + 1 + \beta)v(t). \quad (\text{V.53})$$

In altre parole, il volume $v(t)$ è decrescente nel tempo t e quindi il flusso descritto dalle (V.52) è dissipativo. La (V.53) implica che qualunque attrattore del sistema dinamico (V.52) ha volume zero.

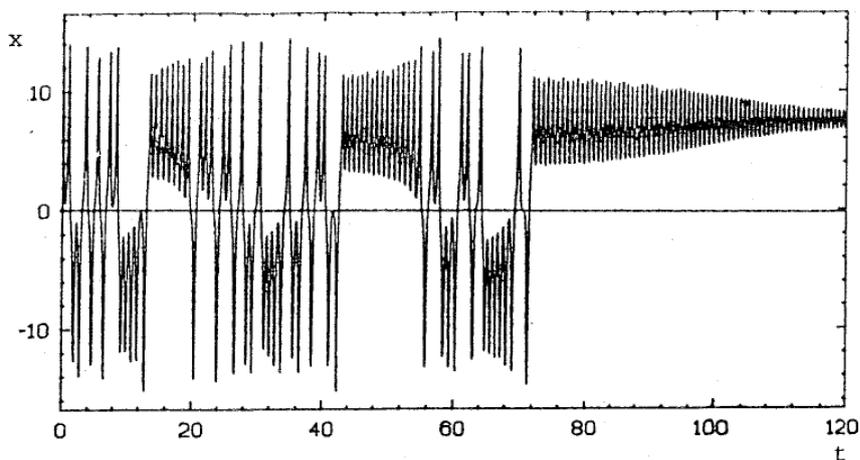


Figura V.8: $x(t)$ per $\sigma = 10$, $\beta = (8/3)$ e $\rho = 22.4$. Osserviamo che $1 < \rho < \rho_H \approx 24.74$ e $x(t) \rightarrow \sqrt{\beta(\rho - 1)} \approx 7.55$ (Vedi [33, Fig. 14.2]).

Calcoliamo ora i punti di equilibrio (X, Y, Z) per cui $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = \dot{z}(t) = 0$. In tal caso $X = Y$. Quindi $X = Y = Z = 0$ oppure $Z = \rho - 1$ e $X^2 = Y^2 = \beta(\rho - 1)$. In altre parole, per $0 < \rho \leq 1$ il punto $(0, 0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio. Per $\rho > 1$ abbiamo inoltre i due punti $(\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$. La matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

ha tre autovalori negativi per $x = y = z = 0$ se $0 < \rho < 1$. Di conseguenza, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile delle (V.52) se $0 < \rho < 1$. Per $\rho = 1$ gli autovalori sono $-\beta$, $-(\sigma + 1)$ e 0 e quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile se $\rho = 1$. Per $\rho > 1$ la matrice Jacobiana per $x = y = z = 0$ ha

due autovalori negativi e uno positivo, e quindi l'origine è un punto di equilibrio instabile se $\rho > 1$.

Negli altri due punti di equilibrio il polinomio caratteristico della matrice Jacobiana ha la forma

$$p(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^3 + (\sigma + 1 + \beta)z^2 + \beta(\sigma + \rho)z + 2\sigma\beta(\rho - 1).$$

Fattorizzando il polinomio, $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, si scopre che

$$z_1 + z_2 + z_3 = -(\sigma + 1 + \beta) < 0, \quad (\text{V.54a})$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \beta(\sigma + \rho) > 0, \quad (\text{V.54b})$$

$$z_1z_2z_3 = -2\sigma\beta(\rho - 1), \quad (\text{V.54c})$$

quest'ultimo se $\rho > 1$. Inoltre, $p(z) > 0$ per $z \geq 0$; di conseguenza, se ci sono zeri con parte reale non negativa, essi devono per forza essere due complessi coniugati più uno zero negativo. Se, per un opportuno $\rho = \rho_H > 1$, due degli zeri sono uguali a $z_{1,2} = \pm i\omega$ con $\omega > 0$, allora il terzo zero deve valere $z_3 = -(\sigma + 1 + \beta)$, poichè la loro somma vale $-(\sigma + 1 + \beta)$ [vedi la (V.54a)]. Dalle (V.54a)-(V.54b) segue in tal caso

$$z_1z_2 = \omega^2 = \frac{2\sigma\beta(\rho_H - 1)}{\sigma + 1 + \beta} = \beta(\sigma + \rho_H),$$

e quindi $\rho_H = [\sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)]$. Di conseguenza, per $\rho = \rho_H$ c'è una biforcazione di Hopf. Per $\rho = 1$ gli zeri sono $\{0, -\beta, -(\sigma + 1)\}$, mentre al crescere di ρ gli zeri si cambiano in modo continuo e hanno un prodotto $z_1z_2z_3 < 0$. Ciò implica che per

$$1 < \rho < \rho_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1},$$

tutti e tre zeri del polinomio hanno parte reale negativa e quindi i due punti di equilibrio sono ambedue asintoticamente stabili. Per $\rho > \rho_H$ il polinomio ha un autovalore negativo e due autovalori con parti reali positivi; in tal caso i due punti di equilibrio sono instabili.⁶ Infatti, utilizzando che

$$p'(z) = 3z^2 + 2(\sigma + 1 + \beta)z + \beta(\sigma + \rho),$$

si trova per il suo discriminante $4(\sigma + 1 + \beta)^2 - 12\beta(\sigma + \rho)$. Quest'ultima espressione tende a $-\infty$ in modo monotono se $\rho \rightarrow +\infty$. Quindi per ρ abbastanza grande ci risultano uno zero negativo e due zeri complessi coniugati. Se esistesse un $\rho > \rho_H$ per cui tutti gli zeri sono negativi, esisterebbe un ρ più grande (e

⁶Quest'ultimo fatto si può dimostrare usando il Teorema di Routh-Hurwicz [17, Sec. XV.6].

quindi $> \rho_H$) per cui ci sono due zeri immaginari, una contraddizione. Di conseguenza, per $\rho > \rho_H$ ci sono uno zero negativo e due zeri complessi coniugati con parte reale positiva.

Consideriamo ora la funzione di Liapunov

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2} (\rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2). \quad (\text{V.55})$$

In tal caso

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= \rho x \dot{x} + \sigma y \dot{y} + \sigma(z - 2\rho) \dot{z} \\ &= \rho x [\sigma(y - x)] + \sigma y [x(\rho - z) - y] + \sigma(z - 2\rho) [xy - \beta z] \\ &= -\sigma \{ \rho x^2 + y^2 + \beta(z - \rho)^2 - \beta \rho^2 \} \\ &= -\sigma \beta \rho^2 \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{\rho\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{z - \rho}{\rho} \right)^2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sia m il massimo della funzione di Liapunov H nell'ellissoide

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{\sqrt{\rho\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{z - \rho}{\rho} \right)^2 \leq 1 \right\} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dot{H}(t) \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Un tale massimo viene assunto sulla frontiera ∂E .⁷ Partendo dal punto iniziale $\vec{x}(0)$ con $H(\vec{x}(0)) > m$ [cioè, $\vec{x}(0) \notin E$], il valore della H deve scendere lungo l'orbita. Ad un opportuno istante $t_0 > 0$ l'orbita attraversa la frontiera dell'ellissoide E e da quel momento in poi l'orbita ci resta dentro. In altre parole, il flusso ha un attrattore (di volume zero) che si trova all'interno dell'ellissoide E (ma può avere una struttura estremamente complicata). Osserviamo che i tre punti di equilibrio $(0, 0, 0)$ e, per $\rho > 1$, $(\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$, appartengono alla frontiera di E .

⁷Nell'unico punto in \mathbb{R}^3 in cui si annulla il gradiente della H , cioè in $(0, 0, 2\rho)$, la matrice Hessiana ha tre autovalori positivi. Quindi quel punto critico è il minimo assoluto della H in E . Per esercizio si verifichi che il minimo assunto nell'origine è $m = 2\sigma\rho^2$.

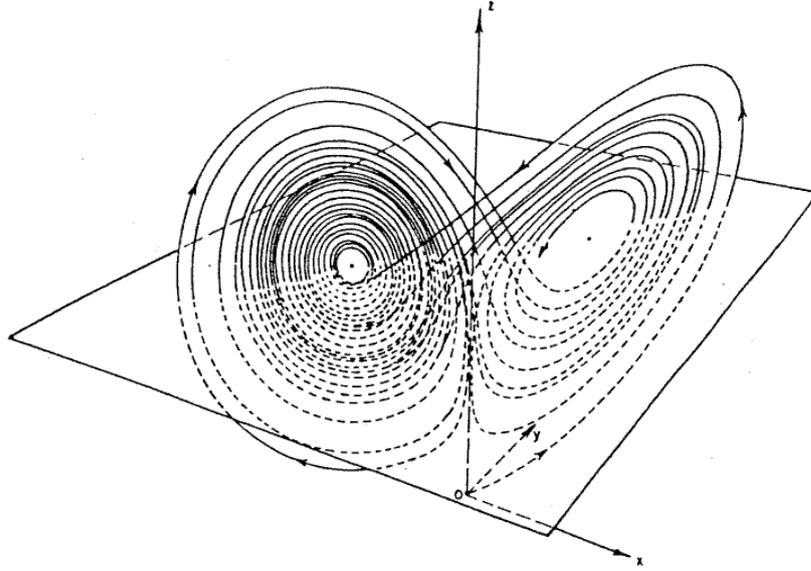


Figura V.9: $\vec{x}(t)$ per $\sigma = 10$, $\beta = (8/3)$ e $\rho = 28$. Osserviamo che $\rho > \rho_H \approx 24.74$ e che $\vec{x}(t)$ si comporta in modo caotico (Vedi [33, Fig. 14.1]). La stessa figura, a colore, si trova in Wikipedia (inglese) sotto la voce Lorenz attractor.

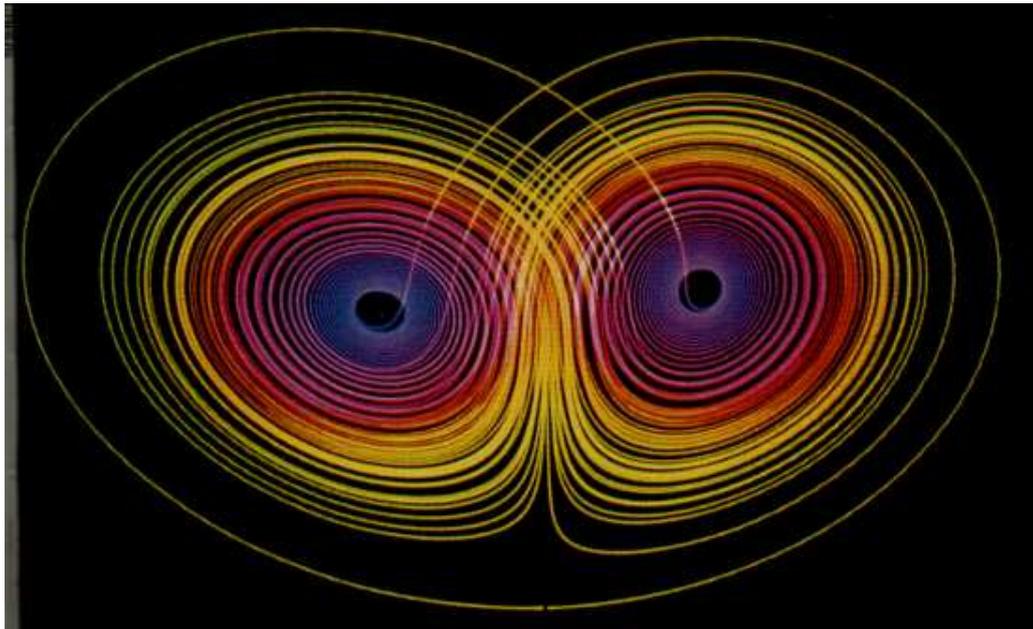


Figura V.10: L'attrattore di Lorenz [18].

Capitolo VI

Frattali

1 Insieme di Cantor e le sue varianti

Il frattale prototipico è l'*insieme di Cantor*.¹ Questo sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$ viene costruito nel seguente modo:

$$\begin{aligned}K_0 &= [0, 1], \\K_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \\K_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \\K_3 &= [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1],\end{aligned}$$

ecc. Quindi K_n è l'unione disgiunta di 2^n sottointervalli di $[0, 1]$, tutti di lunghezza $(\frac{1}{3})^n$. Dunque la misura di K_n vale $(\frac{2}{3})^n$. Se K_n è l'unione degli intervalli $[a_j, b_j]$, allora K_{n+1} è l'unione degli intervalli

$$[a_j, \frac{2}{3}a_j + \frac{1}{3}b_j] \cup [\frac{1}{3}a_j + \frac{2}{3}b_j, b_j].$$

In altre parole, da ogni intervallo costituente di K_n si rimuove esattamente la sua terza parte centrata per ottenere due intervalli costituenti di K_{n+1} . È chiaro che

$$[0, 1] = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots,$$

cioè gli insiemi K_n costituiscono una successione decrescente. La sua intersezione, K , non è vuota (poiché contiene gli estremi di tutti i sottointervalli costituenti di tutti i K_n) e si chiama l'insieme di Cantor. Ovviamente, la misura di K è minore o uguale a $(\frac{2}{3})^n$ per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$, quindi l'insieme di Cantor ha misura uguale a zero.

¹Publicato da Georg Cantor [1845–1918] nel 1883.

Ogni numero in $[0, 1]$ può essere rappresentato nel sistema ternario nella forma

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n},$$

dove $d_n \in \{0, 1, 2\}$ per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$. La non unicità dello sviluppo ternario risulta evidente dalle seguenti rappresentazioni ternarie dello stesso numero:

$$x = \begin{cases} 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} d_m 00000 \dots = \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{3^n}, \\ 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} (d_m - 1) 2222 \dots = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{d_n}{3^n} + \frac{d_m - 1}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}, \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

dove $d_m \in \{1, 2\}$. In tal caso K_1 consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ con primo "decimale" $d_1 \in \{0, 2\}$. L'insieme K_2 consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ con primi due "decimali" $d_1, d_2 \in \{0, 2\}$, ecc. L'insieme K_n consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ con primi n "decimali" $d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}$. Di conseguenza, l'insieme di Cantor consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ per cui nello sviluppo ternario manca la cifra 1. I numeri con rappresentazione ternaria ambigua nel senso della (VI.1) sono esattamente gli estremi degli intervalli che costituiscono gli insiemi K_n .

L'insieme di Cantor non è numerabile, cioè esso non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Infatti, consideriamo la funzione ϕ che associa al numero (ternario) x il numero (binario) $\phi(x)$ ottenuto cambiando la cifra ternaria 2 nella cifra binaria 1 e la cifra ternaria 0 nella binaria 0. Cioè, sia

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \in K,$$

dove $d_n = 0$ o $d_n = 2$ per $n = 1, 2, 3, \dots$, allora, ponendo

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} d_n}{2^n},$$

otteniamo il corrispondente numero $\phi(x)$. I due estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione degli insiemi K_n hanno le rappresentazioni ternarie

$$\begin{aligned} x &= 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 100000 \dots = 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 022222 \dots, \\ y &= 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 200000 \dots, \end{aligned}$$

dove $d_1, \dots, d_{m-1} \in \{0, 2\}$. In tal caso abbiamo nella rappresentazione binaria

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \dots \frac{d_{m-1}}{2} 011111 \dots, \\ \phi(y) &= 0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \dots \frac{d_{m-1}}{2} 100000 \dots \end{aligned}$$

Quindi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}d_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}d_n}{2^n} + \frac{1}{2^m} = \phi(y).$$

In altre parole, gli estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione degli insiemi K_n hanno la stessa immagine sotto la mappa ϕ . Di conseguenza, ϕ è una funzione continua non decrescente, mentre $\phi(K) = [0, 1]$. La mappa ϕ è biunivoca tranne negli estremi dello stesso intervallo tolto (dove è due a uno). Quindi l'insieme di Cantor K e l'intervallo $[0, 1]$ hanno la stessa cardinalità, cioè K non è numerabile.

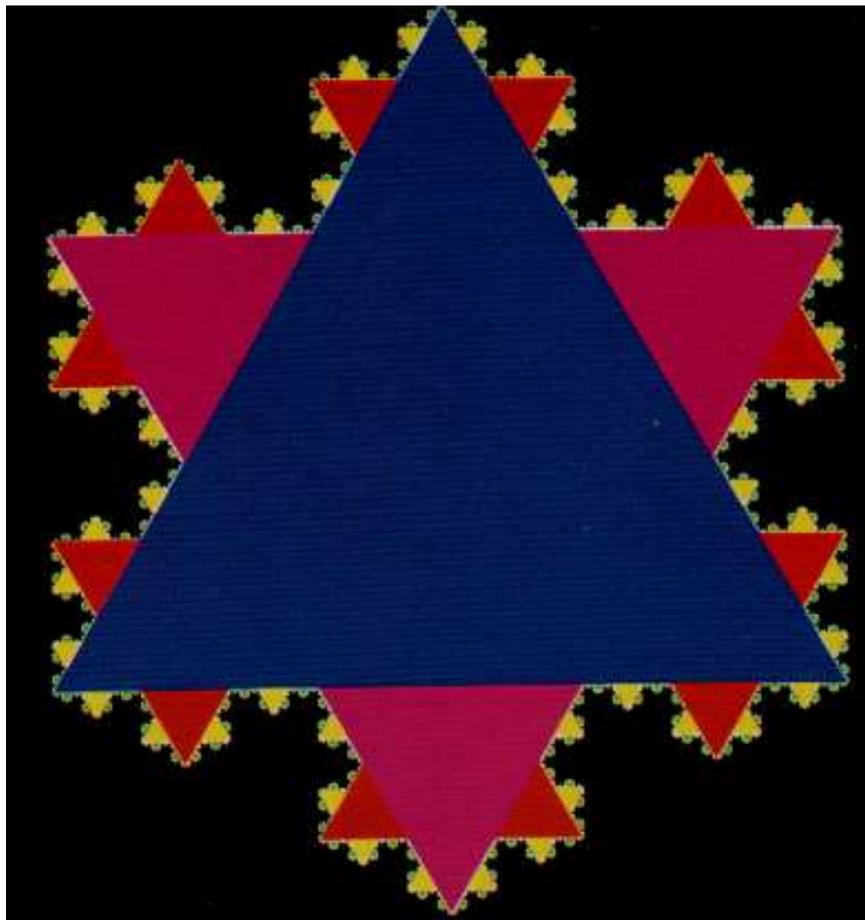


Figura VI.1: La curva di Koch [18] (Vedi Wikipedia).

Discutiamo una modifica dell'insieme di Cantor: la *curva di Koch*² [vedi Fig. 1]. Tale curva si costruisce partendo da un triangolo equilatero e aggiungendo, all'esterno, i triangoli equilateri che hanno le misure ridotte di un fattore 3.

²Publicata da Niels Helge von Koch [1870–1924] nel 1904.

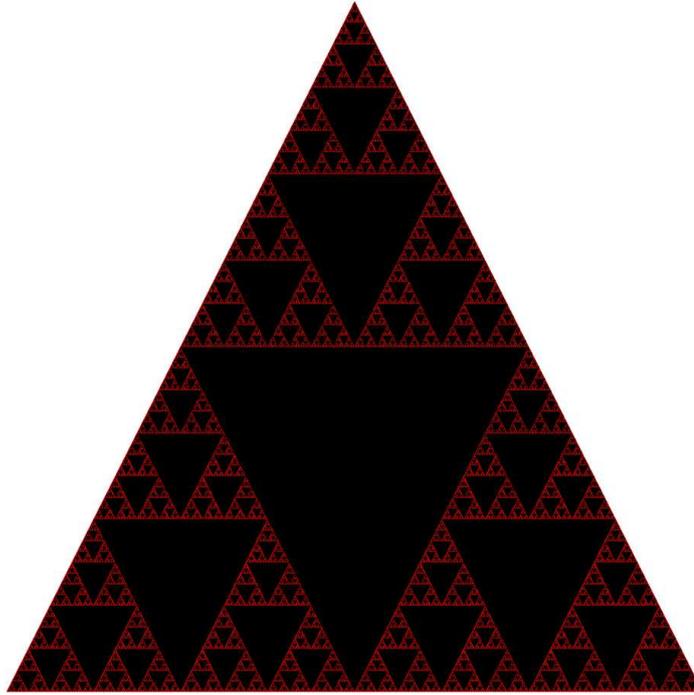


Figura VI.2: Il triangolo di Sierpiński (Vedi Wikipedia).

Un'altra variante è il *triangolo di Sierpiński*.³ Sia \mathbf{K}_0 la regione chiusa che ha un triangolo equilatero con lati di lunghezza 1 come sua frontiera. Da questa regione triangolare si toglie la regione triangolare aperta con vertici i mediani dei tre lati, il che conduce all'unione di tre regioni triangolari \mathbf{K}_1 , dove ogni triangolino ha tre lati di lunghezza $\frac{1}{2}$. Sia, ora, \mathbf{K}_n l'unione di 3^n regioni che hanno da frontiera un triangolo equilatero, dove ogni lato ha la lunghezza $(\frac{1}{2})^n$. Da ciascuna dei 3^n triangoli si toglie la regione triangolare aperta con vertici i mediani dei tre lati, il che conduce a tre triangoli di \mathbf{K}_{n+1} al posto di ogni triangolo di \mathbf{K}_n . Si vede facilmente che l'area di \mathbf{K}_0 vale $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Alla transizione da \mathbf{K}_n a \mathbf{K}_{n+1} l'area viene ridotta da un fattore $\frac{3}{4}$. Quindi l'area di \mathbf{K}_n vale $\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^n\sqrt{3}$. Inoltre,

$$[0, 1] = \mathbf{K}_0 \supset \mathbf{K}_1 \supset \mathbf{K}_2 \supset \mathbf{K}_3 \supset \dots \supset \mathbf{K}_n \supset \mathbf{K}_{n+1} \supset \dots$$

Di conseguenza, l'intersezione di tutti gli insiemi \mathbf{K}_n si chiama il triangolo di Sierpiński, \mathbf{K} . L'insieme \mathbf{K} ha l'area uguale a zero ed è non numerabile. Infine, si ripetino le analoghe considerazioni per il tappeto di Sierpiński (vedi Fig. 1)⁴

³Publicato da Waław Sierpiński [1882–1969] nel 1915.

⁴Publicato da Waław Sierpiński [1882–1969] nel 1916.

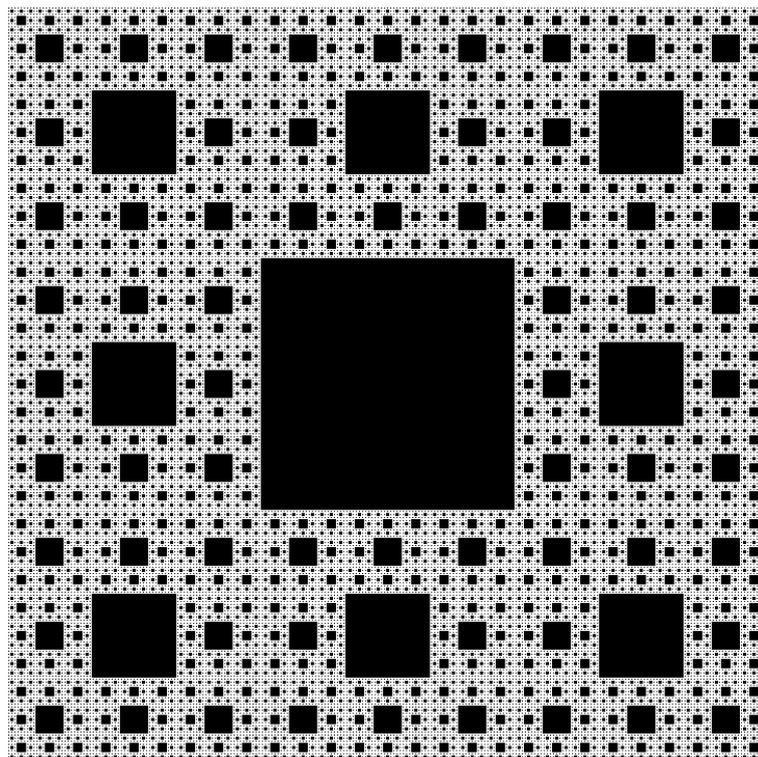


Figura VI.3: Il tappeto di Sierpiński [7].

2 Caratteristiche dei frattali

Un frattale è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- a. un frattale ha una struttura invariante sotto un rescaling arbitrariamente piccolo.
- b. un frattale è troppo "irregolare" per poter essere descritto in termini di funzioni abbastanza lisce.
- c. un frattale è costituito da parti che hanno la stessa struttura del frattale stesso. Tali parti hanno la stessa struttura delle loro sottoparti, ecc. Quindi si può effettuare un rescaling per arrivare ad una parte del frattale che ha la stessa struttura del frattale stesso. Questa proprietà si chiama *self-similarity*.
- d. Il frattale viene (spesso) definito applicando una regola ricorsiva.

Per tali motivi i frattali modellizzano strutture naturali quali la costa di un paese, i confini di una nuvola, una montagna, i cavolfiori e i broccoli, ecc.

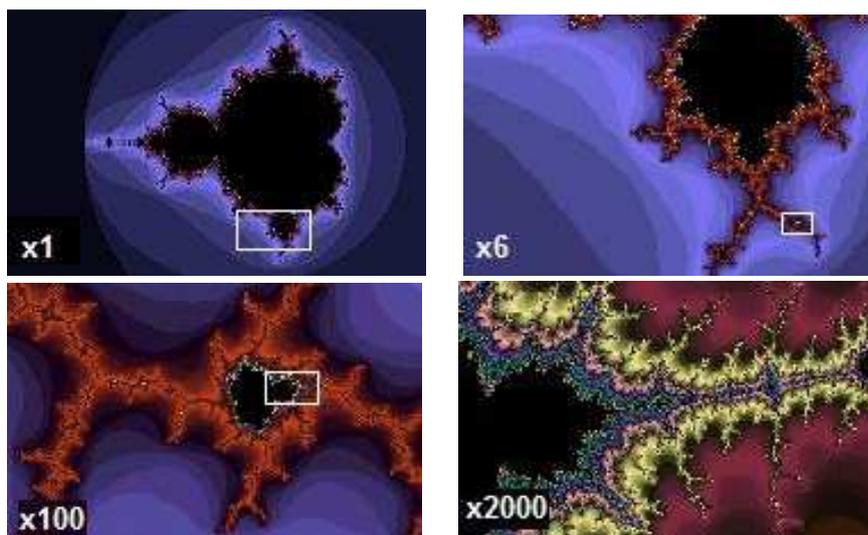


Figura VI.4: Dettagli dell'insieme di Mandelbrot: X1, X6, X100 e X2000 (Vedi Wikipedia in inglese).

Aggiungendo abbastanza dettagli, la lunghezza della costa tende all'infinito. Per esempio, ogni intervallo $[a, b]$ costituito da uno degli insiemi K_n , che conduce all'insieme di Cantor, ha le stesse caratteristiche dell'insieme di Cantor stesso. Un altro esempio viene fornito dal triangolo di Sierpiński. Ogni triangolo, che nasce durante la sua costruzione, può essere messo in corrispondenza biunivoca con il triangolo di Sierpiński stesso. La stessa cosa vale per la curva di Koch. Un esempio tipico di frattale è l'insieme di Mandelbrot.

Molti frattali si ottengono applicando un sistema dinamico discreto. Per esempio, l'applicazione del metodo di Newton-Raphson ad un polinomio $p(z)$ con $n \geq 3$ zeri semplici, cioè il sistema dinamico di equazione

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z)}{p'(z)},$$

conduce ad n bacini di attrazione attorno agli zeri più una struttura frattale lungo i bordi dei bacini. Uno degli esempi più noti dei cosiddetti *frattali di Newton* riguarda i polinomi $p(z) = z^3 - 1$ e $p(z) = z^5 - 1$ [Vedi la Fig. 5].

Una famiglia di frattali legata all'insieme di Mandelbrot riguarda i cosiddetti insiemi di Julia (Gaston Julia [1893–1978]). Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica intera. Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si dice *insieme di Julia riempito* (inglese: filled Julia set) l'insieme $C(f)$ di

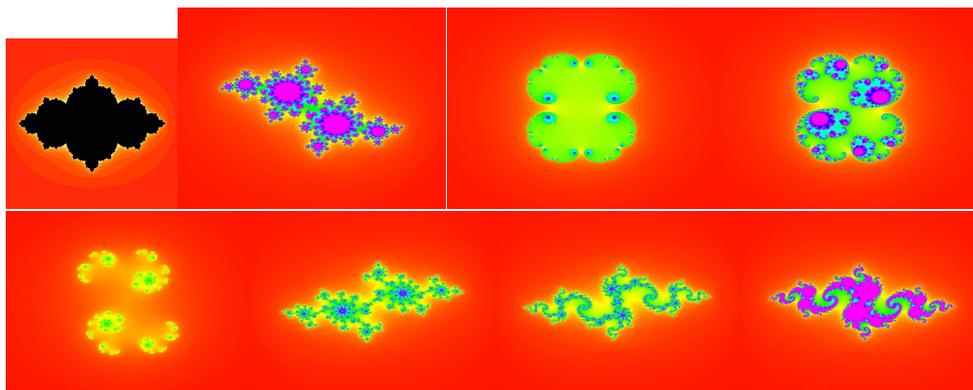


Figura VI.5: Insiemi di Julia per $c = (1 - \sqrt{5})/2$ [su 1], $c = ((-3 + \sqrt{5})/2) + i((-1 + \sqrt{5})/2)$ [su 2], $c = 0,285$ [su 3], $c = 0,285 + 0,01i$ [su 4], $c = 0,45 + 0,1428i$ [giù 1], $c = -0,70176 - 0,3842i$ [giù 2], $c = -0,835 - 0,2321i$ [giù 3], $c = -0,8 + 0,156i$ [giù 4]. Il primo disegno riguarda un insieme di Julia riempito. I valori di c in verde appartengono all'insieme di Mandelbrot. Quelli in rosso invece no. Quelli in blu magari no. Vedi Wikipedia (inglese).

tutti i punti $z_0 \in \mathbb{C}$ per cui la successione $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ è limitata. La sua frontiera si chiama *insieme di Julia*, $J(f)$. L'insieme di Julia è la chiusura dell'insieme dei punti periodici ripulsivi. L'insieme di Julia, $J(f)$, e il suo complementare, l'insieme di Fatou $F(f)$, sono invarianti sotto la mappa f :

$$f^{-1}(J(f)) = J(f) = f(J(f)), \quad f^{-1}(F(f)) = F(f) = f(F(f)).$$

Gli insiemi di Julia sono stati studiati prevalentemente per le mappe

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

dove $c \in \mathbb{C}$ è un parametro. L'insieme di tutti i punti $c \in \mathbb{C}$ per cui l'insieme di Julia $J(f_c)$ è connesso, si chiama *insieme di Mandelbrot*.

3 Dimensione di Hausdorff

Secondo Benoît Mandelbrot [1924-2010], che ha introdotto la terminologia nel 1975, un frattale è un sottoinsieme di uno spazio euclideo che ha una dimensione di Hausdorff superiore alla sua dimensione topologica. Intuitivamente è chiaro che cosa si intende con il concetto di dimensione. Un singolo punto ha dimensione zero. Una curva regolare in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 ha dimensione 1. Una superficie regolare ha dimensione 2, ecc. Di una varietà, che localmente è topologicamente equivalente allo spazio euclideo \mathbb{R}^n , si dice che ha dimensione n . Vedi [24] per un trattamento approfondito della dimensione topologica.

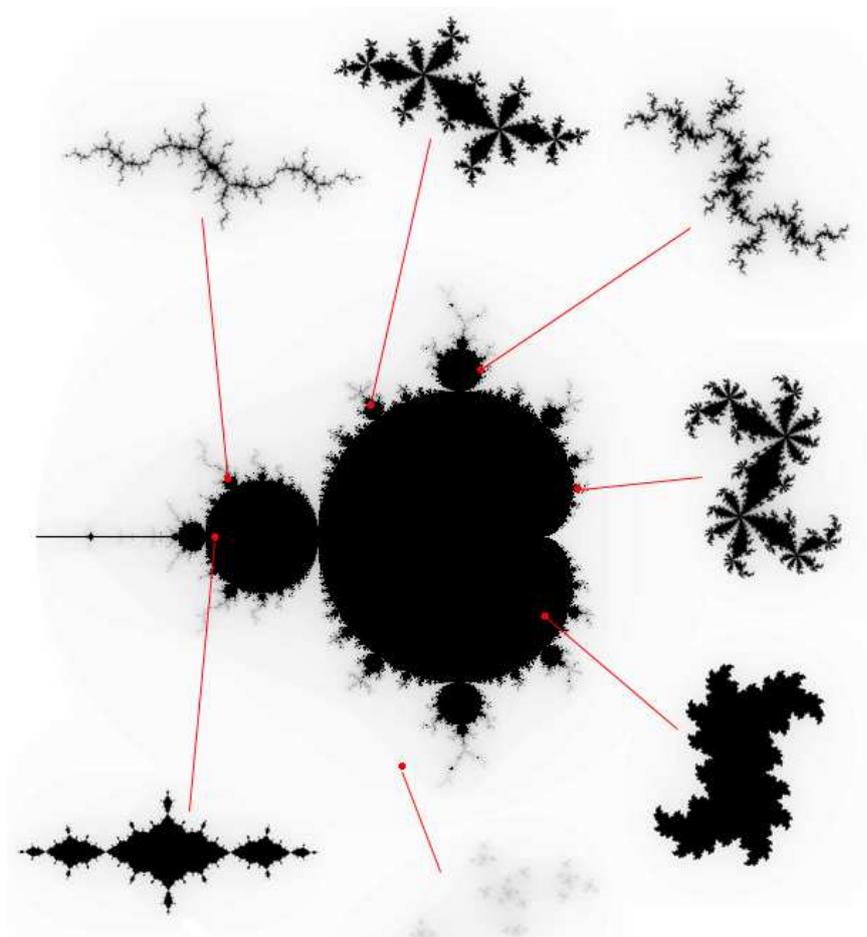


Figura VI.6: Si illustra che l'insieme di Mandelbrot consiste in tutti i $c \in \mathbb{C}$ per cui l'insieme di Julia $J(f_c)$ è connesso [7].

Definizione VI.1 Uno spazio topologico X ha *dimensione topologica* n se ogni ricoprimento aperto di X ha un raffinamento aperto tale che ogni punto $x \in X$ è contenuto in al massimo $n + 1$ insiemi del raffinamento. In altre parole: se $X = \bigcup_j U_j$ per una famiglia di sottoinsiemi aperti U_j in X , allora esiste un'altra famiglia di sottoinsiemi aperti V_k in X tali che

- a. $X = \bigcup_k V_k$,
- b. ogni V_k è contenuto in un opportuno $U_{j(k)}$,
- c. ogni $x \in X$ appartiene al massimo $n + 1$ insiemi V_k .

Per esempio, la circonferenza ha dimensione 1, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento di archi aperti tali che ogni punto della circonferenza

è contenuto in soltanto uno o due tali archi. La superficie sferica ha dimensione 2, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento di dischi aperti (sulla superficie) tali che ogni punto della superficie sferica è contenuto in uno, due o tre di tali dischi.

La dimensione topologica di un punto vale zero, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento che consiste in un singolo insieme aperto. Secondo un teorema di Lebesgue, le superfici regolari (a tratti) di dimensione *intuitiva* n hanno anche la dimensione topologica n . La dimensione topologica è sempre un numero intero non negativo oppure infinito.

Nel 1918 Felix Hausdorff [1868-1942] ha introdotto un'altra nozione di dimensione, nota come dimensione di Hausdorff. Al contrario della nozione di dimensione topologica, la dimensione di Hausdorff dipende dalla metrica (cioè, dalle distanze) in X e non soltanto dalla totalità di tutti i suoi sottoinsiemi aperti. Per $\rho > 0$, sia $N(\rho)$ il numero di palle di raggio ρ necessario per coprire X . Quindi, X può essere coperto con $N(\rho)$ di tali palle ma $N(\rho) - 1$ palle non sono sufficienti per il suo ricoprimento. Se d fosse la dimensione di Hausdorff di X , ci si aspetta un comportamento del tipo

$$N(\rho) \sim \frac{1}{\rho^d}, \quad \rho \rightarrow 0^+.$$

In tal caso si dice che la dimensione di Hausdorff di X vale d .

Esempio VI.2 L'insieme finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ in \mathbb{R}^d può essere coperto da esattamente n palle di raggio ρ se $0 < 2\rho < \min\{\|x_j - x_k\| : j \neq k\}$. Di conseguenza, la sua dimensione di Hausdorff vale zero. \square

Esempio VI.3 Per $X = [0, 1]$ abbiamo

$$N(\rho) = 1 + \min \left\{ n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{2\rho} \right\}.$$

Dalla disuguaglianza $(1/2\rho) < N(\rho) \leq (1/2\rho) + 1$ segue $d = 1$. \square

Esempio VI.4 La palla di raggio ρ in \mathbb{R}^d ha il volume $c(d)\rho^d$, dove $c(d)$ è un'opportuna costante positiva.⁵ Quindi per un aperto U in \mathbb{R}^n di misura μ abbiamo $N(\rho) \approx (\mu/c(d)\rho^d)$. Di conseguenza, un aperto in \mathbb{R}^d ha dimensione di Hausdorff uguale a d . \square

Formalmente, sia X uno spazio metrico, cioè esiste una metrica (una distanza) tra punti di X che è positiva tra due punti diversi, è simmetrica tra

⁵ $c(1) = 2, c(2) = \pi, c(3) = \frac{4}{3}\pi.$

i due punti e verifica la disuguaglianza triangolare. Definiamo il *contenuto di Hausdorff* nel seguente modo:

$$C_H^d(X) = \inf \left\{ \sum_j [r_j]^d : X = \bigcup_j \{x \in X : d(x_j, x) < r_j\} \right\},$$

dove l'estremo inferiore viene calcolato al variare dei centri $x_j \in X$. Allora la *dimensione di Hausdorff*, $\dim_H(X)$, viene definita da

$$\dim_H(X) = \inf \{d \geq 0 : C_H^d(X) = 0\}.$$

La dimensione di Hausdorff non può essere inferiore a quella topologica.

Nella seguente tabella (in cui d_F è la costante di Feigenbaum) elenchiamo le dimensioni di Hausdorff di alcuni frattali. In Wikipedia (sotto "Hausdorff dimension") c'è una tabella più estesa.

frattale	dim. Hausdorff	appross.	dim. top.
insieme di Cantor	$\ln(2)/\ln(3)$	0,6309297	0
curva di Koch	$\ln(4)/\ln(3)$	1,2618595	1
triangolo di Sierpiński	$\ln(3)/\ln(2)$	1,5849625	0
frontiera dell'insieme di Mandelbrot[29]	2	2,0000000	1
diagramma di biforcazione della mappa logistica	$\ln(2)/\ln(d_F)$	0,4498	0
tappeto di Sierpiński	$\ln(8)/\ln(3)$	1,8927893	0

Introduciamo ora un metodo per calcolare le dimensioni di Hausdorff dei frattali che hanno una self-similarity esatta. Una mappa $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *similarity* se ha la forma $\psi(x) = x_0 + r(U(x) - x_0)$ per un'opportuna costante $0 < r < 1$, un opportuno punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e un'opportuna isometria U . Supponiamo che il sottoinsieme K di \mathbb{R}^n ha la forma

$$\bigcup_{j=1}^m \psi_j(K) = K,$$

dove ψ_1, \dots, ψ_m è un numero finito di similarity. Se r_1, \dots, r_m sono le costanti di contrazione delle similarity ψ_1, \dots, ψ_m , allora la dimensione di Hausdorff d di K si ottiene dall'equazione⁶

$$\sum_{j=1}^m [r_j]^d = 1. \tag{VI.2}$$

⁶Siccome la parte a sinistra è strettamente decrescente in d e appartiene a $(1, +\infty)$ per $d = 0$, esiste una soluzione unica dell'equazione.

Una condizione necessaria (la cosiddetta *open set condition*), per applicare il risultato è l'esistenza di un sottoinsieme aperto e limitato V di \mathbb{R}^n tale che

$$\bigcup_{j=1}^m \psi_j(V) \subset V. \quad (\text{VI.3})$$

Applichiamo il risultato prima all'insieme di Cantor K . Ponendo

$$\psi_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad \psi_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}(2 + x),$$

si ottiene $\psi_1(K) \cup \psi_2(K) = K$. Inoltre, vale la cosiddetta open set condition per $V = (0, 1)$. Siccome $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$, la dimensione di Hausdorff d di K segue dall'equazione

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1,$$

cioè $\ln(2) - d \ln(3) = 0$ e quindi $d = (\ln(2)/\ln(3))$.

Consideriamo ora il triangolo di Sierpiński \mathbf{K} . Siano x_1, x_2 e x_3 i vertici del triangolo di partenza e ψ_1, ψ_2 e ψ_3 le seguenti similarity:

$$\psi_j(x) = x_j + \frac{1}{2}(x - x_j), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Sia V la regione aperta che ha il triangolo di base come la sua frontiera. In tal caso vale la open set condition, mentre

$$\psi_1(\mathbf{K}) \cup \psi_2(\mathbf{K}) \cup \psi_3(\mathbf{K}) = \mathbf{K}.$$

Dunque la dimensione di Hausdorff d di \mathbf{K} segue dall'equazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1,$$

cioè $\ln(3) - d \ln(2) = 0$ e quindi $d = (\ln(3)/\ln(2))$.

Calcoliamo infine la dimensione di Hausdorff della curva di Koch K . Essendo \tilde{K} la parte della curva basata su due dei tre lati, si vede subito che K e \tilde{K} hanno la stessa dimensione di Hausdorff. Infatti $N_{\tilde{K}}(\rho) = \frac{2}{3}N_K(\rho)$ per $\rho > 0$ abbastanza piccolo. Si osservi ora che durante la costruzione si costruisce su ogni lato una "copia" self-similar con un terzo delle dimensioni, due copie di riduzione $\frac{1}{3}$, quattro copie di riduzione $\frac{1}{9}$, otto copie di riduzione $\frac{1}{27}$, ecc. Quindi la dimensione di Hausdorff d segue dall'equazione

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2^j} \left(\frac{1}{3}\right)^{jd} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^d}\right)^j = \frac{2/3^d}{1 - (2/3^d)} = \frac{2}{3^d - 2}.$$

Di conseguenza, la sua dimensione di Hausdorff vale $d = [\ln(4)/\ln(3)]$.

Capitolo VII

Equazioni Integrabili

In questo capitolo discuteremo le cosiddette equazioni nonlineari di evoluzione di tipo integrabile quali l'equazione di Korteweg-de Vries (KdV), l'equazione nonlineare di Schrödinger (NLS), l'equazione di Korteweg-de Vries modificata (mKdV), l'equazione di sine-Gordon (SG), e altre. Tali equazioni alle derivate parziali [PDE] hanno tutte soluzioni di tipo “travelling waves” e sono risolubili mediante la cosiddetta “inverse scattering transform” (IST), una trasformazione **nonlineare** che converte la PDE (di cui ci vuole studiare il problema a valori iniziali) in un'equazione lineare di più semplice risoluzione. La IST può essere considerata come l'analogo nonlineare della trasformata di Fourier [quest'ultima si applica a equazioni differenziali ordinarie lineari]. In un contesto ingegneristico la IST viene spesso chiamata *nonlinear Fourier transform* (NFT). Inoltre, alle equazioni integrabili è possibile associare un sistema hamiltoniano con infinite costanti di moto. Alcuni dettagli sulla IST e sull'equazione NLS si trovano nel secondo capitolo di [1] e nei primi due capitoli di [32].

1 Storia di alcune equazioni integrabili

Nel 1834 l'ingegnere scozzese John Scott Russell [1808–1882] osservò un'onda (che viaggiò lungo la Union Canal tra Edinburgo e Glasgow), caratterizzata dal fatto di non cambiare la sua forma e dall'averne un'ampiezza proporzionale alla sua velocità. Egli, inoltre, ideò un esperimento con il quale riprodusse tali fenomeni ondosi.

La teoria che spiega i risultati sperimentali di Scott Russell è stata successivamente sviluppata da Joseph Valentin Boussinesq [1842–1929] negli anni 1871–1872. Boussinesq ha derivato l'equazione che descrive la propagazione di onde in canali la cui profondità è piccola rispetto alla lunghezza d'onda, trovando, come soluzione di tali equazioni, le cosiddette “ondes solitaires” che spiegano

le osservazioni di Scott Rusell. Tali soluzioni hanno la forma $u(x, t) = f(x - ct)$ e sono comunemente dette “traveling waves”.

Nel 1894–1895 Diederik Korteweg [1848-1941] e Gustav de Vries [1866–1934], utilizzando un sistema di coordinate solidale con l’onda, hanno ottenuto l’equazione di Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0. \quad (\text{VII.1})$$

La sostituzione

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

converte la KdV nell’equazione differenziale ordinaria

$$-cf'(x) + f'''(x) - 6f(x)f'(x) = 0,$$

oppure:

$$\frac{d}{dx} (-cf(x) + f''(x) - 3f(x)^2) = 0.$$

Integrando quest’ultima equazione si ottiene

$$-cf(x) + f''(x) - 3f(x)^2 = A, \quad (\text{VII.2})$$

dove A è un’opportuna costante. Moltiplicando (VII.2) per $2f'(x)$ si ha

$$\frac{d}{dx} (-cf(x)^2 + f'(x)^2 - 2f(x)^3 - 2Af(x)) = 0,$$

e, integrando nuovamente, si ottiene per un’opportuna costante B

$$-cf(x)^2 + f'(x)^2 - 2f(x)^3 = 2Af(x) + B.$$

Quest’ultima equazione conduce infine all’equazione a variabili separabili

$$f'(x) = \pm \sqrt{2Af(x) + B + cf(x)^2 + 2f(x)^3}.$$

Per $A = B = 0$ e $c > 0$ si trova¹

$$u(x, t) = \frac{-\frac{1}{2}c}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct - a)]} = -\frac{1}{2}c \{1 - \tanh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct - a)]\}. \quad (\text{VII.3})$$

Osserviamo che l’ampiezza ($\frac{1}{2}c$) è proporzionale alla velocità (c).

Nel periodo 1900-1954 l’equazione di Korteweg-de Vries è caduta nel dimenticatoio. Nel 1954 Enrico Fermi [1901-1954], John Pasta [1918-1984], Stanislaw

¹Se $A \neq 0$ oppure $B \neq 0$, $u(x, t)$ è esprimibile nelle cosiddette funzioni ellittiche.

Ulam [1909-1984] e Mary Tsingou [nata nel 1928] hanno condotto molte simulazioni numeriche sulla dinamica di un sistema di N oscillatori accoppiati. Tale sistema fu analizzato per giustificare un modello teorico (proposto da Peter Debye [1884–1966]) che permetteva di interpretare le osservazioni sperimentali sulla conducibilità termica dei solidi. Il modello matematico studiato da Fermi, Pasta, Ulam e Tsingou è descritto dalle seguenti equazioni alle differenze:

$$m\ddot{x}_j = k(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1})[1 + \alpha(x_{j+1} - x_{j-1})], \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (\text{VII.4})$$

dove α e k sono opportune costanti positive. Essi trovarono soluzioni di tipo “traveling waves” (VII.3) in aperto contrasto con il risultato da loro atteso: l’equipartizione dell’energia (che costituisce il paradosso di Fermi-Pasta-Ulam). Per questo motivo archiviarono le loro ricerche in un report della Los Alamos National Laboratory, pubblicato subito dopo la morte di Enrico Fermi. Nel 1965 Norman Zabusky [nato nel 1929] e Martin Kruskal [1925-2006] hanno confermato i risultati numerici e introdotto il termine “solitone” per l’onda viaggiante. Loro hanno anche osservato che le soluzioni del modello (VII.4) tendono a quelle dell’equazione di Korteweg-de Vries se la distanza tra due oscillatori consecutivi tende a zero.

Nel 1967 Clifford Gardner [nato nel 1924], John Greene [1928-2007], Martin Kruskal [1925-2006] e Robert Miura [nato nel 1938] (indicheremo quest’insieme di autori con GGKM) hanno scoperto la cosiddetta inverse scattering transform (IST) per risolvere il problema di Cauchy dell’equazione di Korteweg-de Vries. Partendo dalla soluzione iniziale $u(x, 0)$ reale dell’equazione di Schrödinger

$$-\psi_{xx} + u(x, 0)\psi = k^2\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{VII.5})$$

appartenente ad $L^1(\mathbb{R}; (1 + |x|)dx)$, GGKM hanno utilizzato la cosiddetta soluzione di Jost $f_r(k, x)$. Tale funzione è soluzione di (VII.5) e ha il seguente comportamento asintotico:

$$f_r(k, x) = \begin{cases} \frac{1}{T(k)}e^{-ikx} + \frac{R(k)}{T(k)}e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-ikx}[1 + o(1)], & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

$T(k)$ si chiama coefficiente di trasmissione, mentre $R(k)$ si dice coefficiente di riflessione. La soluzione di Jost rappresenta un’onda piana e^{-ikx} che viaggia da destra a sinistra e viene in parte riflessa e in parte trasmessa nelle proporzioni $R(k)$ e $T(k)$, essendo $|R(k)|^2 + |T(k)|^2 = 1$. La funzione $R(k)$ è continua in $k \in \mathbb{R}$ e tende a zero se $k \rightarrow \pm\infty$, mentre il coefficiente di trasmissione è meromorfo in k nel semipiano superiore, ha poli semplici in $i\kappa_1, \dots, i\kappa_N$ (con $\{\kappa_1, \dots, \kappa_N\} \subset \mathbb{R}^+$) e tende a 1 se $k \rightarrow \infty$. Ad ogni polo $i\kappa_s$ si associa un’opportuna costante positiva N_s , la cosiddetta costante di normalizzazione. Il problema di determinare i dati

di scattering corrispondenti al potenziale $u(x, 0)$ è detto *problema di scattering diretto*.

I dati di scattering della corrispondente equazione di Schrödinger

$$-\psi_{xx} + u(x, t)\psi = k^2\psi$$

evolvono nel seguente modo elementare:

$$\{R(k), \{\kappa_j, N_j\}_{j=1}^N\} \mapsto \{R(k; t), \{\kappa_j, N_j(t)\}_{j=1}^N\} = \{R(k)e^{8ik^3t}, \{\kappa_j, N_j e^{8\kappa_j^3t}\}_{j=1}^N\}.$$

Supponendo di conoscere i dati di scattering all'istante t , ci si pone il problema di costruire la funzione $u(x, t)$ corrispondente a tali dati. Tale problema si chiama *scattering inverso*. La risoluzione del problema di scattering inverso si basa sui seguenti tre passi:

a. Partendo dai dati di scattering si costruisce il *nucleo di Marchenko*

$$\Omega(x; t) = \sum_{j=1}^N N_j(t)e^{-\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} R(k; t).$$

b. Si formula l'equazione integrale di Marchenko con nucleo $\Omega(x + y; t)$:

$$K(x, y; t) + \Omega(x + y; t) + \int_x^{\infty} dz K(x, z; t)\Omega(z + y; t) = 0.$$

c. Supposto di aver risolto l'equazione di Marchenko, il potenziale si trova applicando la seguente regola:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t).$$

In forma schematica la IST può essere descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(k), \{\kappa_j, N_j\}_{j=1}^N\} \\ \text{KdV} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(k)e^{8ik^3t}, \{\kappa_j, N_j e^{8\kappa_j^3t}\}_{j=1}^N\} \end{array}$$

GGKM si avvantaggiarono dal fatto che tre anni prima Ludvig Dmitriyevich Faddeev [nato nel 1934] aveva risolto il problema dello scattering inverso per l'equazione di Schrödinger descrivendo un algoritmo per trovare il potenziale $u(x, t)$ una volta noti i dati di scattering.

Nel 1972 Vladimir Evgenevich Zakharov [nato nel 1939] e Aleksei B. Shabat scoprirono che la IST poteva essere usata anche per risolvere l'equazione nonlineare di Schrödinger (NLS)

$$iu_t + u_{xx} \pm 2|u|^2u = 0. \quad (\text{VII.6})$$

Associando alla NLS il cosiddetto sistema di Zakharov-Shabat (ZS)

$$\psi_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & u \\ \mp u^* & i\lambda \end{pmatrix} \psi,$$

Zakharov e Shabat hanno costruito un analogo diagramma risolutivo per l'equazione NLS, cioè:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(\lambda), \{ia_j, \Gamma_j\}_{j=1}^N\} \\ \text{NLS} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(\lambda)e^{4i\lambda^2 t}, \{ia_j, \Gamma_j e^{-4ia_j^2 t}\}_{j=1}^N\} \end{array}$$

Un'altra equazione integrabile risolvibile mediante una IST che coinvolge il sistema di Zakharov-Shabat, è l'equazione di Korteweg-de Vries modificata (mKdV)

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

Nelle applicazioni (fisica dei plasmi, superfici iperboliche, traffico) la soluzione $u(x, t)$ è supposta reale. Il diagramma che descrive la IST per risolvere il problema di Cauchy per l'equazione mKdV è il seguente:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(\lambda), \{ia_j, \Gamma_j\}_{j=1}^N\} \\ \text{NLS} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(\lambda)e^{8i\lambda^3 t}, \{ia_j, \Gamma_j e^{8ia_j^3 t}\}_{j=1}^N\} \end{array}$$

La scoperta di due equazioni nonlineari di evoluzione di tipo integrabile (la KdV e la NLS) ha condotto a un'intensa attività di ricerca (con relative pubblicazioni) su equazioni nonlineari di evoluzione risolubili mediante una simile trasformazione. Tra esse ricordiamo le seguenti: equazione di Korteweg-de Vries modificata (mKdV), di sine-Gordon (SG), di Kadomtsev-Petviashvili (KP), di Camassa-Holm (CH), di Degasperis-Procesi (DP), ecc. Sono anche state studiate equazioni nonlineari di evoluzione nel discreto, in cui la variabile spaziale è un intero: reticolato di Toda, equazione nonlineare di Schrödinger di tipo integrabile e discreto [IDNLS], e altre. Tali equazioni hanno applicazioni in fisica, ingegneria, biologia, ecc., e possono essere risolte tramite la IST.

2 Generazione di equazioni integrabili

Consideriamo il sistema **lineare** di equazioni di evoluzione

$$V_x = X(x, t, \lambda)V, \quad (\text{VII.7a})$$

$$V_t = T(x, t, \lambda)V, \quad (\text{VII.7b})$$

dove

- a. $V(x, t, \lambda)$ è una matrice quadrata *invertibile* che dipende dalla posizione x , dal tempo t e da una variabile spettrale λ ;
- b. $X(x, t, \lambda)$ e $T(x, t, \lambda)$ sono due matrici quadrate di classe C^2 in (x, t) .

Utilizzando il teorema di Schwarz ($(V_x)_t = (V_t)_x$), dove

$$\begin{aligned} (V_x)_t &= XV_t + X_xV = XTV + X_xV = (XT + X_t)V, \\ (V_t)_x &= TV_x + T_xV = TXV + T_xV = (TX + T_x)V, \end{aligned}$$

si ottiene la seguente condizione di compatibilità:

$$X_t - T_x + XT - TX = 0. \quad (\text{VII.8})$$

Osserviamo che abbiamo anche utilizzato l'invertibilità della matrice V . La (VII.8) risulta *equazione nonlineare di evoluzione di tipo integrabile* se essa non dipende dalla variabile spettrale λ ma soltanto dalla posizione x e dal tempo t .

Esempio VII.1 (KdV) Consideriamo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -u_x & 4k^2 + 2u \\ -4k^4 + 2k^2u + 2u^2 - u_{xx} & u_x \end{pmatrix} \quad (\text{VII.9})$$

Allora

$$\begin{aligned} X_t - T_x + XT - TX &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u_{xx} & 2u_x \\ 2k^2u_x + 2(u^2)_x - u_{xxx} & u_{xx} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -4k^4 + 2k^2u + 2u^2 - u_{xx} & u_x \\ -uu_x + k^2u_x & 4k^2u + 2u^2 - 4k^4 - 2k^2u \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 4k^2u + 2u^2 - 4k^4 - 2k^2u & -u_x \\ u_xu - k^2u_x & -4k^4 + 2k^2u + 2u^2 - u_{xx} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t + u_{xxx} - 6uu_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi la condizione di compatibilità (VII.8) è equivalente all'equazione di Korteweg-de Vries (VII.1).

Sostituendo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}$$

nell'equazione (VII.7a) si ottiene

$$\begin{pmatrix} \psi_x \\ \phi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ u\psi - k^2\psi \end{pmatrix}$$

oppure $\phi = \psi_x$ e $-\phi_x + u\psi = k^2\psi$. Quest'ultime equazioni sono equivalenti all'equazione di Schrödinger

$$-\psi_{xx} + u\psi = k^2\psi,$$

dove ψ è la funzione d'onda e u è il potenziale. Quindi, (VII.7a) rappresenta il problema spettrale per l'operatore differenziale di Schrödinger $-\partial_x^2 + u$. \square

Esempio VII.2 (NLS) Consideriamo

$$X = -i\lambda\sigma_3 + \mathbf{Q}, \quad T = -2i\lambda^2\sigma_3 - i\sigma_3\mathbf{Q}^2 + 2\lambda\mathbf{Q} + i\sigma_3\mathbf{Q}_x, \quad (\text{VII.10})$$

dove

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\sigma_3\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}\sigma_3$ e $[\sigma_3]^2 = I_2$. Quindi

$$\begin{aligned} & i\sigma_3[X_t - T_x + XT - TX] \\ &= \underbrace{i\sigma_3\mathbf{Q}_t}_{=i\sigma_3X_t} - \underbrace{(\mathbf{Q}^2)_x}_{=-i\sigma_3T_x} - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_{xx} \\ &= \underbrace{-2i\lambda^3\sigma_3 - i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 + 2\lambda^2\mathbf{Q} + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x}_{=\lambda T} - \underbrace{2\lambda^2\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^3 + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_x}_{=i\sigma_3\mathbf{Q}T} \\ &+ \underbrace{2i\lambda^3\sigma_3 + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 + 2\lambda^2\mathbf{Q} + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x}_{=-\lambda\sigma_3T\sigma_3} - \underbrace{2\lambda^2\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^3 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}_x\mathbf{Q}}_{=-i\sigma_3T\mathbf{Q}} \\ &= i\sigma_3\mathbf{Q}_t + \mathbf{Q}_{xx} - 2\mathbf{Q}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & iq_t + q_{xx} - 2qqr \\ -ir_t + r_{xx} - 2rqr & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In altre parole, la condizione di compatibilità (VII.8) è equivalente al seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\begin{aligned} iq_t + q_{xx} - 2qqr &= 0, \\ -ir_t + r_{xx} - 2rqr &= 0. \end{aligned}$$

Per $r = \pm q^*$ il suddetto sistema si riduce all'equazione nonlineare di Schrödinger (NLS)

$$iq_t + q_{xx} \mp 2|q|^2q = 0,$$

dove il meno corrisponde al caso *defocusing* e il più al caso *focusing*.

L'equazione (VII.7a) può essere scritta nella forma

$$i\sigma_3\Psi_x - i\sigma_3\mathbf{Q}\Psi = \lambda\Psi.$$

Di conseguenza, (VII.7a) rappresenta il problema spettrale per l'operatore differenziale di Zakharov-Shabat $i\sigma_3\partial_x - i\sigma_3\mathbf{Q}$. \square

Esempio VII.3 (mKdV) Consideriamo

$$X = -i\lambda\sigma_3 + \mathbf{Q}, \quad T = -4i\lambda^3\sigma_3 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 + 4\lambda^2\mathbf{Q} + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}_{xx} + 2\mathbf{Q}^3,$$

dove

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\sigma_3\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}\sigma_3$ e $[\sigma_3]^2 = I_2$. Quindi

$$\begin{aligned} & X_t - T_x + XT - TX \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}_t}_{=X_t} + \underbrace{2i\lambda\sigma_3(\mathbf{Q}^2)_x - 4\lambda^2\mathbf{Q}_x - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} + \mathbf{Q}_{xxx} - 2(\mathbf{Q}^3)_x}_{=-T_x} \\ & \underbrace{-4\lambda^4 I_p - 2\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2\lambda^2\mathbf{Q}_x + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3}_{=-i\lambda\sigma_3 T} \\ & \underbrace{+4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3 + 4\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}\mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{xx} + 2\mathbf{Q}^4}_{=\mathbf{Q}T} \\ & \underbrace{+4\lambda^4 I_p + 2\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2\lambda^2\mathbf{Q}_x + i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_{xx} - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3}_{=i\lambda T\sigma_3} \\ & \underbrace{+4i\lambda^3\sigma_3\mathbf{Q} + 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^3 - 4\lambda^2\mathbf{Q}^2 - 2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}_x\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{xx}\mathbf{Q} - 2\mathbf{Q}^4}_{=-T\mathbf{Q}} \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}_t + \mathbf{Q}_{xxx} - 2(\mathbf{Q}^3)_x}_{\text{}} + \underbrace{\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{xx}}_{\text{}} \\ &= \begin{pmatrix} (q_x r - q r_x)_x & q_t - 2(q r q)_x + q_{xxx} \\ r_t - 2(r q r)_x + r_{xxx} & (r_x q - r q_x)_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, r/q è costante. Inoltre, per $q = r = u$ reale si arriva all'equazione mKdV

$$u_t - 2(u^3)_x + u_{xxx} = 0,$$

oppure $u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$.

3 Inverse scattering transform per la KdV

In questo paragrafo discuteremo la teoria di scattering dell'equazione di Schrödinger sulla retta, sviluppata da Faddeev [15]. Un resoconto della teoria di scattering viene presentata in [10, Cap. XVII]. Tale teoria ci consente, mediante la IST, di risolvere il problema di Cauchy dell'equazione di Korteweg-de Vries.

1. Soluzioni di Jost. Consideriamo l'equazione di Schrödinger sulla retta

$$-\psi''(k, x) + Q(x)\psi(k, x) = k^2\psi(k, x), \quad (\text{VII.11})$$

dove $x \in \mathbb{R}$ è la posizione, $Q(x)$ è un potenziale reale e k è un parametro spettrale (essendo k il numero d'onda e k^2 l'energia). Ci limitiamo a scegliere $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \cup \mathbb{R}$ (cioè, $\text{Im } k \geq 0$). Il potenziale $Q(x)$ verifica la cosiddetta *condizione di Faddeev*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + |x|)|Q(x)| < +\infty. \quad (\text{VII.12})$$

Introduciamo le cosiddette *soluzioni di Jost* $f_l(k, x)$ e $f_r(k, x)$ che verificano le condizioni asintotiche

$$f_l(k, x) = e^{ikx}[1 + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty, \quad (\text{VII.13a})$$

$$f_r(k, x) = e^{-ikx}[1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{VII.13b})$$

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti si ottengono le equazioni integrali di Volterra

$$e^{-ikx} f_l(k, x) = 1 + \int_x^{\infty} dy \frac{e^{2ik(y-x)} - 1}{2ik} Q(y) e^{-iky} f_l(k, y), \quad (\text{VII.14a})$$

$$e^{ikx} f_r(k, x) = 1 + \int_{-\infty}^x dy \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik} Q(y) e^{iky} f_r(k, y). \quad (\text{VII.14b})$$

Iterando le due equazioni integrali si può dimostrare il seguente:

- a. Le soluzioni di Jost sono le uniche soluzioni dell'equazione di Schrödinger (VII.11) che verificano le condizioni (VII.12).
- b. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la *funzione di Faddeev* $e^{-ikx} f_l(k, x)$ è continua in $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, è analitica in $k \in \mathbb{C}^+$ e tende ad 1 se $k \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$ uniformemente in $x \geq x_0$.
- c. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la *funzione di Faddeev* $e^{ikx} f_r(k, x)$ è continua in $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, è analitica in $k \in \mathbb{C}^+$ e tende ad 1 se $k \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$ uniformemente in $x \leq x_0$.

d. Poichè il potenziale $Q(x)$ è reale e $[e^{\mp i[k^*]x}]^* = e^{\pm ikx}$, si ha:

$$f_l(-k^*, x)^* = f_l(k, x), \quad f_r(-k^*, x)^* = f_r(k, x). \quad (\text{VII.15})$$

2. Coefficienti di scattering. Studiamo ora l'andamento di $f_l(k, x)$ se $x \rightarrow -\infty$ e quello di $f_r(k, x)$ se $x \rightarrow +\infty$. Per $0 \neq k \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f_l(k, x) = \bar{a}(k)e^{ikx} + \bar{b}(k)e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{VII.16a})$$

$$f_r(k, x) = a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (\text{VII.16b})$$

dove

$$\bar{a}(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} dy Q(y) e^{-iky} f_l(k, y),$$

$$\bar{b}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{2iky} Q(y) e^{-iky} f_l(k, y),$$

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} dy Q(y) e^{iky} f_r(k, y),$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2iky} Q(y) e^{iky} f_r(k, y).$$

Quindi $a(k)$ and $\bar{a}(k)$ sono continue in $0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, sono analitiche in $k \in \mathbb{C}^+$ e tendono ad 1 se $k \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$; inoltre, esistono finiti i limiti di $k[1 - a(k)]$ e $k[1 - \bar{a}(k)]$ se $k \rightarrow 0$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$. D'altra parte, $b(k)$ e $\bar{b}(k)$ sono continue in $0 \neq k \in \mathbb{R}$ e tendono a zero se $k \rightarrow \pm\infty$; inoltre, esistono finiti i limiti di $kb(k)$ e $k\bar{b}(k)$ se $k \rightarrow 0$ in \mathbb{R} . Inoltre, utilizzando (VII.15) si ha:

$$a(-k^*)^* = a(k), \quad \bar{a}(-k^*)^* = \bar{a}(k), \quad (\text{VII.17a})$$

$$b(-k)^* = b(k), \quad \bar{b}(-k) = \bar{b}(k), \quad (\text{VII.17b})$$

dove (VII.17a) vale per $0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ e (VII.17b) vale per $0 \neq k \in \mathbb{R}$.

È facile dimostrare che il Wronskiano

$$W[\psi, \phi] = \det \begin{pmatrix} \psi(k, x) & \phi(k, x) \\ \psi'(k, x) & \phi'(k, x) \end{pmatrix}$$

di due soluzioni $\psi(k, x)$ e $\phi(k, x)$ dell'equazione di Schrödinger (VII.11) non dipende da $x \in \mathbb{R}$.² Utilizzando le espressioni asintotiche per i Wronskiani per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha:

$$W[f_l(k, x), f_r(k, x)] = -2ika(k) = -2ik\bar{a}(k), \quad (\text{VII.18a})$$

$$W[f_r(k, x), f_r(-k, x)] = 2ik[a(k)a(-k) - b(k)b(-k)] = 2ik, \quad (\text{VII.18b})$$

$$W[f_l(k, x), f_l(-k, x)] = -2ik = -2ik[\bar{a}(k)\bar{a}(-k) - \bar{b}(k)\bar{b}(-k)], \quad (\text{VII.18c})$$

$$W[f_l(k, x), f_r(-k, x)] = -2ikb(-k) = 2ik\bar{b}(k). \quad (\text{VII.18d})$$

²Infatti, $\frac{d}{dx}W[\psi, \phi] = (\psi\phi' - \psi'\phi)' = \psi\phi'' - \psi''\phi = \psi(Q - k^2)\phi - (Q - k^2)\psi\phi = 0$.

Dalla(VII.18a) segue che le soluzioni di Jost $f_l(0, x)$ e $f_r(0, x)$ per $k = 0$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\lim_{k \rightarrow 0} [ka(k)] \neq 0$ (*caso generico*), mentre se $\lim_{k \rightarrow 0} [ka(k)] = 0$ (*caso eccezionale*), le funzioni $f_l(0, x)$ e $f_r(0, x)$ sono proporzionali. Dalle equazioni (VII.18b)-(VII.18d) segue che

$$\begin{cases} \bar{a}(k) = a(k), & 0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}, \\ |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, & 0 \neq k \in \mathbb{R}, \\ |\bar{a}(k)|^2 - |\bar{b}(k)|^2 = 1, & 0 \neq k \in \mathbb{R}. \\ \bar{b}(k) = -b(k)^*, & 0 \neq k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Di conseguenza, $a(k) \neq 0$ per $0 \neq k \in \mathbb{R}$.

Definiamo il *coefficiente di trasmissione* $T(k)$ e i due *coefficienti di riflessione* $R(k)$ e $L(k)$ nel seguente modo:

$$T(k) = \frac{1}{a(k)} = \frac{1}{\bar{a}(k)}, \quad R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad L(k) = \frac{\bar{b}(k)}{\bar{a}(k)}.$$

Allora $T(k)$ è una funzione meromorfa in $k \in \mathbb{C}^+$. Inoltre,

$$\begin{cases} T(-k^*)^* = T(k), & 0 \neq k \in \overline{\mathbb{C}^+}, \text{ } k \text{ non è polo,} \\ R(-k)^* = R(k), & 0 \neq k \in \mathbb{R}, \\ L(-k)^* = L(k), & 0 \neq k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Infine, la *matrice di scattering*

$$S(k) = \begin{pmatrix} T(k) & R(k) \\ L(k) & T(k) \end{pmatrix}$$

è unitaria per $k \in \mathbb{R}$.³

3. Problema di Riemann-Hilbert. Dalla relazione Wronskiana (VII.18a) segue che le soluzioni di Jost $f_l(k, x)$ e $f_r(k, x)$ sono linearmente indipendenti per $k \in \mathbb{R}$ nel caso generico e per $0 \neq k \in \mathbb{R}$ nel caso eccezionale. Per tali valori di k esiste una trasformazione di base

$$\begin{pmatrix} f_l(-k, x) \\ f_r(-k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(k) & \alpha_{12}(k) \\ \alpha_{21}(k) & \alpha_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r(k, x) \\ f_l(k, x) \end{pmatrix},$$

³Gli elementi $T(k)$, $R(k)$ e $L(k)$ della matrice di scattering $S(k)$ sono continui in $k \in \mathbb{R}$, anche se $k \rightarrow 0$. Non dimostriamo questo fatto. Lo studio delle proprietà asintotiche delle soluzioni di Jost e dei coefficienti di scattering per $k \rightarrow 0$ è abbastanza impegnativo, in particolare nel caso eccezionale.

dove i coefficienti $\alpha_{11}(k)$, $\alpha_{12}(k)$, $\alpha_{21}(k)$ e $\alpha_{22}(k)$ devono essere determinati. Utilizzando le proprietà asintotiche delle soluzioni di Jost per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_{11}(k)a(k), \\ 0 &= \alpha_{11}(k)b(k) + \alpha_{12}(k), \\ a(-k) &= \alpha_{21}(k)a(k), \\ a(-k) &= \alpha_{21}(k)b(k) + \alpha_{22}(k). \end{aligned}$$

Quindi $\alpha_{11}(k) = [1/a(k)] = T(k)$, $\alpha_{12}(k) = -[b(k)/a(k)] = -R(k)$, $\alpha_{21}(k) = [b(-k)/a(k)] = -[\bar{b}(k)/\bar{a}(k)] = -L(k)$, $\alpha_{22}(k) = [a(k)a(-k) - b(-k)b(k)]/a(k) = [|a(k)|^2 - |b(k)|^2]/a(k) = [1/a(k)] = T(k)$. Di conseguenza, si ha:

$$\begin{pmatrix} f_l(-k, x) \\ f_r(-k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(k) & -R(k) \\ -L(k) & T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r(k, x) \\ f_l(k, x) \end{pmatrix}.$$

Prendendo in considerazione i comportamenti asintotici delle soluzioni di Jost per $k \rightarrow \infty$, si ha il cosiddetto *problema di Riemann-Hilbert*:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{ikx} f_l(-k, x) \\ e^{-ikx} f_r(-k, x) \end{pmatrix}}_{\text{analitica in } k \in \mathbb{C}^-} = \underbrace{\begin{pmatrix} T(k) & -e^{2ikx} R(k) \\ -e^{-2ikx} L(k) & T(k) \end{pmatrix}}_{=\sigma_3 S(k; x) \sigma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{ikx} f_r(k, x) \\ e^{-ikx} f_l(k, x) \end{pmatrix}}_{\text{analitica in } k \in \mathbb{C}^+}, \quad (\text{VII.19})$$

dove $S(k; x) = \text{diag}(e^{ikx}, e^{-ikx})S(k)\text{diag}(e^{-ikx}, e^{ikx})$.

4. Equazione integrale di Marchenko. Prima di dedurre tale equazione si studiamo gli autovalori discreti dell'equazione di Schrödinger (VII.11).

Proposizione VII.4 *Gli zeri di $a(k)$ sono immaginari, semplici e finiti in numero. Quindi, questi zeri possono essere enumerati $i\kappa_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$), dove $\kappa_1 > \dots > \kappa_N > 0$.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione del fatto che gli zeri sono semplici e, nel caso eccezionale, sono finiti in numero.

Sia $a(k) = 0$ per $k = \gamma + i\kappa \in \mathbb{C}^+$, dove $\kappa > 0$. Dalla relazione Wronskiana (VII.18a) segue che $f_l(k, x)$ e $f_r(k, x)$ sono proporzionali: $f_l(k, x) = C f_r(k, x)$ per un'opportuna costante $C \neq 0$. Più esplicitamente, possiamo scrivere

$$\begin{cases} f_l(k, x) \sim e^{i\gamma x} e^{-\kappa x}, & x \rightarrow +\infty, \\ f_l(k, x) \sim C e^{-i\gamma x} e^{\kappa x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

e quindi $f_l(k, x)$ ha decadimento esponenziale per $x \rightarrow \pm\infty$. Ma in tal caso l'equazione di Schrödinger (VII.11) ha un autovalore k^2 che deve per forza essere negativo. Di conseguenza, gli zeri di $a(k)$ sono immaginari: $k = i\kappa$ per un'opportuna $\kappa > 0$.

Per motivi di analiticità, gli zeri di $a(k)$ si possono soltanto accumulare in zero e soltanto se ci sono infiniti zeri. Quest'ultimo non avviene nel caso generico, per cui $\lim_{k \rightarrow 0} [ka(k)] \neq 0$. \square

Il coefficiente di trasmissione ammette la seguente rappresentazione:

$$T(k) = T_0(k) + \sum_{s=1}^N \frac{\tau_s}{k - i\kappa_s},$$

dove $T_0(k)$ è continua in $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, è analitica in $k \in \mathbb{C}^+$ e tende ad 1 per $k \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$.

Il problema di Riemann-Hilbert (VII.19) implica:

$$\begin{aligned} e^{ikx} f_l(-k, x) &= T(k) e^{ikx} f_r(k, x) - e^{2ikx} R(k) [e^{-ikx} f_l(k, x)] \\ &= T_0(k) e^{ikx} f_r(k, x) + \sum_{s=1}^N \tau_s \frac{e^{ikx} f_r(k, x) - e^{-\kappa_s x} f_r(i\kappa_s, x)}{k - i\kappa_s} \\ &\quad + i \sum_{s=1}^N \frac{N_s e^{-2\kappa_s x} [e^{\kappa_s x} f_l(i\kappa_s, x)]}{k - i\kappa_s} - e^{2ikx} R(k) [e^{-ikx} f_l(k, x)], \end{aligned}$$

dove, per opportune *costanti di normalizzazione* N_s ($s = 1, 2, \dots, N$), si è posto⁴

$$\tau_s f_r(i\kappa_s, x) = i N_s f_l(i\kappa_s, x).$$

Rappresentiamo ora la soluzione di Jost $f_l(k, x)$ e il coefficiente di riflessione $R(k)$ tramite i seguenti integrali di Fourier:⁵

$$f_l(k, x) = e^{ikx} + \int_x^\infty dy e^{iky} K(x, y), \quad (\text{VII.20a})$$

$$R(k) = \int_{-\infty}^\infty d\alpha e^{-ik\alpha} \hat{R}(\alpha). \quad (\text{VII.20b})$$

Sostituendo (VII.20) nel problema di Riemann-Hilbert e osservando che la seconda riga della parte a destra ammette la rappresentazione di Fourier 1 +

⁴Si può dimostrare che le costanti di normalizzazione sono tutte positive. La dimostrazione si basa su: (a) la semplicità dei poli di $T(k)$, (b) la relazione di simmetria $T(-k^*)^* = T(k)$, e (c) il fatto che, per $s = 1, \dots, N$, $f_l(i\kappa_s, x)$ ha $s - 1$ zeri reali, tutti semplici.

⁵Abbiamo anche $f_r(k, x) = e^{-ikx} + \int_0^\infty dy e^{-iky} M(x, y)$ e $L(k) = \int_{-\infty}^\infty d\alpha e^{ik\alpha} \hat{L}(\alpha)$.

$\int_{-\infty}^0 dw e^{-ikw} f(x, w)$ per un'opportuna funzione $f(x, w)$, si ha:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^{\infty} dw e^{-ikw} K(x, x+w) &= 1 + \int_{-\infty}^0 dw e^{-ikw} f(x, w) \\ &- \int_0^{\infty} dw e^{-ikw} \sum_{s=1}^N N_s \left[e^{-\kappa_s(w+2x)} + \int_0^{\infty} dz e^{-\kappa_s(w+z+2x)} K(x, x+z) \right] \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-ikw} \left[\hat{R}(w+2x) + \int_0^{\infty} dz \hat{R}(w+z+2x) K(x, x+z) \right]. \end{aligned}$$

Limitandoci ai termini $\int_0^{\infty} dw [\dots]$ e strippando la trasformata di Fourier, per $w \geq 0$ si ottiene l'equazione integrale

$$\begin{aligned} K(x, x+w) &= - \sum_{s=1}^N N_s e^{-\kappa_s(w+2x)} + \int_0^{\infty} dz \sum_{s=1}^N N_s e^{-\kappa_s(w+z+2x)} K(x, x+z) \\ &- \hat{R}(w+2x) - \int_0^{\infty} dz \hat{R}(w+z+2x) K(x, x+z). \end{aligned}$$

Introducendo il *nucleo di Marchenko*

$$\Omega(w) = \hat{R}(w) + \sum_{s=1}^N N_s e^{-\kappa_s w}, \quad (\text{VII.21})$$

si perviene all'*equazione integrale di Marchenko*

$$K(x, y) + \Omega(x+y) + \int_x^{\infty} dz K(x, z) \Omega(z+y) = 0, \quad y > x. \quad (\text{VII.22})$$

Rimane da dedurre un'espressione per il potenziale $Q(x)$ una volta che sia nota la soluzione $K(x, y)$ di (VII.22). Sostituendo (VII.20a) in (VII.14a) si ha:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^{\infty} dw e^{ikw} K(x, x+w) &= 1 + \int_x^{\infty} dy \int_x^y dv e^{2ik(v-x)} Q(y) \left[1 + \int_0^{\infty} dz e^{ikz} K(y, y+z) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dw e^{ikw} \int_{x+\frac{1}{2}w}^{\infty} dy Q(y) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dw e^{ikw} \int_0^w dz \int_{x+\frac{1}{2}(w-z)}^{\infty} dy Q(y) K(y, y+z). \end{aligned}$$

Strippando la trasformata di Fourier, per $w \geq 0$ si ottiene:

$$K(x, x+w) = \frac{1}{2} \int_{x+\frac{1}{2}w}^{\infty} dy Q(y) + \frac{1}{2} \int_0^w dz \int_{x+\frac{1}{2}(w-z)}^{\infty} dy Q(y) K(y, y+z),$$

e quindi per $w \rightarrow 0^+$ si ha

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty dy Q(y).$$

Poichè $Q \in L^1(\mathbb{R})$, la funzione $K(x, x)$ è assolutamente continua (nel senso che è continua e derivabile quasi ovunque, con la derivata appartenente a $L^1(a, b)$ per ogni intervallo limitato (a, b)). Di conseguenza,

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (\text{VII.23})$$

5. Evoluzione nel tempo. Senza entrare nei dettagli, elenchiamo l'evoluzione temporale delle diverse quantità se il potenziale $Q(x, t)$ evolve nel tempo come se fosse una soluzione dell'equazione di Korteweg-de Vries.

- a. Gli autovalori discreti e quindi i poli $i\kappa_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) non dipendono da t . Non dipende da t neppure il coefficiente di trasmissione $T(k)$.
- b. $R(k; t) = e^{8ik^3t} R(k; 0)$ e $L(k; t) = e^{-8ik^3t} L(k; 0)$.
- c. $N_s(t) = e^{8\kappa_s^3t} N_s(0)$ per $s = 1, 2, \dots, N$.
- d. Il nucleo di Marchenko soddisfa la seguente equazione"

$$\Omega_t + 8\Omega_{xxx} = 0.$$

In forma schematica la IST può essere descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & \{R(k), \{\kappa_j, N_j\}_{j=1}^N\} \\ \text{KdV} \downarrow & & \downarrow \text{evoluzione nel tempo} \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & \{R(k)e^{8ik^3t}, \{\kappa_j, N_j e^{8\kappa_j^3t}\}_{j=1}^N\} \end{array}$$

Esempio VII.5 (Soluzione monosolitone) Consideriamo il nucleo di Marchenko

$$\Omega(x; t) = N_1 e^{-\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t},$$

dove κ_1 e N_1 sono costanti positive. Dalla(VII.22) segue

$$K(x, y; t) = -N_1 e^{-\kappa_1 y} e^{8\kappa_1^3 t} \underbrace{\left[e^{-\kappa_1 x} + \int_x^\infty dz e^{-\kappa_1 z} K(x, z; t) \right]}_{=L(x; t)}.$$

Dunque,

$$L(x; t) = e^{-\kappa_1 x} - N_1 e^{8\kappa_1^3 t} L(x; t) \int_x^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = e^{-\kappa_1 x} - \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t} L(x; t),$$

e quindi

$$L(x; t) = \frac{e^{-\kappa_1 x}}{1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}}.$$

Di conseguenza,

$$K(x, y; t) = -\frac{N_1 e^{-\kappa_1(x+y)} e^{8\kappa_1^3 t}}{1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}},$$

e, usando la (VII.20a),

$$\begin{aligned} f_l(k, x; t) &= e^{ikx} \left[1 - \frac{iN_1 e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}}{(k + i\kappa_1) \left[1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t} \right]} \right] \\ &= e^{ikx} \left[\frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1} + \frac{2i\kappa_1}{k + i\kappa_1} \frac{1}{1 + \frac{2\kappa_1}{N_1} e^{2\kappa_1 x} e^{-8\kappa_1^3 t}} \right] = e^{ikx} \left[\frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1} + o(1) \right], \end{aligned}$$

se $x \rightarrow -\infty$. Quindi $T(k; t) = \frac{k+i\kappa_1}{k-i\kappa_1}$ e $R(k; t) = L(k; t) = 0$. Inoltre, tramite la (VII.23),

$$Q(x; t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t) = \frac{-4\kappa_1 N_1 e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t}}{\left[1 + \frac{N_1}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} e^{8\kappa_1^3 t} \right]^2} = \frac{-2\kappa_1^2}{\cosh^2[\kappa_1(x - x_0 - 4\kappa_1^2 t)]},$$

essendo $x_0 = [\ln(N_1/2\kappa_1)]/2\kappa_1$. Si vede che $Q(x, t)$ rappresenta un solitone con ampiezza $2\kappa_1^2$ e velocità $4\kappa_1^2$. \square

4 Inverse scattering transform per la NLS

In questo paragrafo discuteremo la teoria di scattering del sistema di Zakharov-Shabat (ZS) e la risoluzione dell'equazione nonlineare di Schrödinger mediante l'inverse scattering transform.

1. Soluzioni di Jost. Consideriamo il sistema di Zakharov-Shabat

$$i\sigma_3 \frac{\partial X}{\partial x}(x, \lambda) - iQ(x)X(x, \lambda) = \lambda X(x, \lambda), \quad (\text{VII.24})$$

dove

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ r(x) & 0 \end{pmatrix},$$

i potenziali $q(x)$ e $r(x)$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$ e λ è un parametro spettrale. Nel caso *defocusing* si ha $r(x) = -q(x)^*$; nel caso *focusing* si ha $r(x) = q(x)^*$.

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo ora le cosiddette *funzioni di Jost dalla destra* $\bar{\psi}(x, \lambda)$ e $\psi(x, \lambda)$, le cosiddette *funzioni di Jost dalla sinistra* $\phi(x, \lambda)$ e $\bar{\phi}(x, \lambda)$ e le *matrici di Jost* $\Psi(x, \lambda)$ e $\Phi(x, \lambda)$ come le soluzioni della (VII.21) che verificano le seguenti condizioni asintotiche:

$$\Psi(x, \lambda) = (\bar{\psi}(x, \lambda) \quad \psi(x, \lambda)) = \begin{cases} e^{-i\lambda x \sigma_3} [I_2 + o(1)], & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-i\lambda x \sigma_3} [a_l(\lambda) + o(1)], & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (\text{VII.25a})$$

$$\Phi(x, \lambda) = (\phi(x, \lambda) \quad \bar{\phi}(x, \lambda)) = \begin{cases} e^{-i\lambda x \sigma_3} [a_r(\lambda) + o(1)], & x \rightarrow +\infty, \\ e^{-i\lambda x \sigma_3} [I_2 + o(1)], & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (\text{VII.25b})$$

Siccome il sistema di equazioni (VII.24) è di primo ordine, valgono le relazioni di proporzionalità

$$\Phi(\lambda, x) = \Psi(x, \lambda) a_l(\lambda), \quad \Psi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) a_r(\lambda), \quad (\text{VII.26})$$

per opportune *matrici di transizione* $a_l(\lambda)$ e $a_r(\lambda)$. Ovviamente

$$a_l(\lambda) a_r(\lambda) = a_r(\lambda) a_l(\lambda) = I_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Scrivendo (VII.24) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} X(y, \lambda)) = \sigma_3 e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} Q(y) X(y, \lambda)$$

e integrando rispetto ad y , si ha:

$$\Psi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x \sigma_3} - \sigma_3 \int_x^\infty dy e^{i\lambda(y-x)\sigma_3} Q(y) \Psi(y, \lambda), \quad (\text{VII.27a})$$

$$\Phi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x \sigma_3} + \sigma_3 \int_{-\infty}^x dy e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} Q(y) \Phi(y, \lambda). \quad (\text{VII.27b})$$

Iterando le due equazioni integrali (VII.27) si può dimostrarne l'esistenza della soluzione unica e la stima

$$\begin{aligned} \|\Psi(x, \lambda)\| &\leq \exp\left(\int_x^\infty dy \|Q(y)\|\right), \\ \|\Phi(x, \lambda)\| &\leq \exp\left(\int_{-\infty}^x dy \|Q(y)\|\right). \end{aligned}$$

Convertendo le due equazioni integrale (VII.27) in due famiglie di due equazioni integrali per ciascuna funzione di Jost, si ottengono le loro proprietà di

continuità e analiticità. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$ le funzioni colonna $e^{-i\lambda x}\psi(x, \lambda)$ e $e^{i\lambda x}\phi(x, \lambda)$ sono continue in $\lambda \in \mathbb{C}^+$, sono analitiche in $\lambda \in \mathbb{C}^+$ e tendono a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispettivamente se $\lambda \rightarrow \infty$ dal semipiano superiore chiuso. Analogamente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ le funzioni colonna $e^{i\lambda x}\bar{\psi}(x, \lambda)$ e $e^{-i\lambda x}\bar{\phi}(x, \lambda)$ sono continue in $\lambda \in \mathbb{C}^-$, sono analitiche in $\lambda \in \mathbb{C}^-$ e tendono a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente se $\lambda \rightarrow \infty$ dal semipiano inferiore chiuso.

Scrivendo il sistema di Zakharov-Shabat (VII.24) nella forma

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x, \lambda) = [-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)]X(x, \lambda),$$

si osservi che per $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)$ è antihermitiana nel caso focusing e σ_3 -antihermitiana (cioè, $\sigma_3[-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)]$ è antihermitiana) nel caso defocusing. Inoltre, $\text{Tr}[-i\lambda\sigma_3 + \sigma_3 Q(x)] = 0$. Di conseguenza, per $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ le matrici di Jost sono unitarie e hanno il determinante uguale ad 1 nel caso focusing [cioè, $\Psi(x, \lambda) \in SU(2)$ e $\Phi(x, \lambda) \in SU(2)$]. Nel caso defocusing esse sono σ_3 -unitarie e hanno il determinante uguale ad 1 [cioè, $\Psi(x, \lambda) \in SU(1, 1)$ e $\Phi(x, \lambda) \in SU(1, 1)$].⁶

Valgono le seguenti *rappresentazioni triangolari*

$$\Psi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} + \int_x^\infty dy \mathbf{K}(x, y)e^{-i\lambda y\sigma_3}, \quad (\text{VII.28a})$$

$$\Phi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} + \int_{-\infty}^x dy \mathbf{M}(x, y)e^{-i\lambda y\sigma_3}, \quad (\text{VII.28b})$$

dove per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\int_x^\infty dy \|\mathbf{K}(x, y)\| + \int_{-\infty}^x dy \|\mathbf{M}(x, y)\| < +\infty.$$

Convertendo le equazioni di Volterra (VII.27) in equazioni di Volterra per le funzioni nucleo $\mathbf{K}(x, y)$ e $\mathbf{M}(x, y)$, si possono dimostrare le seguenti identità:

$$q(x) = -2K_{12}(x, x), \quad r(x) = 2K_{21}(x, x), \quad (\text{VII.29a})$$

$$\int_x^\infty dz r(z)q(z) = -2K_{22}(x, x) = -2K_{11}(x, x). \quad (\text{VII.29b})$$

Nella stessa maniera si dimostra che

$$q(x) = 2M_{12}(x, x), \quad r(x) = -2K_{21}(x, x), \quad (\text{VII.30a})$$

$$\int_x^\infty dz r(z)q(z) = -2M_{22}(x, x) = -2M_{11}(x, x). \quad (\text{VII.30b})$$

⁶ $SU(1, 1)$ è il gruppo di Lie di tutte le matrici complesse U tali che $U^\dagger \sigma_3 U = \sigma_3$ e $\det U = 1$, essendo U^\dagger la trasposta coniugata di U . La corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ consiste in tutte le matrici complesse A per cui $\sigma_3 A$ è antihermitiana.

2. Equazioni di Marchenko. Riordinando le equazioni (VII.26), si ottiene

$$(\bar{\psi}(x, \lambda) \quad \bar{\phi}(x, \lambda)) = (\phi(x, \lambda) \quad \psi(x, \lambda)) \sigma_3 S(\lambda) \sigma_3, \quad (\text{VII.31})$$

dove $S(\lambda)$ si dice *matrice di scattering*, la parte a sinistra è continua in $\lambda \in \mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$ e analitica in $\lambda \in \mathbb{C}^-$ e il fattore sinistro della parte a destra è continuo in $\lambda \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ e analitico in $\lambda \in \mathbb{C}^+$. La matrice di scattering ha la forma

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T(\lambda) & L(\lambda) \\ R(\lambda) & T(\lambda) \end{pmatrix},$$

dove $T(\lambda)$, detta *coefficiente di trasmissione*, è meromorfa in $\lambda \in \mathbb{C}^+$ e $R(\lambda)$ e $L(\lambda)$, dette *coefficienti di riflessione*, sono continue in $\lambda \in \mathbb{R}$ e tendono a zero se $\lambda \rightarrow \pm\infty$.⁷ Scrivendo

$$R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\lambda y} \rho(y), \quad L(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\lambda y} \ell(y),$$

dove $\rho, \ell \in L^1(\mathbb{R})$, si possono dedurre le *equazioni di Marchenko*

$$\mathbf{K}(x, y) + \boldsymbol{\omega}_l(x + y) + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z) \boldsymbol{\omega}_l(z + y) = 0_{2 \times 2}, \quad (\text{VII.32a})$$

$$\mathbf{M}(x, y) + \boldsymbol{\omega}_r(x + y) + \int_{-\infty}^x dz \mathbf{M}(x, z) \boldsymbol{\omega}_r(z + y) = 0_{2 \times 2}, \quad (\text{VII.32b})$$

dove $\boldsymbol{\omega}_l(x + y)$ e $\boldsymbol{\omega}_r(x + y)$ anticommutano con σ_3 (cioè, sono matrici con elementi diagonali uguali a zero). Nel caso defocusing si ha

$$\boldsymbol{\omega}_l(x + y)^\dagger = \boldsymbol{\omega}_l(y + x), \quad \boldsymbol{\omega}_r(x + y)^\dagger = \boldsymbol{\omega}_r(y + x).$$

Nel caso focusing si ha invece

$$\boldsymbol{\omega}_l(x + y)^\dagger = -\boldsymbol{\omega}_l(y + x), \quad \boldsymbol{\omega}_r(x + y)^\dagger = -\boldsymbol{\omega}_r(y + x).$$

Nel caso defocusing si ha:

$$\boldsymbol{\omega}_l(x + y) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x + y)^* \\ \rho(x + y) & 0 \end{pmatrix},$$

⁷Ciò richiede l'ipotesi che gli elementi diagonali delle matrici di transizione $a_l(\lambda)$ e $a_r(\lambda)$ non si annullino. Nel caso defocusing l'ipotesi è sempre vera. Non è necessariamente vera nel caso focusing.

dove $R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\lambda y} \rho(y)$ verifica $|R(\lambda)| < 1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Nel caso focusing si ha invece:⁸

$$\omega_l(x+y) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y) + \sum_j c_j e^{i\lambda_j(x+y)} \\ -\rho(x+y)^* - \sum_j c_j^* e^{-i\lambda_j^*(x+y)} & 0 \end{pmatrix},$$

dove la sommatoria consiste in un numero finito di termini e le costanti di normalizzazione $c_j \neq 0$ e gli esponenti λ_j hanno parte immaginaria positiva.

Gli esponenti λ_j sono gli autovalori discreti del problema di Zakharov-Shabat (VII.24) nel semipiano superiore. Infatti, le funzioni di Jost $\psi(x, \lambda_j)$ e $\phi(x, \lambda_j)$ sono proporzionali e costituiscono la corrispondente autofunzione. Le costanti di normalizzazione c_j sono legate alle corrispondenti costanti di proporzionalità tra $\psi(x, \lambda_j)$ e $\phi(x, \lambda_j)$.

3. Inverse scattering transform. La IST per l'equazione nonlineare di Schrödinger

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2 r = 0, \quad (\text{VII.33a})$$

$$-ir_t + r_{xx} + 2qr^2 = 0, \quad (\text{VII.33b})$$

consiste nei seguenti passaggi:

1. **Scattering diretto.** A partire dai potenziali iniziali $q(x, 0)$ e $r(x, 0)$ si calcoli la matrice di Jost $\Psi(x, \lambda)$ e da essa, mediante la trasformata di Fourier, la funzione nucleo $\mathbf{K}(x, y)$. Poi si calcolino il coefficiente di riflessione $R(\lambda)$, gli autovalori discreti $\lambda_j \in \mathbb{C}^+$ e le corrispondenti costanti di normalizzazione c_j .
2. **Evoluzione temporale.** Si evolvono nel tempo il coefficienti di riflessione e le costanti di normalizzazione:

$$R(\lambda; t) = e^{4i\lambda^2 t} R(\lambda; t=0), \quad c_j(t) = e^{4i\lambda_j^2 t} c_j(t=0).$$

3. **Scattering inverso.** Si costruisca il nucleo di Marchenko:

$$\omega_l(x+y; t) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y; t) \\ \rho(x+y; t)^* & 0 \end{pmatrix}$$

nel caso defocusing e

$$\begin{aligned} & \omega_l(x+y; t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \rho(x+y; t) + \sum_j c_j(t) e^{i\lambda_j(x+y)} \\ -\rho(x+y; t)^* - \sum_j c_j(t)^* e^{-i\lambda_j^*(x+y)} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁸In generale, la sommatoria è $\sum_j \sum_{s=0}^{n_j-1} \frac{(x+y)^s}{s!} e^{i\lambda_j(x+y)}$. Nel presente contesto abbiamo semplificato la discussione delle equazioni di Marchenko.

nel caso focusing, dove

$$R(\lambda; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\lambda y} \rho(y; t).$$

Poi si risolve l'equazione di Marchenko

$$\mathbf{K}(x, y; t) + \boldsymbol{\omega}_l(x + y; t) + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z; t) \boldsymbol{\omega}_l(z + y; t) = 0_{2 \times 2}.$$

Infine si calcolino

$$q(x; t) = -2\mathbf{K}_{12}(x, x), \quad r(x; t) = 2\mathbf{K}_{21}(x, x).$$

4. La soluzione solitonica. In tal caso i coefficienti di riflessione si annullano: $R(\lambda) \equiv L(\lambda) = 0$. Inoltre, esiste un singolo autovalore discreto $\lambda_1 = ia = i(p + iq) \in \mathbb{C}^+$ [con $p, q \in \mathbb{R}$ e $p > 0$] con corrispondente costante di normalizzazione $0 \neq c \in \mathbb{C}$. Inoltre, ci troviamo nel caso focusing.

L'equazione di Marchenko ha la forma

$$\mathbf{K}(x, y; t) + \boldsymbol{\omega}_l(x + y; t) + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z; t) \boldsymbol{\omega}_l(z + y; t) = 0_{2 \times 2}, \quad (\text{VII.34})$$

dove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_l(x + y; t) &= \begin{pmatrix} 0 & ce^{-a(x+y)} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^*(x+y)} e^{4i[a^*]^2 t} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ce^{-ax} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^* x} e^{4i[a^*]^2 t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a^* y} & 0 \\ 0 & e^{-ay} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Risolviamo ora la (VII.34). Si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(x, y; t) &= - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & ce^{-ax} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^* x} e^{4i[a^*]^2 t} & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{\infty} dz \mathbf{K}(x, z; t) \begin{pmatrix} 0 & ce^{-az} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^* z} e^{4i[a^*]^2 t} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e^{-a^* y} & 0 \\ 0 & e^{-ay} \end{pmatrix} \\ &= -L(x, t) \begin{pmatrix} e^{-a^* y} & 0 \\ 0 & e^{-ay} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove

$$L(x, t) \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2p} e^{-2px} e^{-4ia^2 t} \\ -\frac{c^*}{2p} e^{-2px} e^{4i[a^*]^2 t} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ce^{-ax} e^{-4ia^2 t} \\ -c^* e^{-a^* x} e^{4i[a^*]^2 t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando che

$$\det L(x, t) = 1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4px} e^{16pqt} = 1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4p(x-4qt)} > 0,$$

si ottiene

$$L(x, t) = \frac{1}{\det L(x, t)} \begin{pmatrix} \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-a^*x} e^{16pqt} & ce^{-ax} e^{-4ia^2t} \\ -c^* e^{-a^*x} e^{4i[a^*]^2t} & \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-ax} e^{16pqt} \end{pmatrix}.$$

La funzione nucleo $\mathbf{K}(x, y; t)$ ha la forma

$$\mathbf{K}(x, y; t) = \frac{-1}{\det L(x, t)} \begin{pmatrix} \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-a^*(x+y)} e^{16pqt} & ce^{-a(x+y)} e^{-4ia^2t} \\ -c^* e^{-a^*(x+y)} e^{4i[a^*]^2t} & \frac{|c|^2}{2p} e^{-2px} e^{-a(x+y)} e^{16pqt} \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la (VII.29a) si arriva alla soluzione NLS

$$q(x, t) = \frac{2ce^{-2ax} e^{-4ia^2t}}{1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4p(x-4qt)}} = \frac{2ce^{-2p(x-4qt)} e^{-2iqx} e^{-4i(p^2-q^2)t}}{1 + \frac{|c|^2}{4p^2} e^{-4p(x-4qt)}}. \quad (\text{VII.35})$$

Moltiplicando numeratore e denominatore da $[2p/|c|]e^{2p(x-4qt)}$ e ponendo $x_0 = \frac{1}{2p} \ln(|c|/2p)$, si ottiene infine la soluzione solitonica

$$\boxed{q(x, t) = \frac{c}{|c|} \frac{2p e^{-2iqx} e^{-4i(p^2-q^2)t}}{\cosh[2p(x - x_0 - 4qt)]}}, \quad (\text{VII.36})$$

dove il fattore $c/|c|$ può essere tralasciato.

5 Superfici solitoniche

In questo paragrafo introdurremo le superfici solitoniche e le trasformazioni di Bäcklund con particolare enfasi sull'equazione NLS focusing. Seguiremo in gran parte l'articolo di Sym [30].

Nel contesto geometrico si introducono le due variabili $(x^1, x^2) = (x, t) \in \mathbb{R}^2$ e si trattano alla pari la posizione x e il tempo t . Le equazioni (VII.12) si possono scrivere nella forma tensoriale

$$\Psi_{,\mu} = g_\mu \Psi, \quad \mu = 1, 2, \quad (\text{VII.37})$$

dove $g_1 = X$ e $g_2 = T$ sono matrici $d \times d$. La condizione di compatibilità (VII.13), spesso chiamata "condizione di curvatura zero", ha la forma

$$g_{1,2} - g_{2,1} + [g_1, g_2] = 0,$$

dove supponiamo che le matrici g_1 e g_2 per $\lambda \in \mathbb{R}$ appartengano all'algebra di Lie \mathfrak{g} corrispondente al gruppo di Lie G . Sia N la dimensione del gruppo di Lie G [cioè, la dimensione dell'algebra di Lie \mathfrak{g} come spazio vettoriale reale]. Supponiamo inoltre che $\Psi(x^1, x^2; \lambda) \in G$ per ogni $(x^1, x^2, \lambda) \in \mathbb{R}^3$.

Nel caso NLS focusing [dove $r = -q^*$] stiamo parlando del gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie di ordine 2 con determinante +1 e dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ delle matrici complesse di ordine 2 che sono antihermitiane e hanno traccia uguale a zero. In tal caso

$$g_1 = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 2i\lambda^2 + i|q|^2 & 2\lambda q + iq_x \\ -2\lambda q^* + iq_x^* & 2i\lambda^2 - i|q|^2 \end{pmatrix},$$

appartengono a $\mathfrak{su}(2)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Siccome per $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (\Psi^{-1})_{,\mu} = -\Psi^{-1}\Psi_{,\mu}\Psi^{-1} = -\Psi^{-1}g_\mu, \\ (\Psi^\dagger)_{,\mu} = \Psi^\dagger g_\mu^\dagger = -\Psi^\dagger g_\mu, \end{cases}$$

risulta

$$(\Psi^\dagger\Psi)_{,\mu} = (\Psi^\dagger)_{,\mu}\Psi + \Psi^\dagger\Psi_{,\mu} = -\Psi^\dagger g_\mu\Psi + \Psi^\dagger g_\mu\Psi = 0_{2 \times 2}.$$

Inoltre, per ogni matrice costante nonsingolare C di ordine 2, $\tilde{\Psi} = \Psi C$ verifica le equazioni $\tilde{\Psi}_{,\mu} = g_\mu \tilde{\Psi}$ se Ψ verifica la (VII.37). Di conseguenza, si può scegliere la matrice d'onda Ψ nel gruppo $SU(2)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Infatti, scegliendo Ψ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\Psi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x \sigma_3} [I_2 + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty,$$

si ottiene una tale matrice d'onda appartenente a $SU(2)$. Si ricorda che $SU(2)$ è un gruppo di Lie di dimensione $N = 3$.⁹

Nel caso KdV [dove u è reale] stiamo parlando del gruppo $SL_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine 2 con determinante +1 e dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine 2 con traccia zero. In tal caso

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & u - \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx} \\ 4\lambda + 2u & -u_x \end{pmatrix},$$

appartengono a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Si può scegliere $\Psi(x, \lambda)$ in $SL_2(\mathbb{R})$. Si ricorda che $SL_2(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dimensione $N = 3$.¹⁰

Fissata $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la funzione

$$R(x^1, x^2; \lambda) = \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)$$

⁹Le matrici $i\sigma_1$, $i\sigma_2$ e $i\sigma_3$, dove $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono le cosiddette matrici di Pauli, costituiscono una base dello spazio vettoriale reale $\mathfrak{su}(2)$.

¹⁰Le matrici $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ costituiscono una base dello spazio vettoriale reale $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

appartiene al gruppo G e si dice *trasformazione di Pohlmeyer*. Si ha:

$$\begin{aligned}
R_{,\mu} &= (\Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1})_{,\mu} \Psi(x^1, x^2, \lambda) + \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\mu} \\
&= -\Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)_{,\mu} \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda) \\
&\quad + \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\mu} \\
&= -\Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} g_\mu(x^1, x^2, \lambda_0) \Psi(x^1, x^2, \lambda) \\
&\quad + \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} g_\mu(x^1, x^2, \lambda) \Psi(x^1, x^2, \lambda) \\
&= \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} [g_\mu(x^1, x^2, \lambda) - g_\mu(x^1, x^2, \lambda_0)] \Psi(x^1, x^2, \lambda_0) R(x^1, x^2; \lambda) \\
&= \Psi(x^1, x^2, \lambda_0)^{-1} [(\lambda - \lambda_0) g_\mu(x^1, x^2, \lambda_0)_{,\lambda} + \dots] \Psi(x^1, x^2, \lambda_0) R(x^1, x^2; \lambda).
\end{aligned}$$

Utilizzando il Teorema di Schwarz ($R_{,12} = R_{,21}$) si ha:

$$(\Psi^{-1} g_{1,\lambda} \Psi)_{,2} = (\Psi^{-1} g_{2,\lambda} \Psi)_{,1},$$

rendendo chiusa la forma differenziale

$$(\Psi^{-1} g_{1,\lambda} \Psi) dx^1 + (\Psi^{-1} g_{2,\lambda} \Psi) dx^2.$$

Poichè $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, esiste una funzione $\tau = \tau(x^1, x^2, \lambda)$ a valori in \mathfrak{g} tale che

$$\tau_{,\mu} = \Psi^{-1} g_{\mu,\lambda} \Psi.$$

Integrando quest'ultima equazione si ottiene¹¹

$$\tau = \Psi^{-1} \Psi_{,\lambda} + \text{cost.},$$

dove il termine costante appartiene a \mathfrak{g} . Per convenienza poniamo $\text{cost.} = 0 \in \mathfrak{g}$.

L'equazione

$$\tau = \tau(x^1, x^2, \lambda) = \Psi(x^1, x^2, \lambda)^{-1} \Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\lambda} \in \mathfrak{g} \quad (\text{VII.38})$$

si può interpretare come la rappresentazione in coordinate $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ di una superficie immersa nello spazio vettoriale \mathfrak{g} di dimensione N . Le superfici dipendono dal parametro spettrale $\lambda \in \mathbb{R}$ e si dicono *superfici solitoniche*.

Torniamo all'esempio NLS focusing, dove $N = 3$ è la dimensione dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$. La corrispondenza biunivoca

$$-\frac{i}{2}[c^1 \sigma_1 + c^2 \sigma^2 + c^3 \sigma^3] \iff \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.39})$$

¹¹Si ha: $\tau_{,\mu} = -\Psi^{-1} \Psi_{,\mu} \Psi^{-1} \Psi_{,\lambda} + \Psi^{-1} \Psi_{,\lambda \mu} = -\Psi^{-1} g_\mu \Psi_{,\lambda} + \Psi^{-1} (g_\mu \Psi)_{,\lambda} = \Psi^{-1} g_{\mu,\lambda} \Psi$.

tra $\mathfrak{su}(2)$ e lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 conduce ad un'immersione delle superfici solitoniche in \mathbb{R}^3 . Inoltre, il commutatore di due matrici appartenenti a $\mathfrak{su}(2)$ corrisponde al prodotto vettore delle loro immagini [tranne per un fattore -2]:

$$\left[-\frac{i}{2}(c^1\sigma_1 + c^2\sigma^2 + c^3\sigma^3), -\frac{i}{2}(c^1\sigma_1 + c^2\sigma^2 + c^3\sigma^3)\right] \iff (\mathbf{c} \times \mathbf{d}).$$

Di conseguenza, la (VII.39) costituisce un isomorfismo di Lie tra le algebre di Lie $\mathfrak{su}(2)$ e (\mathbb{R}^3, \times) .

Consideriamo ora due soluzioni Ψ e $\tilde{\Psi}$ della (VII.37) appartenenti al gruppo di Lie G . Allora la matrice

$$D = \tilde{\Psi}\Psi^{-1}$$

appartenente a G si chiama *matrice di Darboux*. Si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} D_{,\mu} &= \tilde{\Psi}_{,\mu}\Psi^{-1} + \tilde{\Psi}(\Psi^{-1})_{,\mu} = \tilde{\Psi}_{,\mu}\Psi^{-1} - \tilde{\Psi}\Psi^{-1}\Psi_{,\mu}\Psi^{-1} \\ &= g_\mu\tilde{\Psi}\Psi^{-1} - \tilde{\Psi}\Psi^{-1}g_\mu = g_\mu D - Dg_\mu. \end{aligned}$$

Le soluzioni di una tale equazione differenziale definiscono una cosiddetta *trasformazione di Bäcklund* dalla famiglia di superfici solitoniche (VII.38) alla nuova famiglia di superfici solitoniche

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(x^1, x^2, \lambda) = \tilde{\Psi}(x^1, x^2, \lambda)^{-1}\tilde{\Psi}(x^1, x^2, \lambda)_{,\lambda} \in \mathfrak{g}. \quad (\text{VII.40})$$

Concludiamo con un esercizio semplice. Consideriamo la soluzione $q \equiv 0$ dell'equazione NLS focusing. In tal caso

$$g_1 = -i\lambda\sigma_3, \quad g_2 = 2i\lambda^2\sigma_3,$$

ambidue appartenenti a \mathfrak{g} per $\lambda \in \mathbb{R}$. In tal caso otteniamo dalla (VII.37)

$$\Psi(x^1, x^2, \lambda) = e^{[-i\lambda x^1 + 2i\lambda^2 x^2]\sigma_3},$$

una matrice diagonale appartenente a $SU(2)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\tau(x^1, x^2, \lambda) = \Psi(x^1, x^2, \lambda)^{-1}\Psi(x^1, x^2, \lambda)_{,\lambda} = [-ix^1 + 4i\lambda x^2]\sigma_3 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^1 - 8\lambda x^2 \end{pmatrix},$$

la quale rappresenta una famiglia di superfici degeneri.

Appendice A

3-ciclo implica caos

Nel 1964 Šarkovs'kii [28] ha dimostrato il teorema di cui omettiamo la dimostrazione.¹ Introduciamo il seguente ordinamento dei numeri naturali:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & \triangleleft & 2 & \triangleleft & 2^2 & \triangleleft & 2^3 & \triangleleft & 2^4 & \triangleleft & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 2^3 \cdot 9 & \triangleleft & 2^3 \cdot 7 & \triangleleft & 2^3 \cdot 5 & \triangleleft & 2^3 \cdot 3 \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 2^2 \cdot 9 & \triangleleft & 2^2 \cdot 7 & \triangleleft & 2^2 \cdot 5 & \triangleleft & 2^2 \cdot 3 \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 2 \cdot 9 & \triangleleft & 2 \cdot 7 & \triangleleft & 2 \cdot 5 & \triangleleft & 2 \cdot 3 \\
 \dots & \dots & \dots & \triangleleft & 9 & \triangleleft & 7 & \triangleleft & 5 & \triangleleft & 3.
 \end{array}$$

Teorema A.1 (Šarkovs'kii) *Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che la F abbia un k -ciclo. Allora la F ha un l -ciclo per ogni intero l tale che $l \triangleleft k$. In particolare, se esiste un 3-ciclo per la F , allora esiste un l -ciclo per qualunque intero l .*

Il teorema implica l'esistenza di un ciclo di periodo doppio $2p$ se ne esiste uno di periodo p se essa non è una potenza di due. Inoltre, se esiste un ciclo di periodo $p = 2^m q$ ($m = 0, 1, 2, \dots, q > 1$ dispari), allora esiste un ciclo di periodo $2^n r$ per qualunque $n = 0, 1, 2, \dots$ e qualunque numero dispari $r > q$. Il teorema non vale per le mappe $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ multidimensionali.

Esempio A.2 Sia $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$F(x) = \frac{1-x}{1+ax}$$

per un'opportuna costante $a > 0$. In tal caso $\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}$ è l'unico punto fisso. Inoltre,

$$F^2(x) = F(F(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+ax}}{1 + a \frac{1-x}{1+ax}} = x.$$

¹Una dimostrazione elementare si trova in [23, 9], anche [12, Sec. 1.10]

Dunque, tutti i punti di $[0, 1]$ tranne $\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}$ hanno periodo 2. Non ci sono punti di altro periodo. \square

Esempio A.3 Consideriamo la mappa $F : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x + 7, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora

$$F^2(x) = F(F(x)) = \begin{cases} -2x + 5, & 1 \leq x \leq 2, \\ 4x - 7, & 2 \leq x \leq 2.5, \\ -2x + 8, & 2.5 \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$F^3(x) = F(F^2(x)) = \begin{cases} 4x - 3, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ -2x + 6, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ 4x - 6, & 2 \leq x \leq 2.25, \\ -8x + 21, & 2.25 \leq x \leq 2.5, \\ 4x - 9, & 2.5 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora F ha il punto fisso $\frac{7}{3}$, F^2 ha i punti fissi $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$ e $\frac{8}{3}$, e F^3 ha i punti fissi 1, 2, $\frac{7}{3}$ e 3. Quindi ci sono due punti di periodo 2 e tre punti di periodo 3. Secondo il Teorema di Šarkovs'kii esistono punti di qualunque periodo. \square

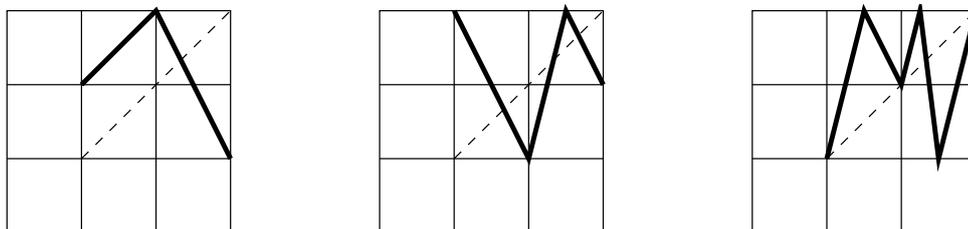


Figura A.1: La mappa F e il suo secondo e terzo iterato.

Esempio A.4 Esistono degli esempi di mappe unidimensionali che hanno punti di equilibrio di periodo 5 ma non di periodo 3. A tal proposito, si consideri la mappa $F : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -x + 7, & 2 \leq x \leq 3, \\ -2x + 10, & 3 \leq x \leq 4, \\ -x + 6, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Allora la F è continua con un unico punto di equilibrio $10/3$. Si verifica che

$$F^2(x) = F(F(x)) = \begin{cases} -4x + 8, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ -2x + 5, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ 4x - 10, & 3 \leq x \leq 3.5, \\ 2x - 3, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ -2x + 13, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

È abbastanza facile (ma impegnativo) determinare il terzo iterato F^3 . Infatti,

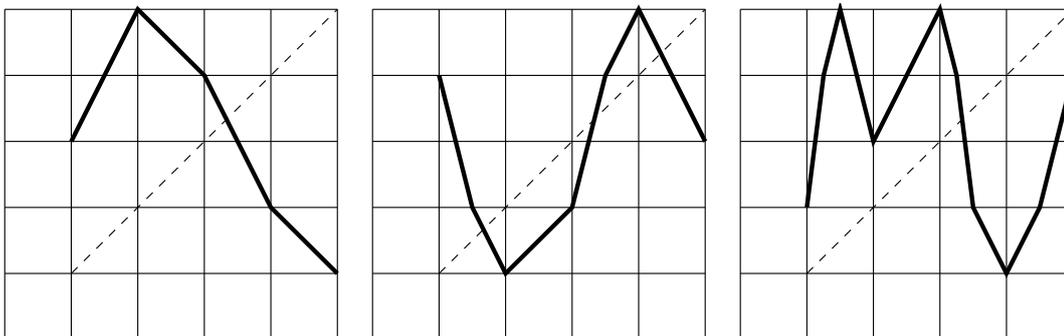


Figura A.2: Grafici delle mappe F , F^2 e F^3 [12]. I punti fissi sono i seguenti: $\frac{10}{3}$ per la F , $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{3}$ e $\frac{13}{3}$ per la F^2 e $\frac{10}{3}$ per la F^3 . Inoltre, $F(\frac{5}{3}) = \frac{13}{3}$ e $F(\frac{13}{3}) = \frac{5}{3}$.

si ha:

$$F^3(x) = F(F^2(x)) = \begin{cases} 8x - 6, & 1 \leq x \leq 1.25, \\ 4x - 1, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ -4x + 11, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ 2x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ -4x + 17, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ -8x + 30, & 3.25 \leq x \leq 3.5, \\ -2x + 9, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ 2x - 7, & 4 \leq x \leq 4.5, \\ 4x - 16, & 4.5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Siccome la F^3 ha un singolo punto di equilibrio (che, per forza, condivide con la F), non esistono punti di periodo 3 della F .

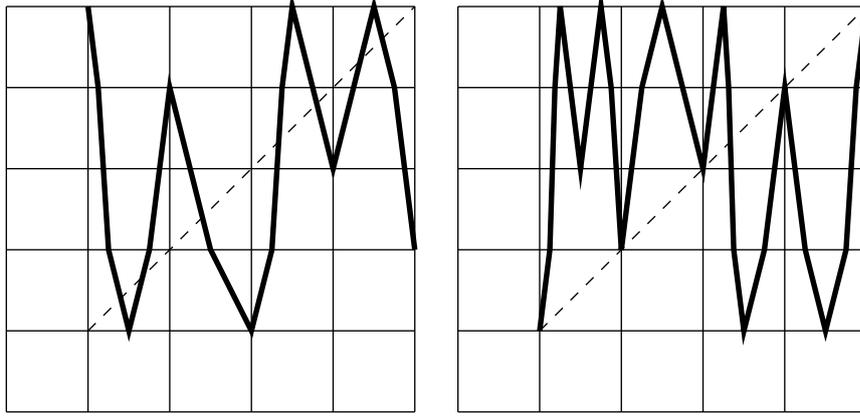


Figura A.3: Grafici delle mappe F^4 e F^5 . I punti fissi sono i seguenti: $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{19}{5}$, $\frac{13}{3}$ e $\frac{23}{5}$ per la F^4 e 1, 2, 3, $\frac{10}{3}$, 4 e 5 per la F^5 .

Bisogna ora trovare i punti fissi di F^5 e trovare un 5-ciclo per la F . Consideriamo ora la F^4 (il quarto iterato della F):

$$F^4(x) = F^2(F^2(x)) = \begin{cases} -8x + 13, & 1 \leq x \leq 1.125, \\ -16x + 22, & 1.125 \leq x \leq 1.25, \\ -4x + 7, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ 4x - 5, & 1.5 \leq x \leq 1.75, \\ 8x - 12, & 1.75 \leq x \leq 2, \\ -4x + 12, & 2 \leq x \leq 2.5, \\ -2x + 7, & 2.5 \leq x \leq 3, \\ 4x - 11, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ 16x - 50, & 3.25 \leq x \leq 3.375, \\ 8x - 23, & 3.375 \leq x \leq 3.5, \\ -4x + 19, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ 4x - 13, & 4 \leq x \leq 4.5, \\ -4x + 23, & 4.5 \leq x \leq 4.75, \\ -8x + 42, & 4.75 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

mentre

$$\frac{7}{5} \xrightarrow{F} \frac{19}{5} \xrightarrow{F} \frac{12}{5} \xrightarrow{F} \frac{23}{5} \xrightarrow{F} \frac{7}{5};$$

$$\frac{5}{3} \xrightarrow{F} \frac{13}{3} \xrightarrow{F} \frac{5}{3}.$$

Quindi abbiamo trovato, oltre al punto fisso $\frac{10}{3}$, un 4-ciclo e un 2-ciclo. Inoltre,

$$F^5(x) = F^2(F^3(x)) = \begin{cases} 8x - 7, & 1 \leq x \leq 1.125, \\ 32x - 34, & 1.125 \leq x \leq 1.1875, \\ 16x - 15, & 1.1875 \leq x \leq 1.25, \\ -8x + 15, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ 8x - 9, & 1.5 \leq x \leq 1.75, \\ -8x + 19, & 1.75 \leq x \leq 1.875, \\ -16x + 34, & 1.875 \leq x \leq 2, \\ 8x - 14, & 2 \leq x \leq 2.25, \\ 4x - 5, & 2.25 \leq x \leq 2.5, \\ -4x + 15, & 2.5 \leq x \leq 3, \\ 8x - 21, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ -16x + 57, & 3.25 \leq x \leq 3.3125, \\ -32x + 110, & 3.3125 \leq x \leq 3.375, \\ -8x + 29, & 3.375 \leq x \leq 3.5, \\ 4x - 13, & 3.5 \leq x \leq 3.75, \\ 8x - 28, & 3.75 \leq x \leq 4, \\ -8x + 36, & 4 \leq x \leq 4.25, \\ -4x + 19, & 4.25 \leq x \leq 4.5, \\ 4x - 17, & 4.5 \leq x \leq 4.75, \\ 16x - 74, & 4.75 \leq x \leq 4.875, \\ 8x - 35, & 4.875 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

mentre

$$1 \xrightarrow{F} 3 \xrightarrow{F} 4 \xrightarrow{F} 2 \xrightarrow{F} 5 \xrightarrow{F} 1.$$

Quindi i punti fissi della F^5 sono gli interi 1, 2, 3, 4, 5 più il punto fisso $\frac{10}{3}$ della F . Di conseguenza, la F ha il punto fisso $\frac{10}{3}$, i due punti $\frac{5}{3}$ e $\frac{13}{3}$ di periodo 2, nessun punto di periodo 3, i punti $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{19}{5}$ e $\frac{23}{5}$ di periodo 4 e i punti 1, 2, 3, 4, 5 di periodo 5. Secondo il Teorema di Šarkovs'kii esistono punti di qualunque periodo tranne 3. \square

Il teorema di Šarkovs'kii vale soltanto per le funzioni continue che trasformano un intervallo della retta reale in se stesso. Non vale per i domini multidimensionali e neppure per le circonferenze. Per esempio, per la rotazione antiorario di angolo $2\pi/3$ l'intera circonferenza consiste di punti di periodo 3, non ci sono punti di altri periodi o punti aperiodici.

Presentiamo ora una dimostrazione parziale del teorema di Sarkovskii. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con 3-ciclo (a, b, c) , dove $a < b < c$, $f(a) = b$, $f(b) = c$, e $f(c) = a$. Allora il teorema del valor medio implica che $f([a, b]) \supset [b, c]$. In tal caso esiste un intervallo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tale che $f([\alpha, \beta]) = [b, c]$. Infatti, si può prendere $\alpha = \max\{x \in [a, b] : f(x) = b\}$ e $\beta = \min\{x \in [a, b] : f(x) = c\}$. Quindi $f^2(\alpha) = c$ e $f^2(\beta) = a$ implicano l'esistenza di $x \in (\alpha, \beta)$ tale che $f^2(x) = x$. Siccome $f(x) \in f((\alpha, \beta)) \subset [b, c]$, si ha $f(x) \neq x$. Di conseguenza, $x \in (\alpha, \beta)$ genera un 2-ciclo. Ripetendo lo stesso ragionamento per f^{3k+2} (per $k = 0, 1, 2, \dots$) anzicchè f^2 , esiste $y \in (\alpha, \beta)$ che genera un p -ciclo per ogni numero **PRIMO** $p = 3k + 2$. Ciò include i casi $p = 2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, \dots$. Nel caso in cui $f(a) = c$, $f(c) = b$, e $f(b) = a$, facciamo lo stesso ragionamento per la funzione $g(x) = -f(-x)$, con $\{-c, -b, -a\}$ al posto di $\{a, b, c\}$. Di conseguenza, se esiste un 3-ciclo per una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora esistono anche p -cicli per ogni numero primo p per cui $[(p - 2)/3]$ è un intero.

Appendice B

Gruppi di Lie

In questo capitolo discuteremo i gruppi di Lie e le corrispondenti algebre di Lie. Ci limiteremo ai gruppi di matrici [6], evitando il linguaggio delle varietà riemanniane.

1 Algebre di Lie

Sia V uno spazio vettoriale reale. Allora V si dice *algebra di Lie* se in V viene anche definita un'operazione bilineare $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, il cosiddetto *bracket di Lie*, con le seguenti proprietà:

- (a) (*antisimmetria*) $[x, y] = -[y, x]$ per tutti gli $x, y \in V$;
- (b) (*identità di Jacobi*)

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad x, y, z \in V.$$

Per esempio, tutti gli spazi vettoriali di matrici reali o complesse $d \times d$ sono algebre di Lie rispetto al bracket *commutatore*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Un altro esempio viene fornito dallo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con prodotto vettore

$$[x, y] = x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Un sottospazio lineare di W dell'algebra di Lie V è detto *sottoalgebra di Lie* di V se $[x, y] \in W$ per tutti gli $x, y \in V$, e *ideale di Lie* in V se $[x, z] \in W$ per ogni $x \in W$ e $z \in V$. Un esempio importante di un ideale di Lie in V è il centro

$$A(V) = \{x \in V : [x, z] = 0 \text{ per ogni } z \in V\}.$$

Si dice *omomorfismo di Lie* una trasformazione $V : V \rightarrow W$ tra algebre di Lie che è una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriali reali V e W e verifica

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = [x, y], \quad x, y \in V.$$

Un omomorfismo di Lie biunivoco si chiama un *isomorfismo di Lie*.

2 Algebra di Lie di un gruppo di matrici

Sia G un gruppo di matrici $d \times d$ rispetto al solito prodotto di matrici e supponiamo che G sia chiuso nell'anello $M_d(\mathbb{C})$ di tutte le matrici complesse $d \times d$. Allora è detto *spazio tangente alla matrice identità* oppure *algebra di Lie* di G lo spazio vettoriale \mathfrak{g} composto delle derivate $\gamma'(0)$ di tutte le curve derivabili $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ tali che $\gamma(0)$ è la matrice identità. Quindi per ogni curva derivabile $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ con $\gamma(0)$ uguale alla matrice identità si ha:

$$\gamma(t) = I_d + t\gamma'(0) + o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Le derivate $\gamma'(0)$ costituiscono gli elementi dell'algebra di Lie di G . È detta *dimensione* del gruppo G la dimensione dello spazio vettoriale \mathfrak{g} come spazio vettoriale **reale**. Infatti, se $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ sono due curve di classe C^1 tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_d$, $\gamma_1'(0) = A \in \mathfrak{g}$ e $\gamma_2'(0) = B \in \mathfrak{g}$, allora per $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ definita da $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ si ha:

$$\gamma'(0) = \gamma_1'(0)\gamma_2(0) + \gamma_1(0)\gamma_2'(0) = A + B \in \mathfrak{g}.$$

Inoltre, per $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e $\delta(t) = \varphi(ct)$ per $t \in (-\frac{\varepsilon}{|c|}, \frac{\varepsilon}{|c|})$ si ha:

$$\delta'(0) = c\gamma'(0).$$

In altre parole, \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale reale.

Consideriamo ora le curve $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_d$, $\gamma_1'(0) = A$ e $\gamma_2'(0) = B$. Definiamo la funzione $F : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow G$ definita da

$$F(s, t) = \gamma_1(s)\gamma_2(t)\gamma_1(s)^{-1} \in G.$$

Per ogni $s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ la curva $F(s, \cdot) : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow G$ verifica

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, 0) = \gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} \in \mathfrak{g}, \quad s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1).$$

Siccome \mathfrak{g} è un sottospazio chiuso di $M_d(\mathbb{C})$, si ha

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} - \gamma_2'(0)}{s} \in \mathfrak{g},$$

se esiste tale limite. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} - \gamma_2'(0)}{s} &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \gamma_1(s)\gamma_2'(0)\gamma_1(s)^{-1} \right|_{s=0} \\ &= \gamma_1'(0)\gamma_2'(0)\gamma_1(0)^{-1} - \gamma_1(0)\gamma_2'(0)\gamma_1(0)^{-1}\gamma_1'(0)\gamma_1(0)^{-1} \\ &= \gamma_1'(0)\gamma_2'(0) - \gamma_2'(0)\gamma_1'(0) \\ &= [\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)] = [A, B] \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

il che mostra che \mathfrak{g} è un'algebra di Lie.

Si può inoltre dimostrare che

$$\mathfrak{g} = \{A \in M_d(\mathbb{C}) : e^{tA} \in G \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}\}.$$

Indicando la parte a destra da $\tilde{\mathfrak{g}}$, si può considerare la curva $\gamma(t) = e^{tA} \in G$ e dimostrare che $A = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}$. La dimostrazione dell'inclusione contraria $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ non è del tutto banale [6].

Dimostriamo ora il seguente lemma.

Lemma B.1 Per ogni matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ di ordine n si ha

$$\det e^A = \exp(\text{Tr } A),$$

dove $\text{Tr } A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ è la somma degli autovalori di A .

Dimostrazione. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A , allora $\exp(\lambda_i)$ ($i = 1, \dots, n$) sono gli autovalori di e^A . Il lemma segue dal fatto che il determinante di una matrice è il prodotto dei suoi autovalori.

Se A non è diagonalizzabile, esistono una matrice invertibile K e una matrice nilpotente N tali che $A = K^{-1}\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)K + N$ e $SN = NS$. In tal caso

$$e^A = K^{-1}\text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})K e^N.$$

Ne segue:

$$\det e^A = \frac{1}{\det(K)} e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \det(K) \det e^N = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \exp(\text{Tr } A),$$

poichè ogni matrice nilpotente N ha traccia zero. Quest'ultimo segue dal fatto che tutti gli autovalori di N sono uguali a zero. \square

Esempio B.2 Calcoliamo ora le algebre di Lie di alcuni gruppi di matrici.

- (a) Sia $G = GL_d(\mathbb{R})$ il gruppo di tutte le matrici reali non singolari. Allora $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine d . Quindi $\dim GL_d(\mathbb{R}) = d^2$.

- (b) Se $G = GL_d(\mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici complesse non singolari di ordine d , allora $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine d . Quindi $\dim GL_d(\mathbb{C}) = 2d^2$.
- (c) Se $G = SL_d(\mathbb{R})$ è il gruppo di tutte le matrici reali con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine d e traccia zero. Quindi $\dim SL_d(\mathbb{R}) = d^2 - 1$.
- (d) Se $G = SL_d(\mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici complesse con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine d e traccia zero. Quindi $\dim SL_d(\mathbb{C}) = 2(d^2 - 1)$.
- (e) Sia $G = SO(d)$ è il gruppo di tutte le matrici ortogonali con determinante uguale ad 1. Allora $\mathfrak{so}(d)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche ($A^T = -A$) di ordine d . Siccome una matrice reale e antisimmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ soddisfa $a_{11} = \dots = a_{dd} = 0$, abbiamo $\dim SO(d) = 1 + 2 + \dots + (d - 1) = \frac{1}{2}d(d - 1)$.
- (f) Sia $G = SU(d)$ è il gruppo di tutte le matrici unitarie con determinante uguale ad 1. Allora $\mathfrak{su}(d)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse A tali che $A^* = -A$ e $\text{Tr } A = 0$. Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari con somma zero, abbiamo $\dim SU(d) = 2[1 + 2 + \dots + (d - 1)] + (d - 1) = d^2 - 1$.
- (g) Sia $G = O(d)$ è il gruppo di tutte le matrici ortogonali di ordine d . Allora $\mathfrak{o}(d)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche ($A^T = -A$) di ordine d . Abbiamo $\dim O(d) = \frac{1}{2}d(d - 1)$. Quindi $O(d)$ e $SO(d)$ hanno la stessa algebra di Lie, essendo $SO(d)$ il componente connesso di I_d in $O(d)$.
- (h) Sia $G = U(d)$ è il gruppo di tutte le matrici unitarie. Allora $\mathfrak{u}(d)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse A tali che $A^* = -A$. Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari, abbiamo $\dim U(d) = 2[1 + 2 + \dots + (d - 1)] + d = d(d - 1) + d = d^2$.
- (i) Sia $G = SU(1, 1) = \{U \in M_2(\mathbb{C}) : U^* \sigma_3 U = \sigma_3, \det(U) = 1\}$ è il gruppo delle matrici σ_3 -unitarie con determinante 1, essendo $\sigma_3 = \text{diag}(1, -1)$. Allora la sua algebra di Lie ha la forma

$$\mathfrak{su}(1, 1) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* = -\sigma_3 A \sigma_3, \text{Tr } A = 0\}.$$

Quindi $\dim SU(1, 1) = 3$.

(j) Sia $G = \text{Lor} = \{U \in M_4(\mathbb{R}) : U^T G U = G, \det U = 1, u_{00} \geq 1\}$ è il gruppo di Lorentz. Allora la sua algebra di Lie ha la forma

$$\begin{aligned} \text{lor} &= \{A \in M_4(\mathbb{R}) : GAG = -A^T\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : (GA)^T = -GA\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{01}, a_{03}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi $\dim \text{Lor} = 6$.

Ad ogni gruppo di Lie G si possono associare $N = \dim G$ generatori: Una base qualsiasi $\{S_i : i = 1, 2, \dots, \dim G\}$ dell'algebra di Lie \mathfrak{g} (considerato come spazio vettoriale reale) si dice sistema di *generatori* di G . Siccome i commutatori $[S_i, S_j]$ appartengono all'algebra di Lie \mathfrak{g} , si ha la *relazione di chiusura* (inglese: closure relation)

$$[S_i, S_j] = \sum_{k=1}^N c_{ij}^k S_k$$

per opportune *costanti di struttura* (inglese: structure constants) reali del gruppo G . Dall'antisimmetria del commutatore segue l'antisimmetria

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \quad (\text{B.1})$$

Applicando l'identità di Jacobi

$$[[S_i, S_j], S_k] + [[S_j, S_k], S_i] + [[S_k, S_i], S_j] = 0$$

segue

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^N (c_{ij}^m [S_m, S_k] + c_{jk}^m [S_m, S_i] + c_{ki}^m [S_m, S_j]) \\ &= \sum_{m,n=1}^N (c_{ij}^m c_{mk}^n S_n + c_{jk}^m c_{mi}^n S_n + c_{ki}^m c_{mj}^n S_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n) S_n. \end{aligned}$$

Dall'indipendenza lineare dei vettori S_n segue la relazione

$$\sum_{m=1}^N (c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n) = 0. \quad (\text{B.2})$$

3 Alcuni esempi dettagliati

SO(2). Consideriamo ora il gruppo $SO(2)$ delle matrici ortogonali di ordine 2 con determinante uguale ad 1. Allora la sua algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$ è composta da tutte le matrici reali antisimmetriche, cioè

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ic\sigma_2 : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

mentre $SO(2)$ è un gruppo di Lie che dipende da un singolo parametro t :

$$SO(2) = \{R(t) : t \in \mathbb{R}\}, \quad R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{it\sigma_2}.$$

La matrice $i\sigma_2$ si dice *generatore* di $SO(2)$.

SO(3). Consideriamo ora il gruppo $SO(3)$ delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante uguale ad 1. L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ del gruppo $SO(3)$ delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante uguale ad 1 consiste nelle matrici reali e antisimmetriche. Quindi

$$\mathfrak{so}(3) = \{i[c_1S_x + c_2S_y + c_3S_z] : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\},$$

dove le matrici iS_x , iS_y e iS_z definite dalle identità

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ e si dicono *generatori* di $SO(3)$. Inoltre, il gruppo $SO(3)$ può essere espresso mediante tre gruppi di un parametro nei seguenti sei modi:

$$\begin{aligned} SO(3) &= \{R_x(\psi_1)R_y(\theta_1)R_z(\varphi_1) : \psi_1, \theta_1, \varphi_1 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_x(\psi_2)R_z(\varphi_2)R_y(\theta_2) : \psi_2, \theta_2, \varphi_2 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_3)R_x(\psi_3)R_z(\varphi_3) : \psi_3, \theta_3, \varphi_3 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_4)R_z(\varphi_4)R_x(\psi_4) : \psi_4, \theta_4, \varphi_4 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_5)R_x(\psi_5)R_y(\theta_5) : \psi_5, \theta_5, \varphi_5 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_6)R_y(\theta_6)R_x(\psi_6) : \psi_6, \theta_6, \varphi_6 \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

In queste espressioni $R_x(\psi)$, $R_y(\theta)$ e $R_z(\varphi)$ sono rotazioni intorno alle assi x, y, z :

$$\begin{aligned} R_x(\psi) &= e^{i\psi S_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) &= e^{i\theta S_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ R_z(\varphi) &= e^{i\varphi S_z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mentre $(\psi_k, \theta_k, \varphi_k)$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sono gli angoli di Eulero della rotazione. Gli angoli di Eulero dipendono dall'ordine in cui le rotazioni elementari vengono applicate per ottenere la rotazione.

Il *tensore di Levi-Civita* ε_{ijk} viene ora introdotto come le costanti di struttura di $SO(3)$ (rispetto al sistema di generatori $\{S_x, S_y, S_z\}$):

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk} S_k, \quad (\text{B.4})$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se non tutti i pedici i, j, k sono diversi e¹

$$\varepsilon_{xyz} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{yzx} = -\varepsilon_{zyx} = 1, \quad \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{zyx} = 1.$$

$SU(2)$. Il gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie di ordine 2 con determinante uguale ad 1 ha la forma

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \sin \eta \\ -e^{-i\zeta} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} : \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

dove ξ, η, ζ sono i cosiddetti parametri di Cayley-Klein. Introducendo le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ogni elemento di $SU(2)$ si può scrivere come il prodotto delle tre matrici $U_j(a_j) = \exp(ia_j \sigma_j)$ ($j = 1, 2, 3$), dove $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ dipendono dall'ordine dei tre fattori.

¹Si osservi che $[S_x, S_y] = -[S_y, S_x] = iS_z$, $[S_y, S_z] = -[S_z, S_y] = iS_x$ e $[S_z, S_x] = -[S_x, S_z] = iS_y$.

Le tre matrici $i\sigma_j$ ($j = 1, 2, 3$) costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(2) &= \{i[a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3] : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ i \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

e si dicono *generatori* di $SU(2)$. Una rotazione generale in $SU(2)$ ha la forma

$$\begin{aligned}U(\alpha, \beta, \gamma) &= U_z\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_y\left(\frac{\beta}{2}\right)U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos\frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sin\frac{\beta}{2} \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sin\frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{B.6}$$

che coincide con l'espressione nella (B.5) per i parametri di Cayley-Klein $\xi = (\gamma + \alpha)/2$, $\eta = \beta/2$ e $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$.

Il *tenore di Levi-Civita* ε_{ijk} viene ora introdotto come meno il doppio delle costanti di struttura di $SU(2)$ (rispetto al sistema di generatori $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$):

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k,\tag{B.7}$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se non tutti i pedici i, j, k sono diversi e²

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = 1.$$

$SU(1, 1)$. Il gruppo $SU(1, 1)$ delle matrici σ_3 -unitarie di ordine 2 con determinante uguale ad 1 ha la forma

$$\begin{aligned}SU(1, 1) &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cosh \eta & e^{i\zeta} \sinh \eta \\ e^{-i\zeta} \sinh \eta & e^{-i\xi} \cosh \eta \end{pmatrix} : \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 = 1 + |b|^2 \right\},\end{aligned}\tag{B.8}$$

dove ξ, η, ζ sono analoghi ai cosiddetti parametri di Cayley-Klein. Le tre matrici σ_1, σ_2 e $i\sigma_3$ costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(1, 1) &= \{a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + ia_3\sigma_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ia_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -ia_3 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

²Si osservi che $[\sigma_1, \sigma_2] = -[\sigma_2, \sigma_1] = 2i\sigma_3$, $[\sigma_2, \sigma_3] = -[\sigma_3, \sigma_2] = 2i\sigma_1$ e $[\sigma_3, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_3] = 2i\sigma_2$.

e si dicono *generatori* di $SU(1,1)$. Una rotazione generale in $SU(1,1)$ ha la forma

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \gamma) &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\beta}{2} & \sinh \frac{\beta}{2} \\ \sinh \frac{\beta}{2} & \cosh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cosh \frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sinh \frac{\beta}{2} \\ e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sinh \frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cosh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

che coincide con l'espressione nella (B.8) per i parametri di Cayley-Klein $\xi = (\gamma + \alpha)/2$, $\eta = \beta/2$ e $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$.

Si ha infine

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, i\sigma_3] = -2\sigma_1, \quad [i\sigma_3, \sigma_1] = -2\sigma_2.$$

Quindi le costanti di struttura c_{ijk} nell'identità $[s_i, s_j] = \sum_k c_{ijk} s_k$ (essendo $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_2$ e $s_3 = i\sigma_3$) si annullano se i, j, k non sono tutti diverse e verificano $c_{123} = -c_{213} = 2i$, $c_{231} = -c_{321} = c_{312} = -c_{132} = -2$.

La somiglianza tra le (B.4) e (B.7) suggerisce di collegare i gruppi $SU(2)$ e $SO(3)$ facendo corrispondere le rispettive basi $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e $\{2S_x, 2S_y, 2S_z\}$ delle algebre di Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$, cioè utilizzando la trasformazione lineare biunivoca

$$\begin{cases} \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(3), \\ i[c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3] \mapsto 2[c_1S_x + c_2S_y + c_3S_z]. \end{cases}$$

Si osservi che tale trasformazione Φ non influisce sui commutatori:

$$[\Phi(A), \Phi(B)] = \Phi([A, B]), \quad A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

Ora costruiamo un omomorfismo di gruppi $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$:

$$\varphi(e^A) = e^{\Phi(A)}, \quad A \in \mathfrak{su}(2). \quad (\text{B.10})$$

Applicando la (B.10) si ha

$$\begin{aligned} e^{it\sigma_1} &= \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R_x(2t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}, \\ e^{it\sigma_2} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R_y(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}, \\ e^{it\sigma_3} &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R_z(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si vede subito che φ non è biunivoca, malgrado il fatto che Φ lo è. Il raddoppio dell'angolo da t a $2t$ implica che

$$\varphi(e^{it\sigma_j}) = \varphi(e^{i[t+\pi]\sigma_j}), \quad j = 1, 2, 3.$$

In particolare, calcolando $e^{it\sigma_j}$ per $t = \pi$ (che risulta ad essere uguale a meno la matrice identità) si vede che $\varphi(-I_2) = I_3$. L'omomorfismo φ è infatti due a uno: Le matrici $\pm U$ in $SU(2)$ hanno lo stesso immagine sotto φ . Passando ad un gruppo quoziente di $SU(2)$ si ha

$$\frac{SU(2)}{\{I_2, -I_2\}} \simeq SO(3).$$

Purtroppo $SU(2)/\{I_2, -I_2\}$ non è un gruppo di Lie.

Invece della φ , si può utilizzare la trasformazione lineare biunivoca

$$\begin{cases} \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(3), \\ i[c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3] \mapsto 2[c_1S_y + c_2S_z + c_3S_x], \end{cases}$$

che conduce ad un altro omomorfismo di Lie $\tilde{\Phi} : SU(2) \rightarrow SO(3)$ che soddisfa $\tilde{\Phi}(e^A) = e^{\tilde{\varphi}(A)}$.

Appendice C

Forma Normale di Jordan

È noto che non tutte le matrici complesse quadrate sono diagonalizzabili. È anche noto che tutte le matrici hermitiane e unitarie sono diagonalizzabili. In questa appendice introduciamo la forma normale di Jordan che ci consentirà di descrivere le proprietà di una matrice che rimangono invarianti sotto una similarità $A \mapsto S^{-1}AS$. Infine si dimostra che ogni matrice complessa A può essere scritta come una somma $A = S + N$ di una matrice diagonalizzabile S e una matrice nilpotente N per cui $SN = NS$.

1 Catene di Jordan

Sia A una trasformazione lineare in F^n , essendo $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$. Allora lo string $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ si dice *catena di autovettori e autovettori generalizzati* (oppure: *catena di Jordan*) di A corrispondente all'autovalore λ se

$$x_0 \neq 0, \quad Ax_0 = \lambda x_0, \quad Ax_1 = \lambda x_1 + x_0, \quad \dots, \quad Ax_{m-1} = \lambda x_{m-1} + x_{m-2}.$$

In tal caso i vettori x_0, x_1, \dots, x_{m-1} della catena di *lunghezza* m sono linearmente indipendenti.

Infatti, se esistessero scalari c_0, c_1, \dots, c_{m-1} tale che

$$c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_{m-1}x_{m-1} = 0,$$

allora, applicando $A - \lambda I_n$ una, due, tre, fino ad $m - 2$ volte, otterremmo

$$\begin{aligned} c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \dots + c_{m-2}x_{m-2} + c_{m-1}x_{m-1} &= 0, \\ c_1x_0 + c_2x_1 + c_3x_2 + c_4x_3 + \dots + c_{m-2}x_{m-3} + c_{m-1}x_{m-2} &= 0, \\ c_2x_0 + c_3x_1 + c_4x_2 + \dots + c_{m-2}x_{m-4} + c_{m-1}x_{m-3} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ c_{m-1}x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Poichè $x_0 \neq 0$, si ha $c_{m-1} = 0$ e, quindi, $c_{m-2} = \dots = c_1 = c_0 = 0$. Di conseguenza, i vettori della catena di Jordan $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ sono linearmente indipendenti.

Sia $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ una catena di Jordan corrispondente all'autovalore λ di A . Allora,

$$(A - \lambda I_n)x_0 = (A - \lambda I_n)^2 x_1 = \dots = (A - \lambda I_n)^m x_{m-1} = 0.$$

Dunque, per $j = 0, 1, \dots, m-1$ si ha:

$$x_j \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^{j+1}, \quad x_j \notin \text{Ker}(A - \lambda I_n)^j,$$

essendo $\text{Ker } T = \{x \in F^n : Tx = 0\}$ il kernel della trasformazione lineare T .

Consideriamo ora, come esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{Tr } A = 0$ e $\det(A) = 0$. Allora l'unico autovalore è $\lambda = 0$ e l'unico autovettore è (proporzionale a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si vede facilmente che A trasforma il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e quest'ultimo nel vettore zero. Quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una catena di Jordan di A corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$.

Siano $\{x_0^s, x_1^s, \dots, x_{m_s-1}^s\}$ alcune, r , catene di Jordan di A , di lunghezze $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$, tali che x_0^1, \dots, x_0^r sono linearmente indipendenti. Allora l'unione

$$\{x_j^s : j = 0, 1, \dots, m_s - 2, s = 1, 2, \dots, r\}$$

di tutte le r catene di Jordan è linearmente indipendente. Infatti, sia

$$\sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{m_s-1} c_{s,j} x_j^s = 0.$$

Applicando $A - \lambda I_n$ ripetutamente, otteniamo una combinazione lineare degli autovettori linearmente indipendenti x_0^s , e dunque i corrispondenti coefficienti si annullano. Arretrando lungo le successive combinazioni lineari ottenute applicando $A - \lambda I_n$, risultano nulli tutti gli altri coefficienti.

Si vede subito che

$$A = S + N, \quad SN = NS,$$

dove

$$S = K [\lambda_1 I_{m^1} \oplus \dots \oplus \lambda_r I_{m^r}] K^{-1}$$

è diagonalizzabile e

$$N = K [J_{m^1}(0) \oplus \dots \oplus J_{m^r}(0)] K^{-1}$$

è nilpotente di grado $m = \max(m^1, \dots, m^r)$.

Ci rimane a dimostrare che la decomposizione additiva $A = S + N$ è unica. Infatti, supponiamo che λ non sia un autovalore di S . Risolvendo l'equazione $(\lambda I_n - A)x = b$ si ha:

$$x = (\lambda I_n - S)^{-1}b + (\lambda I_n - S)^{-1}Nx.$$

Moltiplicando quest'equazione da N ripetutamente, si ottiene

$$x = \sum_{j=0}^{r-1} (\lambda I_n - S)^{-j-1} N^j b + (\lambda I_n - S)^{-r} N^r x.$$

Utilizzando che $N^r = 0_{n \times n}$ per un opportuno intero r , si vede che λ non è un autovalore di A e che

$$(\lambda I_n - A)^{-1}b = \sum_{j=0}^{r-1} (\lambda I_n - S)^{-j-1} N^j b.$$

Quindi ogni autovalore di A è autovalore di S . Scambiando i ruoli di A e S si vede che anche ogni autovalore di S è un autovalore di A e che

$$(\lambda I_n - S)^{-1}b = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j (\lambda I_n - A)^{-j-1} N^j b.$$

Di conseguenza, per ogni autovalore λ_0 di A e di S i risolventi $(\lambda I_n - S)^{-1}$ e $(\lambda I_n - A)^{-1}$ hanno lo stesso residuo $P(\lambda_0)$ in $\lambda = \lambda_0$. Tali residui sono proiezioni disgiunte tra loro la cui somma vale la matrice identità. Quindi

$$S = \sum_{\lambda_0} \lambda_0 P(\lambda_0), \quad N = A - S,$$

il che dimostra l'unicità di S e N .

5 Dimostrazione del Lemma III.6

In questo paragrafo dimostriamo il seguente teorema. Ciò dimostra inoltre il lemma utilizzato nella dimostrazione del Teorema di Perron III.5.

Teorema C.1 *Se A è una matrice $n \times n$ che ha soltanto autovalori con parte reale negativa, allora esiste un prodotto scalare $[\cdot, \cdot]$ rispetto a cui A è negativa definita nel senso che*

$$[Ax, x] + [x, Ax] \leq -\delta[x, x], \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Se A è una matrice reale, allora il prodotto scalare può essere scelto reale.

Dimostrazione. Sia A una matrice diagonale: $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dove $\text{Re } \lambda_j < 0$ ($j = 1, \dots, n$). Allora A è negativa definita rispetto al solito prodotto scalare di \mathbb{C}^n [oppure: \mathbb{R}^n se ogni λ_j è reale]: $(Ax, x) + (x, Ax) = 2 \sum_{j=1}^n (\text{Re } \lambda_j) |x_j|^2$. Invece, se $A = K \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) K^{-1}$ è diagonalizzabile, allora A è negativa definita rispetto al prodotto scalare

$$[x, y] = (K^{-1}x, K^{-1}y) \tag{C.1}$$

nel senso che $[Ax, x] + [x, Ax] = 2 \sum_{j=1}^n (\text{Re } \lambda_j) |x_j|^2$.

Supponiamo ora che A non è necessariamente diagonalizzabile ma ha soltanto autovalori con parte reale negativa. Utilizzando la base di Jordan, si può scrivere A in forma normale di Jordan. Inoltre, se $\varepsilon > 0$ e x_0, \dots, x_{m-1} è una catena di Jordan che fa parte della base di Jordan, allora, utilizzando la base contenente $y_j = [x_j/\varepsilon^j]$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$), si scrive A nella forma normale

$$J = \bigoplus_{j=1}^r \{ \lambda_j I_{m_j} + \varepsilon J_{m_j}(0) \}.$$

Si noti che gli elementi 1 nel sovradiagonale sono stati convertiti in elementi ε . Prendiamo ora

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^r \end{pmatrix},$$

dove $\mathbf{x}^j \in \mathbb{C}^j$ ($j = 1, \dots, r$). Allora

$$\begin{aligned}
(J\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, J\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^r ([\lambda_j I_{m_j} + \varepsilon J_{m_j}(0)] \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) + \sum_{j=1}^r (\mathbf{x}^j, [\lambda_j I_{m_j} + \varepsilon J_{m_j}(0)] \mathbf{x}^j) \\
&= 2(\operatorname{Re} \lambda) \sum_{j=1}^r \|\mathbf{x}^j\|^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j-1} (x_k^j x_{k+1}^j + x_{k+1}^j x_k^j) \\
&\leq 2((\operatorname{Re} \lambda) + \varepsilon^2) \sum_{j=1}^r \|\mathbf{x}^j\|^2 = 2((\operatorname{Re} \lambda) + \varepsilon^2) \|\mathbf{x}\|^2.
\end{aligned}$$

Per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, J è negativa definita rispetto al solito prodotto scalare. Di conseguenza, per un tale ε , A è negativa definita rispetto al prodotto scalare (C.1).

Dato il prodotto scalare del Teorema C.1, esiste un'unica matrice positiva definita Q tale che

$$[x, y] = (Qx, y), \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

In altre parole, $QA + A^\dagger Q$ è hermitiana con soltanto autovalori negativi rispetto al solito prodotto scalare. Se inoltre A è una matrice reale, si può prendere invece di Q la matrice composta da tutte le parti reali degli elementi di Q e quella composta da tutte le parti immaginarie. \square

Appendice D

Esercizi

SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO:

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali utilizzando il valor iniziale da costante di integrazione. Inoltre, determinare i punti di equilibrio e discuterne la natura.

a. $\dot{y} = e^y - 1$.

b. $\dot{y} = 1 - e^y$.

c. $\dot{y} = y^2(y - 2)$.

d. Al variare di $m \in \mathbb{R}$: $\dot{y} = y^3 - 2y^2 + my$.

e. $\dot{y} = -\sin(y)$.

f. $\dot{y} = -\tan(y)$.

2. Determinare la natura del punto di equilibrio $(0, 0)$ per i seguenti sistemi dinamici:

a. $\dot{x} = 2x + 3y, \dot{y} = -x - y$.

b. $\dot{x} = 4x - 3y, \dot{y} = -8x - y$.

c. $\dot{x} = -3x + 4y, \dot{y} = -2x + 3y$.

d. $\dot{x} = -3x + y, \dot{y} = -x - y$.

e. $\dot{x} = 3x + y, \dot{y} = x + 3y$.

f. $\dot{x} = -2x + 3y, \dot{y} = 3x - 2y$.

g. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + 2y$.

h. $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$.

3. Determinare la natura del punto di equilibrio $(0, 0)$ per le seguenti equazioni differenziali:

- a. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$.
- b. $\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = 0$.
- c. $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$.
- d. $\ddot{x} + 16x = 0$.
- e. $\ddot{x} - 16\dot{x} = 0$.
- f. $\ddot{x} - 12\dot{x} + 45x = 0$.
- g. $\ddot{x} + 12\dot{x} + 36x = 0$.

4. Dimostrare che la funzione

$$E(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

è una costante del moto per il sistema dinamico

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = 2x + y.$$

5. Per una matrice reale A di ordine n si consideri il sistema dinamico

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}.$$

Sia E una matrice reale e simmetrica di ordine n , cioè $E^T = E$. Mostrare che

$$e(\vec{x}) = \vec{x}^T E \vec{x}$$

è una costante del moto del sistema dinamico $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ se e solo se

$$EA + A^T E = 0_{n \times n}.$$

6. Classificare i punti di equilibrio e, col metodo di linearizzazione, determinarne la natura per il seguente sistema dinamico:

- a. $\dot{x} = x^2 + y, \dot{y} = x - y^2$.
- b. $\dot{x} = x + y^2 - 2, \dot{y} = x + y$.
- c. $\dot{x} = -x + x^2 y, \dot{y} = 2 - 2y$.
- d. $\dot{x} = -x + 2x^3 y^2, \dot{y} = -y$.
- e. $\dot{x} = y - x^3, \dot{y} = -x^5$.
- f. Al variare di $k \in \mathbb{R}$: $\dot{x} = y - xy^2, \dot{y} = -x + ky - y^3$ (soltanto per il punto di equilibrio all'origine).
- g. $\dot{x} = x(y^2 - 1), \dot{y} = y(x^2 - 1)$.

7. Applicare il metodo di Liapunov per studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$\dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -x^5.$$

Perchè non ci sono orbite chiuse? Quale risultato si otterrebbe utilizzando il metodo di linearizzazione?

8. Per una funzione reale $g \in C^1(\mathbb{R})$ che è positiva per $y \neq 0$ e verifica $g(0) = 0$, si consideri, per $k > 0$, l'equazione differenziale

$$\ddot{y} + k\dot{y} + g(y) = 0.$$

Determinare i punti di equilibrio e loro natura. Dimostrare la non esistenza di orbite chiuse e darne l'interpretazione fisica.

9. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - 2y), \\ \dot{y} = y(-1 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

10. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(12 - 2y - 3x), \\ \dot{y} = y(-19 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

11. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - 2y - 3x), \\ \dot{y} = y(-1 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

12. Studiare, per i seguenti sistemi dinamici, i punti di equilibrio e loro natura.

a. $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy.$

b. $\dot{x} = e^y, \dot{y} = e^y \cos(x).$

c. $\dot{x} = e^y \sin(x), \dot{y} = e^y \cos(x).$

13. Dimostrare che il sistema dinamico non autonomo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2t y(t), \\ \dot{y}(t) = 2t x(t), \end{cases}$$

ha orbite chiuse che non corrispondono a soluzioni periodiche.

14. Passando alle coordinate polari si studiano i punti di equilibrio e le orbite del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - y)(x^2 + y^2 - 1) - 2y, \\ \dot{y} = (y - x)(x^2 + y^2 - 1) + 2x. \end{cases}$$

15. Che cosa significa geometricamente per il sistema dinamico

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{F}(\vec{y}),$$

che $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$? Che cosa si può dire degli attractor? Rispondere alle stesse domande se $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$.

16. Studiare, per i seguenti sistemi dinamici, i punti di equilibrio e loro natura.

- a. $\dot{x} = \arctan(x^2 + \lambda x + 9)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
- b. $\dot{x} = \arctan(x^4 + \lambda x^2 + 9)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
- c. $\dot{x} = x(\lambda - \sin(x))$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = -\dot{U}(x), \quad U(x) = -2 \cos(3x).$$

Scrivendo quest'equazione come un sistema dinamico, determinare i punti di equilibrio, trovare una costante del moto (cioè, l'energia totale) e studiare le orbite (usando gli insiemi di livello $\{x \in \mathbb{R} : U(x) = c\}$).

18. Applicare il Teorema di Floquet al sistema dinamico

$$\dot{\vec{x}}(t) = \cos^2(2t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

In particolare, trovare il periodo delle soluzioni periodiche.

19. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(8 - 2y - 3x), \\ \dot{y} = y(-13 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

20. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = x(8 - 3y - 2x), \\ \dot{y} = y(-13 + 3x + 5y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio.

21. Consideriamo il seguente modello per certe reazioni chimiche:¹

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (b + 1)x + x^2y, \\ \dot{y} = bx - x^2y, \end{cases}$$

dove a, b sono costanti positive. Esaminare il modello per la presenza di biforcazioni di Hopf. In particolare,

- a. Trovare il punto di equilibrio e linearizzare il sistema attorno al punto.
- b. Descrivere l'andamento dell'equilibrio al crescere di b , tenendo costante a .

22. Consideriamo il seguente modello di Selkov:

$$\dot{x} = -x + ay + x^2y, \quad \dot{y} = b - ay - x^2y,$$

dove a e b sono costanti positive. Esaminare il modello per la presenza di biforcazioni di Hopf. In particolare,

- a. Trovare il punto di equilibrio e linearizzare il sistema attorno al punto.
- b. Descrivere l'andamento dell'equilibrio al crescere di b , tenendo costante a .

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO:

1. Studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

nei seguenti casi:

- a. $A = c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, al variare della costante $c > 0$. Per quale valore di c ci sono p -cicli?

¹Il modello, il cosiddetto "brusselator", è stato formulato da Ilya Prigogine [1917-2003].

b. $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Ci sono p -cicli?

c. $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$. Ci sono p -cicli?

d. $A = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, al variare di $c > 0$.

e. $A = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, al variare di $c > 0$.

2. Studiare la (in)stabilità del sistema dinamico $z_{n+1} = \alpha z_n$ nel piano complesso nei seguenti casi:

a. $\alpha = \frac{1}{2}c(-1 + i\sqrt{3})$ al variare di $c > 0$.

b. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}c(-1 + i)$ al variare di $c > 0$.

c. $\alpha = \frac{1}{5}c(-3 + 4i)$ al variare di $c > 0$.

Per quali valori di $c > 0$ ci sono p -cicli?

3. Studiare la (in)stabilità delle seguenti equazioni alle differenze:

a. $x_{n+2} = x_n - x_{n+1}$.

b. $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1})$.

c. $x_{n+3} = c^3 x_n$, al variare di $c > 0$.

d. $x_{n+2} = -x_n + c x_{n+1}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4. Si consideri la relazione di ricorrenza

$$P_{n+2}(x) = \frac{2x}{n+2}P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x),$$

dove $-1 \leq x \leq +1$. Per quali valori di x ci sono p -cicli?

5. Per $\omega > 0$ si consideri l'equazione alle differenze

$$x_{n+2} = -\omega^2 x_n.$$

Trovare tutte le soluzioni e tutti i p -cicli? Studiarne la (in)stabilità. Che cosa cambierebbe se aggiungessimo un termine di attrito ($k > 0$):

$$x_{n+2} = -kx_{n+1} - \omega^2 x_n?$$

6. Si consideri il sistema dinamico

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n},$$

dove $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dimostrare, per induzione, che

$$x_n = \frac{n - (n-1)x_0}{n+1 - nx_0}.$$

e quindi che $x_n \rightarrow 1$ se $n \rightarrow +\infty$. Per quali valori iniziali x_0 avremmo qualche problema nel dimostrare una tale convergenza?

7. Si consideri il seguente analogo dello shift di Bernouilli:

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 3\theta_n, & 0 \leq \theta_n < \frac{1}{3}, \\ 3\theta_n - 1, & \frac{1}{3} \leq \theta_n < \frac{2}{3}, \\ 3\theta_n - 2, & \frac{2}{3} \leq \theta_n < 1. \end{cases}$$

Determinare i p -cicli.

8. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ il cerchio unitario nel piano complesso e sia $F : S^1 \rightarrow S^1$ la rotazione

$$F(z; m) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)z, \quad z \in S^1,$$

essendo $m = 1, 2, 3, \dots$ un parametro. Descrivere i p -cicli della mappa.

9. Si consideri la funzione continua $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} 2rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2r(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

dove $0 < r \leq 1$ è un parametro. Determinare i punti di equilibrio e determinarne, al variare di r , la (in)stabilità. Determinarne i 2-cicli? Per quali valori di r esistono p -cicli per ogni p ?

10. Si consideri il sistema dinamico

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + [x_n]^2},$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Trovare i punti di equilibrio e studiarne la (in)stabilità. Suggerimento: Scrivere $x_n = \tanh(w_n)$.

11. Sia $\phi : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ la mappa $\phi(x) = \ln(x)/x$. Si consideri la seguente mappa $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$:

$$\phi(f(x)) = \phi(x),$$

dove $f(x) \geq e$ per $1 < x \leq e$ e $1 < f(x) \leq e$ se $x \geq e$. Trovare tutti i punti fissi e tutti i 2-cicli e determinarne la (in)stabilità.

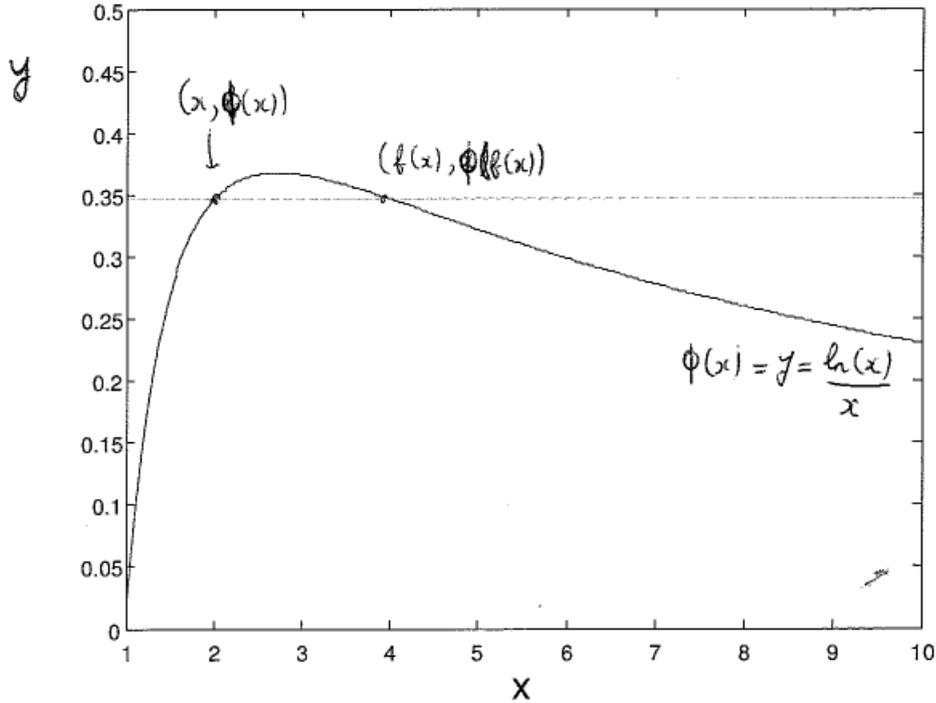


Figura D.1: La definizione della funzione f . Si noti che $f(2) = 4$ e $f(4) = 2$.

12. Per $\alpha = p + iq$ e $\beta = r + is$ (con $p, q, r, s \in \mathbb{R}$) si consideri il sistema dinamico

$$z_{n+1} = \alpha z_n + \beta \bar{z}_n$$

nel piano complesso. Dimostrare che il sistema dinamico è asintoticamente stabile se e solo se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} p+r & -q+s \\ q+s & p-r \end{pmatrix}$$

ha soltanto autovalori di modulo strettamente minore di 1. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico per $(x_n, y_n)^T$, dove $z_n = x_n + iy_n$.

13. La risoluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}(t) = f(x)$ col metodo alle differenze finite conduce, per $h > 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$, al sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n).$$

Determinare le condizioni su $f'(0)$ e h sotto cui il punto fisso $X = 0$ è asintoticamente stabile.

14. Determinare il bacino di attrazione del punto fisso $X = 0$ per il sistema dinamico²

$$x_{n+1} = x_n - hx_n^3,$$

dove $h > 0$. Trovare i 2-cicli e determinarne la (in)stabilità.

15. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

dove $F : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$ è definita da $F(x) = \sqrt{6 + \frac{3}{2}x}$. Verificare se la F è una contrazione e, in tal caso, trovare il punto fisso. Studiare la sua (in)stabilità.

16. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} = -y_n(x_n^2 + y_n^2). \end{cases}$$

Determinare i punti fissi, bacini di attrazione e cicli, più loro (in)stabilità. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico nel piano complesso.

17. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^2 + y_n^2 - 1), \\ y_{n+1} = y_n(x_n^2 + y_n^2 - 1). \end{cases}$$

Determinare i punti fissi, bacini di attrazione e cicli, più loro (in)stabilità. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico nel piano complesso.

18. Per $h > 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ si consideri il sistema dinamico

$$y_{n+1} = y_n + hf'(y_n + hf'(y_n)),$$

il metodo predictor-corrector” per risolvere l’equazione differenziale $\dot{y} = f(y)$ numericamente. Dimostrare la stabilità del punto di equilibrio $Y = 0$ nel caso $f(y) = -y^3$. Suggerimento: Partendo dal dato iniziale y_0 con $h[y_0]^2 < 1$, si dimostra che $0 < y_{n+1} < y_n$ oppure $0 > y_{n+1} > y_n$.

19. Considerando la mappa $f_c(z) = z^2 + c$ e il sistema dinamico discreto $z_{n+1} = f_c(z_n)$, rispondere alle seguenti domande:

²Un tale sistema dinamico risulta risolvendo l’equazione differenziale $\dot{x}(t) = -x^3$, di soluzione $x(t) = x(0)/\sqrt{1 + 2tx(0)^2}$, alle differenze finite.

- a. Calcolare l'insieme di Julia (riempito) per $c = 0$. Dimostrare che $c = 0$ appartiene all'insieme di Mandelbrot.
- b. Sia $c > \frac{1}{4}$. Dimostrare che, partendo da $z_0 \in \mathbb{R}$, la successione $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ è crescente e tende a $+\infty$. Dimostrare che l'insieme di Julia è sconnesso e quindi che un tale c non appartiene all'insieme di Mandelbrot.
- b. Sia $c < -2$. Dimostrare che, partendo da z_0 immaginaria, la successione $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ è decrescente e tende a $-\infty$. Dimostrare che l'insieme di Julia è sconnesso e quindi che un tale c non appartiene all'insieme di Mandelbrot.

FRATTALI

1. Siano $x \simeq 0, d_1 d_2 \dots$ e $y \simeq 0, c_1 c_2 \dots$ due numeri diversi nell'insieme di Cantor K . Dimostrare che

$$\frac{2}{3^{m+1}} \leq |x - y| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^m},$$

essendo $m + 1 = \min\{j : d_j \neq c_j\}$. Dimostrare che, per x e y che non sono estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione di K ,

$$\frac{1}{2^{m+1}} \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^m},$$

essendo $m + 1 = \min\{j : d_j \neq c_j\}$. Di conseguenza, $\phi : K \rightarrow [0, 1]$ (e anche la sua estensione naturale a $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$) è una funzione continua.

2. Utilizzando le due selfsimilarity ψ_1 e ψ_2 dell'insieme di Cantor K , si dimostra che

$$N_K\left(\frac{1}{3}\rho\right) = N_{\psi_1(K)}\left(\frac{1}{3}\rho\right) + N_{\psi_2(K)}\left(\frac{1}{3}\rho\right) = N_K(\rho), \quad 0 < \rho < \frac{1}{2}.$$

Siccome $N_{\psi_j(K)}\left(\frac{1}{3}\rho\right) = N_K(\rho)$ per $j = 1, 2$ e $0 < \rho < 1$, ne segue la dimensione di Hausdorff di K . Fornire i dettagli.

Bibliografia

- [1] M.J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, London Mathematical Society Lecture Notes Series **302**, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1964.
- [3] D.V. Anosov and V.I. Arnol'd, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. **1**, Springer Verlag, New York & Berlin, 1985.
- [4] V.I. Arnol'd, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. **6**, Springer Verlag, New York & Berlin, 1985.
- [5] V.I. Arnol'd, *Teoria delle Catastrofi*, Bollati Boringhieri, Torino, 1986.
- [6] A. Baker, *Matrix Groups*, Springer Verlag, New York & Berlin, 2001.
- [7] P. Bourke, *An introduction to fractals*, 1991. Vedi il seguente sito Internet: <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracintro/>
- [8] M. Bramanti, C.D. Pagani, and S. Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli, Bologna, 2009.
- [9] K. Burns and B. Hasselblatt, *The Sharkovsky theorem: A natural direct proof*, American Mathematical Monthly **118**, 229–244 (2011).
- [10] K. Chadan and P.C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, Second Ed., Springer Verlag, New York & Berlin, 1989.
- [11] Cheng Zhang, *Period three begins*, Mathematics Magazine **83**(4), 295–297 (2010).
- [12] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading MA, 1989.

- [13] P.G. Drazin, *Nonlinear Systems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [14] Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [15] L.D. Faddeev, *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation*, American Mathematical Society Translations **2**, 139–166 (1964); also: Trudy Mat. Inst. Steklova **73**, 314–336 (1964) [Russian].
- [16] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [17] F.R. Gantmacher, *Matrix Theory*, Vols. I-II, Chelsea Publ., American Mathematical Society, 1959.
- [18] J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, London, 1987.
- [19] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko, *Meccanica Classica*, Seconda Edizione, Zanichelli, Bologna, 2005.
- [20] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1998.
- [21] L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Fisica Teorica. I. Meccanica*, Editori Riuniti, University Press, Roma, 2009.
- [22] Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume Primo, Volume Secondo Parte Prima, Volume Secondo Parte Seconda, Zanichelli, Bologna, 1974.
- [23] Tien-Yien Li and James A. Yorke, *Period three implies chaos*, American Mathematical Monthly **82**, 985–992 (1975).
- [24] J. Nagata, *Modern Dimension Theory*, Heldermann Verlag, Berlin, 1964.
- [25] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*. Princeton Mathematical Series, No. **22**, pg. 523 e seguenti. Princeton University Press, Princeton, 1960.
- [26] C.D. Pagani and S. Salsa, *Analisi Matematica*, vol. **2**, Masson, Roma, 1994.
- [27] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York & Berlin, 1991.

- [28] A.N. Sharkovskii, *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself*, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering **5**, 1263–1273 (1995); also: Ukrain. Mat. Zh. **16**, 61–71 (1964) [Russian].
- [29] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Annals of Mathematics **147**, 225–267 (1998).
- [30] A. Sym, *Soliton surfaces*, Lettere al Nuovo Cimento **33**(12), 394–400 (1982).
- [31] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, W.A. Benjamin, Reading MA, 1975.
- [32] Cornelis van der Mee, *Nonlinear Evolution Models of Integrable Type*, SIMAI e-Lecture Notes **11**, SIMAI, Torino, 2013. Vedi il seguente sito Internet: <http://cab.unime.it/journals/index.php/lecture/issue/view/69>
- [33] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer Verlag, New York & Berlin, 1996.