ESERCIZI:

1. (23.11.2012) Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 8y' + (\lambda + 65)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \\ y(4) = -2y'(4), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

   determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

2. (23.11.2012) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u_x + 4u - 1, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi,\ t \geq 0, \\ u(0,t) = \frac{1}{4}, \\ u_x(2\pi, t) + 2u(2\pi, t) = \frac{1}{2}, \\ u(x,0) = \frac{1}{4} + 3e^{-2x}\cos(\frac{11}{4}x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. (3.05.2011) Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + (\lambda + 5)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(2) = 0, \end{cases}$$

   determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

4. (3.05.2011) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 29u, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(\pi, t) = u_x(\pi, t), \\ u(x,0) = (\pi - x)\sin(x). \end{cases}$$

5. (24.04.2012) Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + (\lambda + 10)y = 0, \quad 0 \le x \le 3, \\ y(3) = y'(3), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

6. (24.04.2012) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 6u_x - 4u_t + 3u, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \ t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) + u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x} \cos(\frac{3}{2}x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

7. (24.04.2012) Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 8y' + (\lambda + 65)y = 0, \quad 0 \le x \le 5, \\ y'(5) = -4y(5), \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

8. (24.04.2012) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} - 8u_x + 2u_t + 8u, \quad 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0, \\ u_x(0,t) - 2u(0,t) = 0, \\ u(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = e^{2x}[1 - \cos(\frac{5}{2}x)], \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9. (9.11.2012) Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 8y' + (\lambda + 52)y = 0, \quad 0 \le x \le 5, \\ y(0) = y'(0), \\ y(5) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

10. (9.11.2012) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 6u_x + 3u - 6\cos(x), \quad 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -1, \\ u(x,0) = 2e^{-x}\cos(\frac{7}{2}x) + \sin(x). \end{cases}$$

11. (9.11.2012) Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 12y' + (\lambda + 36)y = 0, \quad 0 \le x \le 4, \\ 2y(0) = y'(0), \\ y(4) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

12. (9.11.2012) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - 4u_x + 2u + 2x - 6, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ u_x(0,t) - u(0,t) = -2, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 + e^x - x. \end{cases}$$

SOLUZIONI:

3. (3.05.2011) L'equazione differenziale ̀lineare, omogenea, di secondo ordine e di coefficienti costanti, con equazione caratteristica

$$\alpha^2 + 2\alpha + (\lambda + 5) = 0,$$

oppure $(\alpha+1)^2 = -(\lambda+4)$. Per $\lambda > -4$ otteniamo (dato che $y(2) = 0$) $y(x) \sim e^{-x} \sin[(2-x)\sqrt{\lambda+4})]$, dove

$$\cos[2\sqrt{\lambda+4}] = 0.$$

Quindi $\lambda_n = -4 + [(2n-1)\pi/4]^2$. Le corrispondenti autofunzioni sono:

$$\phi_n(x) = e^{-x} \sin[(2n-1)\frac{\pi}{4}(2-x)].$$

Poichè

$$-(e^{2x}y')' = (\lambda+5)e^{2x}y,$$

otteniamo la relazione di ortogonalità

$$\int_0^2 \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = N_n\delta_{n,m}, \qquad n, m = 1, 2, 3, \ldots,$$

essendo $N_n > 0$ un'opportuna costante di normalizzazione (infatti, $N_n = 1$). Ci rimane l'esclusione dei casi $\lambda = -4$ e $\lambda < -4$. Per $\lambda = -4$ otteniamo $y(x) = c(2-x)e^{-x}$. La condizione $y(0) + y'(0) = -c = 0$ darebbe $y(x) \equiv 0$. Nel caso $\lambda < -4$, avremmo

$$y(x) = ce^{-x} \sinh[(2-x)\sqrt{-\lambda-4}].$$

Di conseguenza,

$$y(0) + y'(0) = -c\sqrt{-\lambda-4}\cosh[2\sqrt{-\lambda-4}],$$

il quale può soltanto annularsi se $c = 0$.

4. (3.05.2011) Ponendo $u(x,t) = e^{-\lambda t}\phi(x)$, risulta

$$\phi'' + 4\phi'(x) + (\lambda + 29)\phi(x) = 0.$$

Oppure:
$$-(e^{4x}\phi')' = (\lambda + 29)e^{4x}\phi(x).$$
L'equazione catteristica
$$(\alpha + 2)^2 = -(\lambda + 25)$$
conduce a tre casi: $\lambda > -25$, $\lambda = -25$ e $\lambda < -25$. Nel caso $\lambda > -25$ abbiamo
$$\phi_n(x) = e^{-2x} \sin[x\sqrt{\lambda_n + 25}],$$
dove $\lambda_n = -25 + (\alpha_n/\pi)^2$, essendo, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, α_n la soluzione dell'equazione $\tan(\alpha) = -(\alpha/3\pi)$ nell'intervallo $((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$. Dunque
$$\int_0^\pi \phi_n(x)\phi_m(x)e^{4x}\, dx = N_n\delta_{n,m}, \qquad n, m = 1, 2, 3, \ldots,$$
per un'opportuna costante di normalizzazione N_n. Per $\lambda = -25$ otteniamo $\phi(x) = cxe^{-2x}$. In tal caso $\phi(\pi) - \phi'(\pi)2\pi ce^{-2\pi}$ si annulla se e solo se $c = 0$. Nel caso $\lambda < -25$ risulta
$$\phi(x) = ce^{-2x} \sinh(x\sqrt{-\lambda - 25}).$$
In tal caso
$$\begin{aligned}\phi(\pi) - \phi'(\pi) = ce^{-2\pi} \Big[&-\sinh(\pi\sqrt{-\lambda - 25}) \\ &+ \sqrt{-\lambda - 25}\cosh(\pi\sqrt{-\lambda - 25})\Big]\end{aligned}$$
si annulla se e solo se $c = 0$. Poichè tutti gli autovalori sono maggiori di -25, abbiamo
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} e^{-2x} \sin(x\sqrt{\lambda_n + 25}),$$
dove
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin(x\sqrt{\lambda_n + 25}) = (\pi - x)\sin(x).$$
Si calcola facilmente che
$$c_n = \frac{1}{N_n} \int_0^\pi (\pi - x)\sin(x)e^{-2x} \sin(x\sqrt{\lambda_n + 25})\, dx.$$

5. (24.04.2012) L'equazione caratteristica della ODE è $\alpha^2-6\alpha+\lambda+10=0$, con gli zeri $\alpha=3\pm\sqrt{-\lambda-1}$ per $\lambda<-1$, $\alpha=3$ per $\lambda=-1$ (doppio) e $\alpha=3\pm i\sqrt{\lambda+1}$ per $\lambda>-1$. Per $\lambda>-1$ risulta, grazie alla condizione $y(0)=0$, $y\sim e^{3x}\sin(x\sqrt{\lambda+1})$. La condizione $y(3)=y'(3)$ implica

$$\sin(3\sqrt{\lambda+1})=3\sin(3\sqrt{\lambda+1})+\sqrt{\lambda+1}\,\cos(3\sqrt{\lambda+1}),$$

oppure

$$\tan(3\sqrt{\lambda+1})=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda+1}.$$

Essendo $0<z_1<z_2<\ldots$ gli zeri positivi dell'equazione $\tan(z_n)=-\frac{1}{6}z_n$, otteniamo $\lambda_n=-1+(z_n/3)^2$ e

$$y_n(x)\sim e^{3x}\sin(\tfrac{1}{3}z_nx),\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Riscrivendo la ODE nella forma $(e^{-6x}y')'+(\lambda+10)e^{-6x}y=0$, il peso risulta e^{-6x}, cioè

$$\int_0^3 y_n(x)y_m(x)e^{-6x}\,dx=C_n\delta_{n,m},$$

essendo C_n una costante di normalizzazione. Per $\lambda<-1$, risulta, grazie a $y(0)=0$, $y\sim e^{3x}\sinh(x\sqrt{-\lambda-1})$. La condizione $y(3)=y'(3)$ implica

$$\sinh(3\sqrt{-\lambda-1})=3\sinh(3\sqrt{-\lambda-1})+\sqrt{-\lambda-1}\,\cosh(3\sqrt{-\lambda-1}),$$

oppure

$$\tanh(3\sqrt{-\lambda-1})=-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\lambda-1}.$$

Poichè $\tanh(z)$ e z hanno lo stesso segno, ciò risulta impossibile. Per $\lambda=-1$ risulta, grazie a $y(0)=0$, $y\sim xe^{3x}$. La condizione $y(3)=y'(3)$ implica $9e^9=10e^9$, un'impossibilità.

6. (24.04.2012) La separazione delle variabili conduce alle equazioni

$$\frac{T''(t)}{T(t)}+4\frac{T'(t)}{T(t)}=3\left\{\frac{X''(x)}{X(x)}+2\frac{X'(x)}{X(x)}+1\right\}\equiv-3\lambda,$$

$$X(0)=0,\qquad X'(\tfrac{\pi}{2})+X(\tfrac{\pi}{2})=0,\quad T'(0)=0.$$

Le equazioni nella variabile x conducono al problema al contorno

$$X''(x)+2X'(x)+(1+\lambda)X(x)=0,$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(\tfrac{\pi}{2}) + X(\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2+2\alpha+1+\lambda = 0$, con gli zeri $\alpha = -1 \pm i\sqrt{\lambda}$ per $\lambda > 0$, $\alpha = -1 \pm \sqrt{-\lambda}$ per $\lambda < 0$ e $\alpha = -1$ (doppio) per $\lambda = 0$. Per $\lambda > 0$ la condizione $X(0) = 0$ conduce a $X(x) \sim e^{-x}\sin(x\sqrt{\lambda})$. La condizione $X'(\frac{\pi}{2}) + X(\frac{\pi}{2}) = 0$ implica

$$\sqrt{\lambda}\,\cos(\tfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}) = 0,$$

mentre $\lambda > 0$. Quindi $\lambda_n = (2n-1)^2$ per $n = 1, 2, \ldots$ e $X_n(x) \sim e^{-x}\sin((2n-1)x)$. Per $\lambda < 0$ si ha (grazie a $X(0) = 0$): $X(x) \sim e^{-x}\sinh(x\sqrt{-\lambda})$. L'altra condizione al contorno implica

$$2\sinh(\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}) + \sqrt{-\lambda}\,\cosh(\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Essendo positiva la parte a sinistra, risulta un'impossibilità. Per $\lambda = 0$, si ha $X(x) = cxe^{-x}$ per un'opportuna costante c e $c(1+\frac{\pi}{2}) = 0$, implicando che $c = 0$. Quindi tutti gli autovalori sono positivi. Passiamo ora al calcolo di $T(t)$. Si ha:

$$T_n''(t) + 4T_n'(t) + 3(2n-1)^2 T_n(t) = 0, \quad T_n'(0) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 + 4\alpha + 3(2n-1)^2 = 0$, con gli zeri $\alpha \in \{-1, -3\}$ per $n = 1$ e $\alpha = -2 \pm i\sqrt{3(2n-1)^2 - 4}$ per $n \geq 2$. Quindi

$$T_n(t) \sim \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, & n = 1, \\ e^{-2t}\left[\cos(t\sqrt{3(2n-1)^2-4}) + \frac{2\sin(t\sqrt{3(2n-1)^2-4})}{\sqrt{3(2n-1)^2-4}}\right], & n = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1 e^{-x}\sin(x)[\tfrac{3}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{2}e^{-3t}] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-x}\sin((2n-1)x)e^{2t}\left[\cos(t\sqrt{3(2n-1)^2-4}) + \frac{2\sin(t\sqrt{3(2n-1)^2-4})}{\sqrt{3(2n-1)^2-4}}\right]. \end{aligned}$$

Sostituendo $t = 0$, otteniamo

$$u(x,0) = c_1 e^{-x}\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-x}\sin((2n-1)x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x}\sin((2n-1)x).$$

I coefficienti seguono dall'identità

$$c_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(x,0) e^x \sin((2n-1)x)\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Per $u(x,0) = e^{-x} \cos(\frac{3}{2}x)$ si ha:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\tfrac{3}{2}x) \sin((2n-1)x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\sin((2n+\tfrac{1}{2})x) + \sin((2n-\tfrac{5}{2})x)\right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \left[\frac{1}{2n-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

7. (24.04.2012) L'equazione caratteristica della ODE è $\alpha^2+8\alpha+\lambda+65 = 0$, con gli zeri $\alpha = -4 \pm \sqrt{-\lambda-49}$ per $\lambda < -49$, $\alpha = -4$ per $\lambda = -49$ (doppio) e $\alpha = -4 \pm i\sqrt{\lambda+49}$ per $\lambda > -49$. Per $\lambda > -49$ risulta, grazie alla condizione $y'(0) = 0$, $y' \sim e^{-4x} \sin(x\sqrt{\lambda+49})$ e quindi

$$y \sim \frac{e^{-4x}}{\lambda+65} \left\{-4\sin(x\sqrt{\lambda+49}) - \sqrt{\lambda+49}\, \cos(x\sqrt{\lambda+49})\right\}.$$

La condizione $-4y(5) = y'(5)$ implica

$$\sin(5\sqrt{\lambda+49}) = \frac{16\sin(5\sqrt{\lambda+49}) + 4\sqrt{\lambda+49}\, \cos(5\sqrt{\lambda+49})}{\lambda+65},$$

oppure

$$\cot(5\sqrt{\lambda+49}) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\lambda+49}.$$

Essendo $0 < z_1 < z_2 < \ldots$ gli zeri positivi dell'equazione $\cot(z_n) = \frac{1}{20} z_n$, otteniamo $\lambda_n = -49 + (z_n/5)^2$ e

$$y_n(x) \sim e^{-4x} \sin(\tfrac{1}{5} z_n x), \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Riscrivendo la ODE nella forma $(e^{8x}y')' + (\lambda+65)e^{8x}y = 0$, il peso risulta e^{8x}, cioè

$$\int_0^5 y_n(x) y_m(x) e^{8x}\,dx = C_n \delta_{n,m},$$

essendo C_n una costante di normalizzazione. Per $\lambda < -49$, risulta, grazie a $y'(0)=0$, $y' \sim e^{-4x}\sinh(x\sqrt{-\lambda-49})$ e dunque

$$y \sim \frac{e^{-4x}}{\lambda+65}\left\{-4\sinh(x\sqrt{-\lambda-49}) - \sqrt{-\lambda-49}\,\cosh(x\sqrt{-\lambda-49})\right\}.$$

La condizione $-4y(5)=y'(5)$ implica

$$\sinh(5\sqrt{-\lambda-49}) = \frac{16\sinh(3\sqrt{-\lambda-49}) + 4\sqrt{-\lambda-49}\,\cosh(5\sqrt{-\lambda-49})}{\lambda+65},$$

oppure

$$\coth(5\sqrt{-\lambda-49}) = -\tfrac{1}{4}\sqrt{-\lambda-49}.$$

Poichè $\coth(z)$ e z hanno lo stesso segno, ciò risulta impossibile. Per $\lambda = -49$ risulta, grazie a $y'(0)=0$, $y' \sim xe^{-4x}$ e dunque $y \sim (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16})e^{-4x}$. La condizione $-4y(5)=y'(5)$ implica $5e^{-20} = \frac{21}{4}e^{-20}$, un'impossibilità.

8. (24.04.2012) La separazione delle variabili conduce alle equazioni

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - 2\frac{T'(t)}{T(t)} = 2\left\{\frac{X''(x)}{X(x)} - 4\frac{X'(x)}{X(x)} + 4\right\} \equiv -2\lambda,$$

$$X(\pi)=0, \qquad X'(0)-2X(0)=0, \quad T'(0)=0.$$

Le equazioni nella variabile x conducono al problema al contorno

$$X''(x) - 4X'(x) + (4+\lambda)X(x) = 0,$$

$$X(\pi)=0, \qquad X'(0)-2X(0)=0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2-4\alpha+4+\lambda=0$, con gli zeri $\alpha = 2\pm i\sqrt{\lambda}$ per $\lambda>0$, $\alpha = 2\pm\sqrt{-\lambda}$ per $\lambda<0$ e $\alpha=2$ (doppio) per $\lambda=0$. Per $\lambda>0$ la condizione $X'(0)-2X(0)=0$ conduce a $X(x)\sim e^{2x}\cos(x\sqrt{\lambda})$. La condizione $X(\pi)=0$ implica

$$\cos(\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi $\lambda_n = (n-\frac{1}{2})^2$ per $n=1,2,\ldots$ e $X_n(x)\sim e^{2x}\cos((n-\frac{1}{2})x)$. Per $\lambda<0$ si ha (grazie a $X'(0)-2X(0)=0$): $X(x)\sim e^{2x}\cosh(x\sqrt{-\lambda})$. L'altra condizione al contorno implica

$$\cosh(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0,$$

un'impossibilità. Per $\lambda = 0$, si ha $X(x) = cxe^{2x}$ per un'opportuna costante c e $c\pi = 0$, implicando che $c = 0$. Quindi tutti gli autovalori sono positivi. Passiamo ora al calcolo di $T(t)$. Si ha:

$$T_n''(t) - 2T_n'(t) + 2(n - \tfrac{1}{2})^2 T_n(t) = 0, \quad T_n'(0) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 - 2\alpha + 2(n - \frac{1}{2})^2 = 0$, con gli zeri $\alpha = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ per $n = 1$ e $\alpha = 1 \pm i\sqrt{2(n - \frac{1}{2})^2 - 1}$ per $n \geq 2$. Quindi

$$T_n(t) \sim \begin{cases} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1+\sqrt{2})} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1-\sqrt{2})}, & n = 1, \\ e^t \left[\cos(t\sqrt{2(n - \frac{1}{2})^2 - 1}) - \frac{\sin(t\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2-1})}{\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2-1}} \right], & n = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1 e^{2x} \cos(\tfrac{1}{2}x)[(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1+\sqrt{2})} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1-\sqrt{2})}] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{2x} \cos((n - \tfrac{1}{2})x) e^t \left[\cos(t\sqrt{2(n - \tfrac{1}{2})^2 - 1}) - \frac{\sin(t\sqrt{2(n - \frac{1}{2})^2 - 1})}{\sqrt{2(n - \frac{1}{2})^2 - 1}} \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo $t = 0$, otteniamo

$$u(x,0) = c_1 e^{2x} \cos(\tfrac{1}{2}x) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{2x} \cos((n - \tfrac{1}{2})x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2x} \cos((n - \tfrac{1}{2})x).$$

I coefficienti seguono dall'identità

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) e^{-2x} \cos((n - \tfrac{1}{2})x)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Per $u(x,0) = e^{-x} \cos(\frac{3}{2}x)$ si ha:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} [1 - \cos(\tfrac{5}{2}x)] \cos((n - \tfrac{1}{2})x)\, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos((n - \tfrac{1}{2})x)\, dx - \frac{4}{\pi}\delta_{n,3} \int_0^{\pi} \cos^2(\tfrac{5}{2}x)\, dx \\ &= \frac{4}{\pi}(-1)^{n-1} - 2\delta_{n,3}. \end{aligned}$$

11. (9.11.2012) Scrivendo l'equazione differenziale nella forma Sturm-Liouville, si ha:

$$-(e^{12x}y')' - 36e^{12x}y = \lambda e^{12x}y;$$

dunque il peso è e^{12x}. Ponendo $y = e^{-6x}z$, troviamo $y' = e^{-6x}[z' - 6z]$ e $y'' = e^{-6x}[z'' - 12z' + 36z]$. In termini di z, il problema di Sturm-Liouville ha la forma

$$\begin{cases} z'' = -\lambda z, \\ 8z(0) = z'(0), \\ z(4) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando la condizione di Dirichlet $z(4) = 0$, risulta per $\lambda < 0$

$$z \sim \sin((4 - x)\sqrt{\lambda});$$

utilizzando la condizione mista $8z(0) = z'(0)$, si ha:

$$8\sin(4\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\cos(4\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Per $\xi = 4\sqrt{\lambda}$, risulta l'equazione $\tan(\xi) = -(\xi/32)$. Essendo $\xi_n \in ((n-\frac{1}{2}\pi, (n+\frac{1}{2}\pi)$ lo zero n-esimo positivo ($n = 1, 2, 3, \ldots$), si ha $\lambda_n = (\xi_n/4)^2$ e

$$z_n(x) \sim \sin(\frac{4 - x)\xi_n}{4}).$$

Le autofunzioni normalizzate in $L^2((0, 4); e^{12x}dx)$ sono le seguenti

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{N_n}}\, e^{-6x}\sin(\frac{4 - x)\xi_n}{4}),$$

dove

$$N_n = \int_0^4 \sin^2(\frac{(4 - x)\xi_n}{4})\,dx = \int_0^4 \frac{1 - \cos\left(\frac{(4-x)\xi_n}{2}\right)}{2}\,dx = 2 - \frac{\sin(2\xi_n)}{\xi_n}$$
$$= 2 - \frac{2\tan(\xi_n)}{\xi_n[1 + \tan^2(\xi_n)]} = 2 + \frac{\xi_n/64}{\xi_n[1 + (\xi_n/32)^2]}.$$

12. (9.11.2012) Per "omogenizzare" il problema differenziale poniamo

$$u(x, t) = v(x, t) + \phi(x),$$

dove

$$\begin{cases} 2\phi''(x) - 4\phi'(x) + 2\phi(x) + 2x - 6 = 0, \\ \phi'(0) - \phi(0) = -2, \\ \phi(1) = 0. \end{cases}$$

Allora $\phi(x) = 1 - x$. Il problema differenziale ha la forma

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} = 4v_x + 2u, \\ v_x(0,t) - v(0,t) = 0, \\ v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = e^x. \end{cases}$$

La sepazione delle variabili $v(x,t) = X(x)T(t)$ conduce al sistema

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{2X''(x) - 4X'(x) + 2X(x)}{X(x)} = -2\lambda, \\ X'(0) - X(0) = 0, \\ X(1) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione

$$\begin{cases} X''(x) - 2X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0, \\ X'(0) - X(0) = 0, \\ X(1) = 0, \end{cases}$$

per $\lambda > 0$, si ottiene

$$X(x) \sim e^x \sin((1-x)\sqrt{\lambda}),$$

dove $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$. Quindi $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})\pi$ e $X_n(x) \sim e^x \sin((n - \frac{1}{2})\pi(1 - x))$ [$n = 1, 2, 3, \ldots$. Per $\lambda = 0$ avremmo $X(x) \sim (1-x)e^x$ che non verifica la condizione a $x = 0$; quindi $\lambda = 0$ non è autovalore. Per $\lambda < 0$ avremmo $X_n(x) \sim e^x \sinh((1-x)\sqrt{-\lambda})$, dove $\cosh(\sqrt{-\lambda}) = 0$, un'impossibilità. Quindi tutti gli autovalori λ sono positivi. Allora

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2[(n-\frac{1}{2})\pi]^2 t} e^x \sin((n - \tfrac{1}{2})\pi(1-x)),$$

dove

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^x \sin((n - \tfrac{1}{2})\pi(1-x)).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}c_n &= \int_0^1 e^x e^x \sin((n-\tfrac{1}{2})\pi(1-x))e^{-2x}\,dx \\ &= \frac{1-\cos((n-\frac{1}{2})\pi)}{(n-\frac{1}{2})\pi} = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi}.\end{aligned}$$

Quindi $c_n = 4/[(2n-1)\pi]$.