Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 13.05.2019, Ingegneria **Meccanica**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $5 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema a valori iniziali:

$$u_{tt} + 13u_{xt} + 40u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = x^2 + 9, \quad u_t(x,0) = 3x + 7.$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 16u_x + 4u_t + x + 1, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (x^2+5)u_x - (1+x^4)u + x^2\cos^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 10, \\ u(0,t) = f_1(t), \quad u(2\pi,t) = f_2(t), \\ u(x,0) = 3x^2 + 11, \quad u_t(x,0) = x^2 + 2x. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi spaziale e temporale affinché la matrice del sistema sia invertibile.

5. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema ellittico

$$\begin{cases} -(2+x^4+y^2)u_{xx} - (2+x^4+y^2)u_{yy} + (1+(x+y)^2)u = f(x,y), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le 2\pi, \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u(x,2\pi) = g_2(x), \\ u(0,y) = h_1(y), \quad u(\pi,y) = h_2(y). \end{cases}$$

Discutere le proprietà principali delle matrici del sistema pertinenti alla sua risolubilità unica.

Soluzioni:

1. Sostituendo $u(x,t) = f(x-ct)$ si ha: $(c^2-13c+40)f''(x-ct) = 0$. Dunque $c=5$ o $c=8$. Quindi $u(x,t) = f(x-5t)+g(x-8t)$, conducendo alle equazioni

$$\begin{cases} f(x)+g(x) = x^2+9, \\ -5f'(x)-8g'(x) = 3x+7 \Longrightarrow -5f(x)-8g(x) = \frac{3}{2}x^2+7x+\text{cost.} \end{cases}$$

Risulta

$$f(x) = \tfrac{19}{6}x^2 + \tfrac{7}{3}x + 24 + \tfrac{1}{3}\text{cost.}, \quad g(x) = -\tfrac{13}{6}x^2 - \tfrac{7}{3}x - 15 - \tfrac{1}{3}\text{cost.}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{19}{6}(x-5t)^2 + \tfrac{7}{3}(x-5t) + 24 - \tfrac{13}{6}(x-8t)^2 - \tfrac{7}{3}(x-8t) - 15 \\ &= x^2 + 3xt - \tfrac{119}{2}t^2 + 7t + 9. \end{aligned}$$

2. Sia $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$. Allora

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + 16v_x + 4v_t, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = -\phi(x), \qquad v_t(x,0) = g(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi''(x) + 16\phi'(x) = -x-1, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. \end{cases}$$

Si verifiche facilmente che

$$\phi(x) = -\tfrac{1}{32}x^2 - \tfrac{15}{256}x + \tfrac{23}{256}\frac{1-e^{-16x}}{1-e^{-16}}.$$

Sia $v(x,t) = X(x)T(t)$. Allora

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - 4\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 16\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

dove $X(0) = X(1) = T(0) = 0$.

Risolvendo prima l'ODE per $X(x)$ si ha:

$$X(x) = \text{cost.} \begin{cases} e^{-8x}\sin(x\sqrt{\lambda - 64}), & \lambda > 64, \\ x\, e^{-8x}, & \lambda = 64, \\ e^{-8x}\sinh(x\sqrt{64 - \lambda}), & \lambda < 64. \end{cases}$$

Ci rimane soltanto il caso $\lambda > 64$. Risulta $\lambda_n = 64 + n^2\pi^2$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$, da cui $X_n(x) = \text{cost.} e^{-8x}\sin(n\pi x)$. Risolvendo ora l'ODE per $T_n(t)$ si ha:

$$T_n(t) = \text{cost.} e^{2t}\sin(t\sqrt{n^2\pi^2 + 60}).$$

Otteniamo infine

$$\begin{aligned} v(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-8x} e^{2t} \sin(n\pi x)\cos(t\sqrt{n^2\pi^2+60}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-8x} e^{2t} \sin(n\pi x) \frac{\sin(t\sqrt{n^2\pi^2+60})}{\sqrt{n^2\pi^2+60}}, \end{aligned}$$

dove $c_n = -\int_0^1 \phi(x) e^{8x} \sin(n\pi x)\, dx$ e $d_n = \int_0^1 g(x) e^{8x} \sin(n\pi x)\, dx$.

3. Poniamo $x_i = ih = \frac{2\pi i}{n+1}$ e $t_j = jk = \frac{10j}{m+1}$, dove $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ e $j = 0, 1, 2, \ldots, m+1$. Inoltre, poniamo $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$. Risulta per $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = &\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] \\ &+ \frac{x_i^2 + 5}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right] \\ &- (1 + x_i^4) u_{i,j} + x_i^2 \cos^2(x_i), \end{aligned}$$

dove

$$u_{0,j} = f_1(t_j), \quad u_{n+1,j} = f_2(t_j), \quad u_{i,0} = 3x_i^2 + 11, \quad u_{i,1} = ???.$$

dove $u_{i,1}$ è da determinare. Si ha:

$$\begin{aligned}
u_{i,1} &= u_{i,0} + u_t(x_i,0)k + \tfrac{1}{2}u_{tt}(x_i,0)k^2 \\
&= u_{i,0} + \underbrace{u_t(x_i,0)}_{=x_i^2+2x_i}k + \tfrac{1}{2}k^2\left[\frac{u_{i+1,0}-2u_{i0}+u_{i-1,0}}{h^2}\right. \\
&\quad \left. + (x_i^2+5)\frac{u_{i+1,0}-u_{i-1,0}}{2h} - (1+x_i^4)u_{i,0} + x_i^2\cos^2(x_i)\right].
\end{aligned}$$

Tale sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2}+\frac{x_i^2+5}{4h}\right)u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2}-\frac{x_i^2+5}{4h}\right)u_{i-1,j+1} \\
&\qquad = \frac{2}{k^2}u_{i,j} - \frac{1}{k^2}u_{i,j-1} + \frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{2h^2} \\
&\qquad + (x_i^2+5)\frac{u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j-1}}{4h} - (1+x_i^4)u_{i,j} + x_i^2\cos^2(x_i),
\end{aligned}$$

dove $i=1,2,\ldots,n$ e $j=1,2,\ldots,m$. Per ogni $j=2,3,\ldots,m$ la matrice del sistema (di forma tridiagonale) è strettamente diagonalmente dominante [e quindi invertibile] se

$$\left|\frac{1}{2h^2}+\frac{x_i^2+5}{4h}\right| + \left|\frac{1}{2h^2}-\frac{x_i^2+5}{4h}\right| < \frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}.$$

Ciò vale se $0 < h \leq \frac{2}{4\pi^2+5}$ (cioè, se $n \geq -1+\pi(4\pi^2+5) \approx 138.7331$, cioè, se $n \geq 139$). L'errore è dell'ordine $O(h^2+k^2)$.

5. Poniamo $x_i = ih = \frac{\pi i}{n+1}$, $y_j = jk = \frac{2\pi j}{m+1}$, $u_{i,j} = u(x_i,y_j)$ e $f_{i,j} = f(x_i,y_j)$. Allora

$$\begin{aligned}
-(2+x_i^4+y_j^2)&\left[\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}\right] \\
&+ (1+(x_i+y_j)^2)u_{i,j} = f(x_i,y_j), \\
u_{i,0} &= g_1(x_i), \quad u_{i,m+1} = g_2(x_i), \\
u_{0,j} &= h_1(y_j), \quad u_{n+1,j} = h_2(y_j),
\end{aligned}$$

dove $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$. Utilizzando lo schema a cinque punti, si ha:

$$\begin{aligned}&\left[(2 + x_i^4 + y_j^2)\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}\right) + 1 + (x_i + y_j)^2\right] u_{i,j}\\&- (2 + x_i^4 + y_j^2)\left\{\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{k^2}\right\} = f(x_i, y_j),\end{aligned}$$

dove $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$. Per $i = 1$ si ha $u_{i-1,j} = h_1(y_j)$, per $i = n$ si ha $u_{i+1,j} = h_2(y_j)$, per $j = 1$ si ha $u_{i,j-1} = g_1(x_i)$, per $j = m$ si ha $u_{i,j+1} = g_2(x_i)$. La matrice (di forma tridiagonale a blocchi con blocchi tridiagonali se si adotta l'ordinamento (anti)lessicografico dei nodi interni) è strettamente diagonalmente dominante (e quindi invertibile) se per $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$ si ha:

$$(2 + x_i^4 + y_j^2)\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}\right) < (2 + x_i^4 + y_j^2)\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}\right) + 1 + (x_i + y_j)^2.$$

Ciò è ovviamente vero, qualunque siano i passi h e k. L'errore è dell'ordine $O(h^2 + k^2)$.