Appendice A

RISULTATI ESSENZIALI DI ANALISI FUNZIONALE

Spazi normati. Sia X uno spazio lineare complesso (o reale). Una funzione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(1)	$\|\varphi\| \geq 0$	(positività)
(2)	$\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$	(definitezza)
(3)	$\|\alpha\varphi\| = \|\alpha\| \, \|\varphi\|$	(omogeneità)
(4)	$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$	(disuguaglianza triangolare)

per qualunque $\varphi, \psi \in X$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ (oppure $\mathbb{R}$) è definita *norma* su X. Dalle (3)-(4) segue immediatamente che $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$.

In uno spazio normato, per distanza di φ da ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Convergenza. Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X è detto *convergente* in X se esiste un elemento $\varphi \in X$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0,$$

ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Successione di Cauchy. Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X è detta di Cauchy se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ per tutti gli $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$.

Completezza. Un sottospazio lineare U di uno spazio normato X è detto *completo* se ogni successione di Cauchy di elementi di U converge ad un elemento di U.

Spazio di Banach. Uno spazio normato X è uno *spazio di Banach* se esso è completo.

Continuità. Una funzione $A : U \subset X \to Y$ che trasforma gli elementi di un sottoinsieme U di uno spazio normato X in elementi di uno spazio normato Y è detta *continua* in $\varphi \in U$ se $\lim_{n\to\infty} A\varphi_n = A\varphi$ per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ con $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

La funzione A è detta continua se essa è continua in ogni $\varphi \in U$. La precedente definizione può essere espressa anche nel modo seguente: una funzione $A : U \subset X \to Y$ è continua in φ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon, \varphi)$ tale che $\|A\varphi - A\psi\|_Y < \varepsilon$ per tutti i $\psi \in U$ con $\|\varphi - \psi\|_X < \delta$.

Continuità Uniforme. La funzione A è detta *uniformemente continua* se δ dipende unicamente da ε, ossia se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon)$ tale che $\|A\varphi - A\psi\|_Y < \varepsilon$ per tutte le φ e ψ con $\|\varphi - \psi\|_X < \delta$.

Esempi di spazi di Banach.

1. Indicato con Ω un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), sia $C(\Omega)$ l'insieme delle funzioni continue in Ω. Allora, indicato con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali nonnegativi, la funzione $\|\cdot\|_\infty : C(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, con

$$\|f\|_\infty = \max_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |f(\boldsymbol{x})|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$, per cui lo spazio $C(\Omega)$, dotato di tale norma, è uno spazio normato completo e quindi uno spazio di Banach.

2. La suddetta definizione si può generalizzare ai sottoinsiemi Ω di $\mathbb{R}^n$ che non sono necessariamente chiusi e limitati. In tal caso, indicato con $\hat{C}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni continue e **limitate** in Ω, la funzione $\|\cdot\|_\infty : \hat{C}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, con

$$\|f\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |f(\boldsymbol{x})|,$$

introduce una norma completa in $\hat{C}(\Omega)$. Di conseguenza, lo spazio $\hat{C}(\Omega)$, dotato di tale norma, è uno spazio di Banach.

3. Indicato con Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$, sia $L^2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω. Supponiamo ora che due funzioni φ e ψ in $L^2(\Omega)$, che assumano valori diversi soltanto su un sottoinsieme di Ω di misura nulla, vengano identificate, dato che $\int_\Omega |\varphi - \psi|\, d\boldsymbol{x} = 0$. Sotto tale ipotesi, la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, con

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}},$$

definisce una norma completa in $L^2(\Omega)$, che pertanto costituisce uno spazio di Banach.

Sfera aperta e chiusa. Per un elemento φ di uno spazio normato X e un numero positivo r, l'insieme $B(\varphi, r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$ definisce la *sfera aperta* di raggio r e centro φ. L'insieme $B[\varphi, r] = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| \leq r\}$ definisce la *sfera chiusa* di raggio r e centro φ.

Insieme aperto. Un sottoinsieme di uno spazio normato X è definito *aperto* se per ogni $\varphi \in U$ esiste un $r > 0$ tale che $B(\varphi; r) \subset U$.

Parte interna. La *parte interna* $\dot{U}$ di un sottoinsieme U di uno spazio normato X è il sottoinsieme aperto più grande contenuto in U. Esso consiste in tutti i punti $\varphi \in U$ per cui esiste un numero $r = r(\varphi)$ tale che $B(\varphi, r) \subset U$.

Insieme chiuso. Un sottoinsieme U di uno spazio normato X è definito *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X.

Chiusura. La *chiusura* $\overline{U}$ di un sottoinsieme U di uno spazio normato X (in X) è l'insieme di tutti i limiti delle successioni con termini in U e limiti in X. Essa è pertanto il sottoinsieme chiuso più piccolo di X contenente U.

Frontiera. La *frontiera* ∂U di un sottoinsieme U di uno spazio normato X è l'insieme di tutti gli elementi di X che sono limiti sia di una successione con termini in U, sia di una successione con termini in $X \setminus U$. Infatti

$$\partial U = \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)} = \partial(X \setminus U).$$

Densità e separabilità. Un insieme U è definito *denso* in V se $V \subset \overline{U}$, cioè se ogni elemento di V è il limite di una successione convergente di elementi di U. Uno spazio normato X è detto *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile denso di X.

Limitatezza. Un sottoinsieme U di uno spazio normato X è detto *limitato* se esiste una costante positiva C tale che $\|\varphi\| \leq C$ per tutti i $\varphi \in U$. In altre parole, un sottoinsieme U di uno spazio normato X è limitato se esso è sottoinsieme di una sfera con raggio $r \in \mathbb{R}^+$.

Prodotto scalare (prodotto interno). Sia X uno spazio lineare complesso (o reale). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$ (oppure $\mathbb{R}$) soddisfacente le seguenti proprietà:

$$
\begin{array}{lcr}
(1) & (\varphi,\varphi) \geq 0 & \text{(positività)} \\
(2) & (\varphi,\varphi) = 0 \text{ se e solo se } \varphi = 0 & \text{(definitezza)} \\
(3) & (\varphi,\psi) = \overline{(\psi,\varphi)} & \text{(simmetria)} \\
(4) & (\alpha\varphi + \beta\psi,\chi) = \alpha(\varphi,\chi) + \beta(\psi,\chi) & \text{(linearità)}
\end{array}
$$

per tutte le $\varphi, \psi, \chi \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (oppure $\mathbb{R}$) è definita *prodotto scalare* o *prodotto interno* (il soprasegno indica il complesso coniugato). Dalle (3)-(4) segue immediatamente la sesquilinearità, o bilinearità

$$(\varphi, \alpha\psi + \beta\chi) = \overline{\alpha}(\varphi,\psi) + \overline{\beta}(\varphi,\chi).$$

Norma indotta. Ogni prodotto scalare induce una norma, così definita

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}$$

per ogni $\varphi \in X$. Per ogni coppia di elementi φ e ψ di X, vale inoltre la cosiddetta *disuguaglianza di Schwartz*

$$|(\varphi,\psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|.$$

Spazio pre-Hilbert. Per *spazio pre-Hilbert* si intende uno spazio lineare dotato di prodotto interno.

Spazio di Hilbert. Si definisce *spazio di Hilbert* uno spazio pre-Hilbert completo rispetto alla norma indotta dal suo prodotto scalare.

Esempi di spazi di Hilbert.

1. Lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto interno

$$(\varphi,\psi) = \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{x})\overline{\psi(\boldsymbol{x})}\, d\boldsymbol{x}.$$

2. Lo spazio l^2 delle successioni complesse $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ è uno spazio di Hilbert rispetto al suo prodotto interno

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty x_n\, \overline{y}_n.$$

Bibliografia

[1] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Revised edition, Applied Mathematical Sciences **27**, Springer, 2001.

[2] S.C. Brennes and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York, 1994.

[3] J.C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*, Wiley, Chichester, 1987.

[4] K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transform*, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[5] Ph. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978. Reprinted as Classics in Applied Mathematics **40**, SIAM, Philadelphia, 2002.

[6] Pietro Contu, C. van der Mee, and Sebastiano Seatzu, *Fast and Effective Finite Difference Method for 2D Photonic Crystals*, Communications in Applied and Industrial Mathematics (CAIM) **2**(2), 2011, 18 pp. doi: 10.1685/journal.caim.374.

[7] Pietro Contu, C. van der Mee, and Sebastiano Seatzu, *A finite element frequency domain method for 2D photonic crystals*, Journal of Computational and Applied Mathematics **236**, 3956–3966 (2012). doi: 10.1016/j.cam.2012.02.041

[8] M.S. Gockenbach, *Partial Differential Equations. Analytical and Numerical Methods*, SIAM, Philadelphia, 2002.

[9] M.S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, Philadelphia 2006; 2° ed., 2011.

[10] G.H. Golub and G. Meurant, *Matrices, Moments, and Quadrature with Applications*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 2010.

[11] G.H. Golub and Ch.F. Van Loan, *Matrix Computations*, John Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.

[12] D. Greenspan and V. Casulli, *Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering*, Addison-Wesley, Redwood City (CA), 1988.

[13] M.R. Hestenes and E.L. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Research Nat. Bur. Standards Section B **49**, 409–432 (1952).

[14] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics **15**, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[15] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, and J.N. Winn, *Photonic Crystals, Molding the flow of light*, Princeton University Press, Princeton, 2006.

[16] C.T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1995.

[17] R. Kress, *Numerical Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **181**, Springer, New York, 1998.

[18] A. Mitchell and D. Griffiths, *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*, Wiley-Blackwell, New York, 1980.

[19] P.V. O'Neil, *Advanced Engineering Mathematics*, Fourth Edition, Brooke-Cole Publishing Company, Pacific CA93950, USA, 2002.

[20] J.M. Ortega, *Numerical Analysis. A Second Course*, Classics in Applied Mathematics **3**, SIAM, Philadelphia, 1990.

[21] L.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Advanced Press, New York, (1970).

[22] A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, Springer, Milano, 2007.

[23] P.A. Raviart e J.M. Thomas, *Introduzione all'Analisi Numerica delle Equazioni alle Derivate Parziali*, Masson, Milano, 1989.

[24] G. Rodriguez e S. Seatzu, *Introduzione alla Matematica Applicata e Computazionale*, Pitagora Editore, Bologna, 2010.

[25] H.L. Royden, *Real Analysis*, 3° ed., Macmillan, New York, 1988.

[26] S. Seatzu e P. Contu, *Equazioni alle Derivate Parziali*, Pitagora Editore, Bologna, 2012.

[27] M.R. Spiegel, *Analisi di Fourier*, Collana Schaum's, McGraw-Hill, Milano, 1994.

[28] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Texts in Applied Mathematics **12**, Springer, Berlin, 1992.

[29] G. Strang, *Linear Algebra and Matrix Theory*, Wiley, New York, 1970.

[30] G. Strang and G.J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley (MA), 1988.

[31] L.N. Trefethen and D. Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[32] J. Weidmann, *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*, Lecture Notes in Mathematics **1258**, Springer, Berlin, 1987.