METODI MATEMATICI AVANZATI

Corso di 6 Crediti
Corso di Laurea Specialistica in Fisica
A.A. 2008-2009

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 335-5287988 (cell.)

cornelis@krein.unica.it
http:\\bugs.unica.it\~cornelis
oppure: http:\\krein.unica.it\~cornelis

L'altra condizione $u(L)=0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL)=0 \Leftrightarrow kL=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n-\frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos((n-\frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n=1,2,3,\ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0,L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\right), \tag{I.21}$$

dove $n=1,2,3,\ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0,L)$.

e. Condizioni periodiche. Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0=0, \\ \varphi_n^c(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n=\left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2, \\ \varphi_n^s(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n=\left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2, \end{cases} \tag{I.22}$$

dove $n=1,2,3,\ldots$. Quindi l'autovalori zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno moltiplicità 2.

f. Condizione di Dirichlet in $x=0$ e mista in $x=L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k\ge 0$. Utilizzando la condizione $u(0)=0$ si ottiene

$$u(x)\sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $(\cos\alpha)u(L)+(\sin\alpha)u'(L)=0$ conduce alla condizione

$$\cos\alpha\,\sin(kL)+k\sin\alpha\,\cos(kL)=0, \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Escludendo i casi già trattati, cioè $\alpha=0$ [Dirichlet] e $\alpha=(\pi/2)$ [Dirichlet in $x=0$ e Neumann in $x=L$], risultano $k>0$, $\sin(kL)=0$ e $\cos(kL)\neq 0$. Arriviamo all'equazione transcedentale

$$\tan(kL)=-k\tan\alpha, \tag{I.23}$$

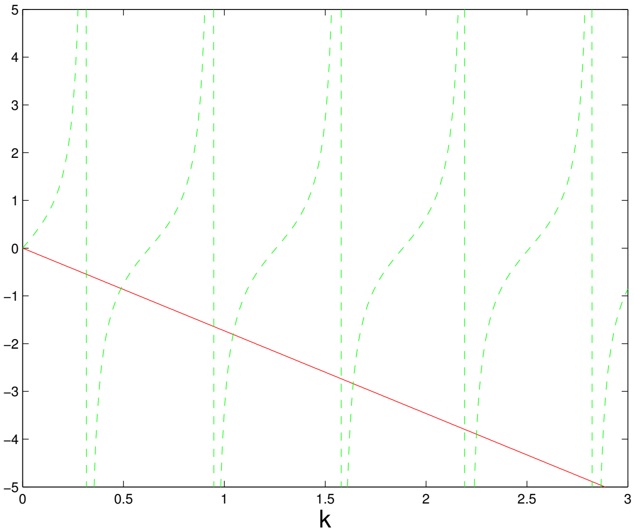

Figura I.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k\tan\alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

dove $\tan\alpha > 0$. Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e la retta $k \mapsto -k\tan\alpha$ con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori $\lambda_n = k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in $L^2(0, L)$, risultando in una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

g. Condizioni Miste Diverse. Ci limitiamo al caso in cui $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1 \cos(kx) + c_2 \frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti c_1, c_2 e per $k > 0$ soddisfa alle due condizioni

$$c_1 \cos\beta - c_2 \sin\beta = 0, \tag{I.24}$$

$$c_1 [\cos\alpha \cos(kL) - k \sin\alpha \sin(kL)] + c_2 \left[\cos\alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin\alpha \cos(kL)\right] = 0. \tag{I.25}$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\cos\beta \left[\cos\alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin\alpha \cos(kL)\right] + \sin\beta [\cos\alpha \cos(kL) - k \sin\alpha \sin(kL)] = 0,$$

e dunque [vedi la (A.10) nell'Appendice A]

$$\begin{aligned} W[J_\nu, J_{-\nu}](x) &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + \underbrace{O(x)}_{=0} \\ &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2\,\sin(\nu\pi)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

Per $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) esiste una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovarela definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$\boxed{Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu)\sin(\nu\pi) = \pi\,\cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \to n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo per $x \geq 0$

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2}\left[\log\frac{z}{2} - \psi(k+1)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}J_0(x)\log\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{(k!)^2}\psi(k+1), \\ Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[2\,\log\frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}J_n(x)\log\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\right]. \end{aligned}$$

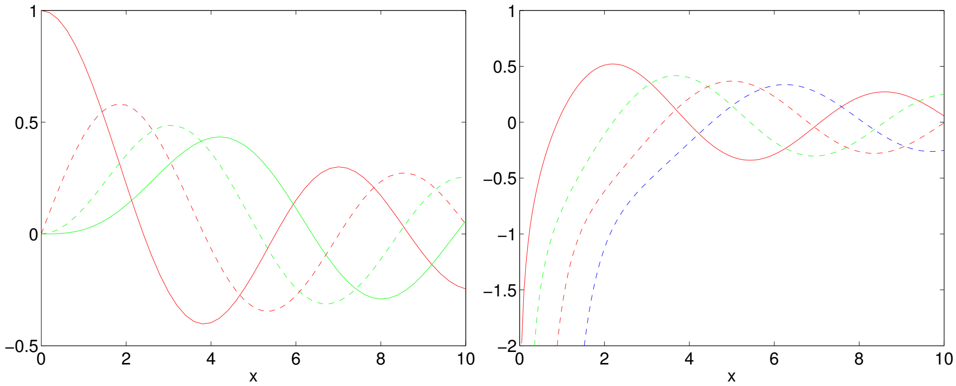

Figura II.1: Panello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Panello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche per $x \to 0^+$

$$\boxed{Y_n(x) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \log \dfrac{x}{2}, & n = 0 \\ -\dfrac{(n-1)!}{\pi} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n}, & n = 1, 2, \cdots, \end{cases}} \tag{II.42}$$

implicando che $|Y_n(x)| \to +\infty$ se $x \to 0$.

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza di quelle di prima specie. In particolare

$$Y_\nu'(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x);$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu Y_\nu(x)\right] = x^\nu Y_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} Y_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

$$Y_0'(x) = -Y_1(x); \qquad Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) = 0.$$

4.3 Ortogonalità e zeri

La seguente proposizione ci importa nei casi $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (cercando gli zeri) e $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ (cercando i valori estremi).

Proposizione II.4 *Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J_\nu'(\mu) = 0, \tag{II.43}$$

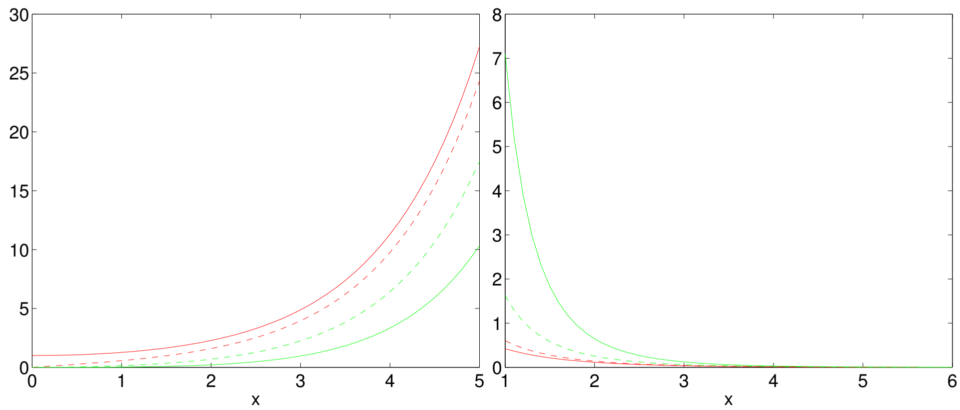

Figura II.2: Panello sinistro: le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$. Panello destro: le funzioni di MacDonald $K_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Le dimostrazioni delle formule asintotiche (II.52)-(II.56) si trovano nell'Appendice C. Analogamente, utilizzando la (II.39), si ottiene per $x \to 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\dfrac{2}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \left(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right) &= \frac{\pi}{2} \left(e^{\nu\pi i/2} J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} \left(J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} \left(-[J_\nu(iz)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(iz)] + i \sin(\nu\pi) J_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} \sin(\nu\pi) \left(J_\nu(iz) + i Y_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(iz) \sin(\nu\pi) = K_\nu(z) \sin(\nu\pi), \end{aligned}$$

implicando che[5]

$$\boxed{K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}.}$$

[5] In [18, Sec. 17.71] la funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ viene definita in modo diverso: $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)) \cot(\nu\pi)$.

Per $\nu = n \in \mathbb{Z}$ bisogna calcolare il limite se $\nu \to n$.

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (II.34), otteniamo l'equazione differenziale

$$\boxed{x^2u'' + xu' - (x^2 + \nu^2)u = 0.} \tag{II.57}$$

Dal Teorema II.5 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

4.5 Funzioni sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel $J_{\pm(l+\frac{1}{2})}(x)$, dove $l = 0, 1, 2, \ldots$, appaiono nello studio dello scattering quantistico e dello scattering della luce. Per questo motivo vengono introdotte le seguenti funzioni:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{II.58}$$

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, Y_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{II.59}$$

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + i y_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{II.60}$$

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - i y_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(z). \tag{II.61}$$

Le funzioni $j_l(z)$, $y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z)$ e $h_l^{(1,2)}(z)$ si dicono *funzioni sferiche di Bessel* di prima, seconda e terza specie. Quindi

$$\begin{aligned}
j_0(z) &= \frac{\sin(z)}{z},\\
j_1(z) &= \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z},\\
j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right)\sin(z) - \frac{3}{z^2}\cos(z),\\
y_0(z) &= -n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z},\\
y_1(z) &= n_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z},\\
y_2(z) &= -n_2(z) = \left(-\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z}\right)\cos(z) - \frac{3}{z^2}\sin(z).
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(z). \tag{II.62}$$

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 $(n = 3)$. In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_l}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2 Y_l}{\partial\theta^2} + l(l+1)Y_l(\theta,\varphi) = 0, \tag{II.71}$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \cdots$. Cerchiamo le soluzioni della (II.71) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos\varphi$ e scriviamo (II.71) nella forma

$$\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2 Y_l}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\partial Y_l}{\partial\xi}\right) + l(l+1)Y_l(\theta,\xi) = 0. \tag{II.72}$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta,\varphi) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \operatorname{sen} m\theta, & m = 1, 2, 3, \cdots, \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicità della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta) = -m^2\Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi) = 0. \tag{II.73}$$

Quest'equazione si può scrivere nella forma

$$-\left[(1-\xi^2)\mathcal{P}'\right]' + \frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti.

5.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi h + h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi) h^l, \qquad |h| < 1,$$

2. tramite l'equazione differenziale,

$$\boxed{-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x),} \; -1 < x < +1; \qquad \boxed{P_l(1) = 1,}$$

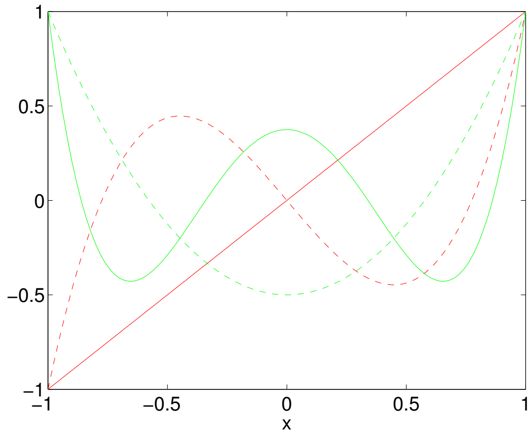

Figura II.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(\xi) P_{l'}(\xi)\, d\xi = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1},}$$

4. tramite la formula di Rodrigues

$$\boxed{P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\, l!} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l (\xi^2 - 1)^l,}$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2l+1)\xi P_l(\xi) = (l+1)P_{l+1}(\xi) + l P_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.}$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

4 ⇒ 2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-\left[(1-x^2)u'\right]'(x) = \lambda u(x), \qquad -1 < x < +1, \tag{II.74}$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \to \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l+1)$ dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, \tag{II.75}$$

Allora $H_n(z)$ è un polinomio di grado n, ha il coefficiente principale positivo e soddisfa $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$. Derivando l'equazione $w' + 2zw = 0$ (che ha la soluzione $w(z) \sim e^{-z^2}$) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ risulta

$$\boxed{u'' + 2zu' + 2(n+1)u = 0.}$$

Poi si sostituisca $u = e^{-z^2} v$. Infine risulta l'equazione (II.87) per $\nu = n$:

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0. \tag{II.90}$$

In altre parole, il polinomio di Hermite $H_n(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di Hermite (II.90). La (II.89) si dice formula di Rodriguez.

Scriviamo ora la (II.87) nella forma

$$(e^{-z^2} v')' = -2n\, e^{-z^2}\, v.$$

Allora

$$2(n-m)H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} = (e^{-z^2} H_m')'H_n(z) - (e^{-z^2} H_n')'H_m(z).$$

Calcolando l'integrale rispetto a z si ottiene

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\, dz = \Big[e^{-z^2}\left(H_m'(z)H_n(z) - H_n'(z)H_m(z)\right)\Big]_{z=-\infty}^{\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-z^2} H_m'(z)H_n'(z) - e^{-z^2} H_n'(z)H_m'(z)\Big)\, dz = 0.$$

Quindi i polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}; e^{-z^2}\, dz)$. Per calcolare la costante di normalizzazione si applichino la formula di Rodriguez (II.89) e n integrazioni per parti, risultando nella seguente successione di passaggi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2}\, dz &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1}\left[H_n^{(j-1)}(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-j}\{e^{-z^2}\}\right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{n} H_n(z)\right) e^{-z^2}\, dz \\ &= \underbrace{\Big[p(z)e^{-z^2}\Big]_{z=-\infty}^{\infty}}_{=0} + c_n\, n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = c_n\, n!\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

dove $p(z)$ è un polinomio e c_n è il coefficiente principale di $H_n(z)$ (cioè, $H_n(z) = c_n z^n + \ldots$). Calcoliamo ora i coefficienti c_n. Derivando la formula di Rodriguez (II.89) si arriva all'identità

$$\boxed{H_n'(z) = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z).} \tag{II.91}$$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (II.91) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$, mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di ortogonalità:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-z^2}\, dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m},} \tag{II.92}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

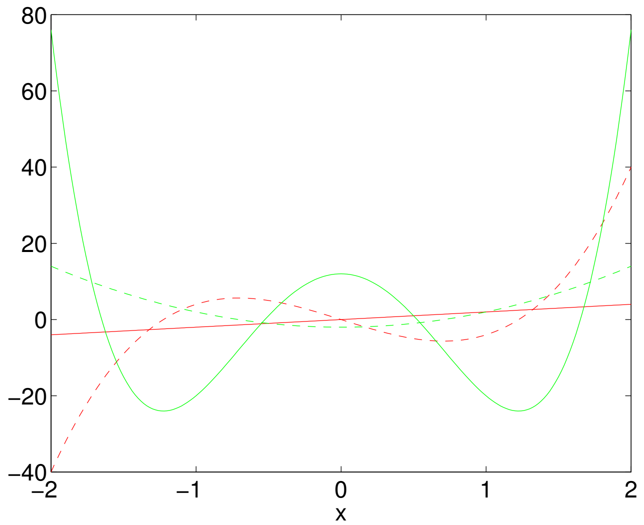

Figura II.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Derivando la (II.90) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H_n'(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H_n'(z) = \text{cost.} H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n\, z^n + \ldots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1}\, z^{n-1} + \ldots$, risulta $n\, 2^n = \text{cost.} 2^{n-1}$ e quindi $\text{cost.} = 2n$. In altre parole,

$$\boxed{H_n'(z) = 2n\, H_{n-1}(z).} \tag{II.93}$$

Dalle equazioni (II.91) e (II.93) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$\boxed{2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z),} \tag{II.94}$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$.

dove abbiamo utilizzato $x^{\alpha+1} \to 0$ per $x \to 0^+$. Quindi per $\alpha > -1$ i polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ costituiscono un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x}\, dx)$.

Per calcolare la costante di normalizzazione facciamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)^2\, x^\alpha e^{-x}\, dx = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}\right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x)\right) x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x)\right) \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto n integrazioni per parti, utilizzato la (II.98) con $\alpha + j$ al posto di α, applicato l'espressione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \ldots$ e l'identità (A.1). In altre parole,

$$\boxed{\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{n,m},} \tag{II.104}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (II.100) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$x(v')'' + (\alpha + 2 - x)(v')' + (n-1)(v') = 0.$$

Quindi $L_n^{(\alpha)\prime}(x)$ è proporzionale a $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Siccome

$$L_n^{(\alpha)\prime}(x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots, \qquad L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

risulta per $\alpha > -1$

$$L_n^{(\alpha)\prime}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \tag{II.105}$$

L'ortogonalità di $L_n^{(\alpha)}(x)$ a tutti i polinomi di grado minore di n nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x}\, dx)$ conduce all'identità

$$x L_n^{(\alpha)}(x) = A_n^{(\alpha)} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + B_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{II.106}$$

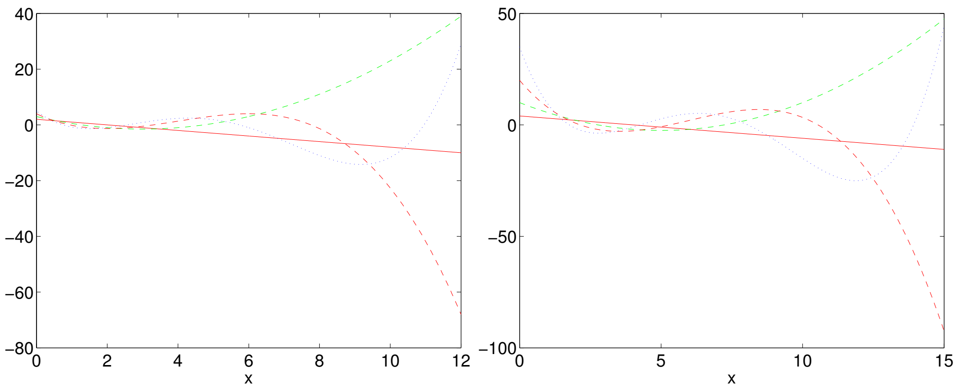

Figura II.5: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$
\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\, x^\alpha e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\}\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\}\right) x^{n+1+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\}\right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \ldots$. Poi calcoliamo l'integrale:

$$
D_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2\, x^\alpha e^{-x}\, dx
$$

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\
&= 2\cos(t)\cos(nt) = 2xT_n(x), \\
U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\
&= \frac{2\cos(t)\sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x).
\end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1,1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \ldots$ per $n \in \mathbb{N}$.

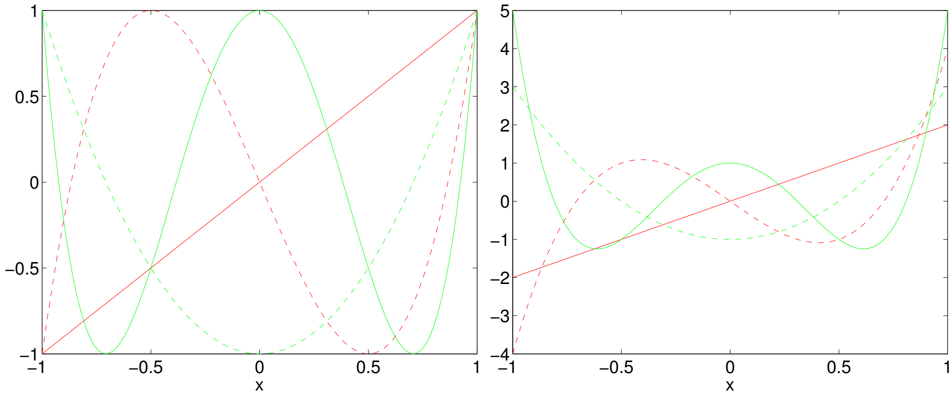

Figura II.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specia di grado 1, 2, 3 e 4. Nel panello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel panello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev di prima specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,dt &= \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m}, \\
\int_0^\pi \sin((n+1)t)\sin(m+1)t)\,dt &= \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\boxed{\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m},} \tag{II.115}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.} \tag{II.116}$$

Quindi $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ con peso $(1-x^2)^{-1/2}$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ con peso $(1-x^2)^{1/2}$, tranne per fattori costanti.

Le funzioni $\cos(nt)$ e $\sin(nt)$ soddisfano all'equazione differenziale $u''(t) + n^2u(t) = 0$. Sostituendo $x = \cos(t)$ e utilizzando le definizioni per $T_n(x)$ e $U_n(x)$ otteniamo

$$\boxed{\begin{cases} (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n^2U_n(x) = 0. \end{cases}}$$

In forma Sturm-Liouville abbiamo

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)^{1/2}T_n'(x)\right) = -n^2\dfrac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)^{3/2}U_n'(x)\right) = -n^2\sqrt{1-x^2}\,U_n(x). \end{cases}}$$

9 Polinomi Ortogonali Generali

Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n}w(x)\,dx < \infty$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Allora i polinomi sono tutti elementi dello spazio di Hilbert $L^2(I; w\,dx)$. Infatti, i polinomi costituiscono un sottospazio lineare denso in $L^2(I; w\,dx)$, un fatto che non dimostriamo. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rispetto al peso w, dove il grado di p_n è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f \in L^2(I; w\,dx)$ e definendo i coefficienti

$$c_n = \int_I f(x)p_n(x)w(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

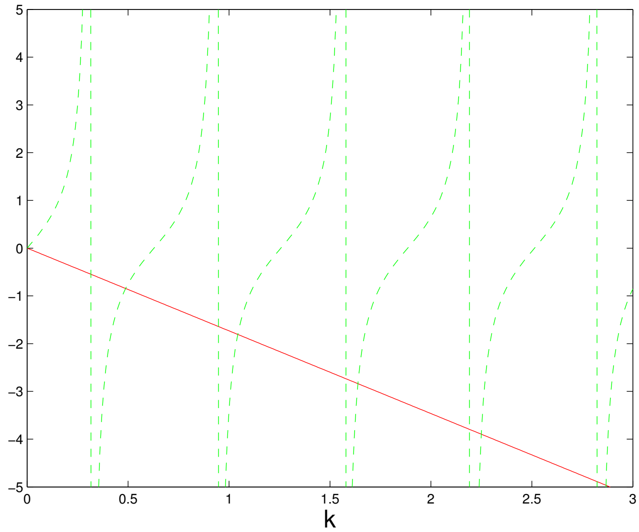

Figura IV.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan \alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)f(y)\,dy, \qquad u \in L^2(0,\ell), \quad \text{(IV.18)}$$

dove $\mathcal{G}(x,y)$ è la funzione di Green dell'operatore L. Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (IV.17) *e* (IV.18) *appartengono ad $\mathcal{M}_L$.*

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (IV.17), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)[\lambda u(y) + f(y)]\,dy, \qquad 0 \le x \le \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (IV.18).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L^2(0,\ell)$ soddisfi l'equazione integrale (IV.18). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x,y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\overline{L})$ e $\overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = -\frac{v_1(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2(x)\displaystyle\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0,\ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L^1(0,\ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0,\ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = -\frac{v_1'(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2'(x)\displaystyle\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0,\ell]$. Inoltre, dalla (IV.6) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (IV.2). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. □

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\overline{L})$) appartiene ad $\mathcal{M}_L$. Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0,\ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy \tag{IV.19}$$

in $C[0,\ell]$ oppure in $L^2(0,\ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L.

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L. Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \tag{IV.20}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \tag{IV.21}$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\overline{L}) = D(\overline{L_1})$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (IV.1)-(IV.2) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x,y)u(y)\,dy, \tag{IV.22}$$

dove $\mathcal{G}_1(x,y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1.

1.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni

Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouvville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea