Parziale, Fond. Analisi 1, 12.07.2011

cognome	nome	matricola

es.1	es.2	es.3	es.4	somma
8	7	7	8	30

1. Calcolare i residui della funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{\sin(2\pi z)\log(2-z)}{z^2(z-1)^3}$$

nei poli $z = 0$ e $z = 1$.

2. Utilizzare l'analisi complessa per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x^2}{(x^2+4)^2}.$$

3. Utilizzare l'analisi complessa per calcolare, per $\xi \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

4. Utilizzare l'analisi complessa per calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{17 - 8\cos(\theta)}.$$

1. $\sin(2\pi z)$ ha zeri semplice in $z = 0$ e $z = 1$; $\log(2 - z)$ ha uno zero semplice in $z = 1$ ed è uguale a$\log(2) \neq 0$ in $z = 0$. Quindi $f(z)$ ha poli semplici in $z = 0$ e $z = 1$ con i seguenti residui:

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(2\pi z)}{z} \frac{\log(2-z)}{(z-1)^3} = 2\pi \frac{\log(2)}{-1} = -2\pi\log(2),$$
$$\lim_{z\to 1} (z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\sin(2\pi z)}{z-1} \frac{\log(2-z)}{z-1} = \lim_{z\to 1} \frac{2\pi\cos(2\pi z)}{1} \frac{-1}{2-z} = -2\pi.$$

2. Sia $f(z) = [z^2/(z^2+4)^2]$. Allora il residuo di $f(z)$ in $z = 2i$ è dato dall'espressione

$$\lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+2i)^2} = \lim_{z\to 2i} \frac{2z}{z+2i} \frac{2i}{(z+2i)^2} = -\frac{i}{8}.$$

Quindi l'integrale value $2\pi i \cdot \frac{-i}{8} = \frac{\pi}{4}$. Chiudendo il contorno mediante la semicirconferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \arg(z) \in [0,\pi]\}$, per $R > 2$ l'integrale lungo la semicirconferenza viene stimato da

$$\pi R \frac{R^2}{(R^2-4)^2} \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

3. Sia $f(z) = 1/[(z^2+1)(z^2+4)]$. Per $\xi \geq 0$ calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} f(z)\,dz &= \int_{C_R^+} e^{i\xi z} f(z)\,dz \\ &= 2\pi \left[\mathrm{Res}_{z=i} e^{i\xi z} f(z) + \mathrm{Res}_{z=2i} e^{i\xi z} f(z)\right] \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{2i} \frac{e^{-\xi}}{(i)^2+4} + \frac{1}{4i} \frac{e^{-2\xi}}{(2i)^2+1} \right\} = \frac{\pi}{3} e^{-\xi} - \frac{\pi}{6} e^{-2\xi}, \end{aligned}$$

essendo $C_R^+ = [-R,R] \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \arg(z) \in [0,\pi]\}$ con l'orientamento antiorario. Poichè l'integrale originale è uguale alla-parte reale di quello precedente per $\xi \geq 0$ ed è anche una funzione pari di ξ, si ottiene:

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{3} e^{-|\xi|} - \frac{\pi}{6} e^{-2|\xi|}.$$

4. Sostituendo $z = e^{i\theta}$ e $d\theta = [dz/iz]$, si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{17 - 8\cos(\theta)} = \oint \frac{dz}{iz} \frac{1}{17 - 4(z + z^{-1})} = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{17z - 4z^2 - 4}$$
$$= \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{-4(z-4)(z-\frac{1}{4})} = 2\pi i \frac{1}{i} \left[\frac{1}{-4(z-4)} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{15}.$$