Parziale, Fond. Analisi 1, 06.12.2011

cognome	nome	matricola

es.1	es.2	es.3	es.4	somma
8	7	7	8	30

1. Calcolare i residui della funzione meromorfa
$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z^2(z-1)^2}$$
nei poli $z = 0$ e $z = 1$.

2. Utilizzare l'analisi complessa per calcolare l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

3. Utilizzare l'analisi complessa per calcolare, per $\xi \in \mathbb{R}$, l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi x)}{x^2+16}\, dx.$$

4. Utilizzare l'analisi complessa per calcolare l'integrale
$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{13+12\sin(\theta)}.$$

1. **SOLUZIONE**: Si ha:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi\cos(\pi z)}{(z-1)^2 + 2z(z-1)} = \pi,$$
$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 1} \frac{\pi z\cos(\pi z) - 2\sin(\pi z)}{z^3} = -\pi.$$

2. **SOLUZIONE**: Sia $C_R^+ = \{Re^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\}$ con orientamento antiorario e $\gamma_R = [-R, R] \cup C_R^+$. Allora

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} &= 2\pi i\left\{\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2i} f(z)\right\} \\ &= 2\pi i\left\{\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+4)} + \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z^2+1)(z^2+4)}\right\} \\ &= 2\pi i\left\{\lim_{z\to i} \frac{1}{4z(z^2+\frac{5}{2})} + \lim_{z\to 2i} \frac{1}{4z(z^2+\frac{5}{2})}\right\} = 2\pi i\left[\frac{1}{6i} + \frac{1}{-12i}\right] = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Dalla stima

$$|f(z)| \le \frac{1}{(R-1)(R-2)\sqrt{(R^2+1)(R^2+4)}}, \qquad z \in C_R^+,\ R > 2,$$

segue che l'integrale di $f(z)$ lungo C_R^+ tende a zero se $R \to +\infty$.

3. **SOLUZIONE**: Per $\xi > 0$ calcoliamo

$$\begin{aligned}F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{x^2+16} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=4i} \frac{e^{i\xi z}}{z^2+16} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to 4i} \frac{e^{i\xi z}}{z+4i} = 2\pi i \frac{e^{-4\xi}}{8i} = \frac{\pi}{4} e^{-4|\xi|},\end{aligned}$$

un risultato finale che vale anche per $\xi < 0$ [sostituendo $x \mapsto -x$ nell'integrale originale] e $\xi = 0$ [applicando il Teorema della Convergenza Dominata]. Si può dimostrare, come nel secondo esercizio, che l'integrale lungo C_R^+ tende a zero se $R \to +\infty$, uniformemente in $\xi \in \mathbb{R}$.

4. **SOLUZIONE**: Sostituendo $z = e^{i\theta}$, si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 12\sin(\theta)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/(iz)}{13 - 6i[z - z^{-1}]} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{13iz + 6z^2 - 6}$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-\frac{2}{3}i} \frac{1}{13iz + 6z^2 - 6}$$
$$= 2\pi i \lim_{z \to -\frac{2}{3}i} \frac{z + \frac{2}{3}i}{13iz + 6z^2 - 6} = 2\pi i \lim_{z \to -\frac{2}{3}i} \frac{1}{13i + 12z} = \frac{2\pi}{5}.$$