FUNZIONI ANALITICHE ED APPLICAZIONI

Laurea Specialistica in Matematica
A.A. 2011-2012

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 328-0089799 (cell.)

cornelis@krein.unica.it
http:\\krein.unica.it\∼cornelis

Prefazione

In questo documento verrà presentata la teoria delle funzioni analitiche, anche detta l'analisi complessa). A differenza dell'analisi reale, la derivazione di una funzione viene definita rispetto ad una variabile complessa $\boldsymbol{z}$ appartenente ad un aperto Ω del piano complesso $\mathbb{C}$. In tal modo la forma differenziale complessa

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} &= [u(x,y) + iv(x,y)](dx + i\, dy) \\ &= [u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy] + i[v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy] \end{aligned}$$

dove $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ e $\boldsymbol{z} = x + iy$, risulta chiusa. Se il dominio Ω è semplicemente connesso, la forma differenziale è esatta e, di conseguenza, abbiamo l'identità

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} = 0$$

valida per qualunque curva chiusa γ contenuta nel dominio Ω. L'equazione precedente rappresenta il Teorema di Cauchy che costituisce il risultato centrale dell'analisi complessa.

I punti $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{z} = x + iy \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Oltre alle operazioni usualmente definite in uno spazio vettoriale reale di dimensione 2, nel piano complesso $\mathbb{C}$ si introduce anche la moltiplicazione definita nella seguente modo:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

essendo $(i)^2 = -1$. Ad ogni numero complesso $\boldsymbol{z} = x + iy$ si associano la parte reale x e la parte immaginaria y. Utilizzando le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$ e convertendo il punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in un numero complesso $\boldsymbol{z} = x + iy$, si definiscono il modulo $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e l'argomento $\theta = \arctan(y/x)$ in modo tale che

$$\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|(\cos\theta + i\sin\theta) = |\boldsymbol{z}|e^{i\theta}.$$

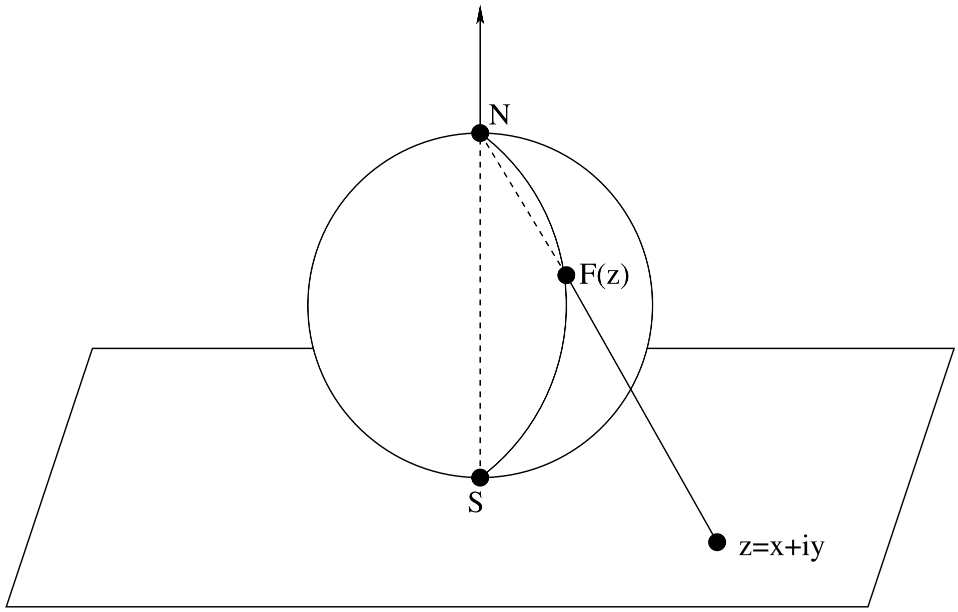


Figura .1: La superfice sferica tocca il piano complesso nel Polo Sud $S(0,0,0)$ e nell'origine complessa $\boldsymbol{z}=0$. La retta passante per il Polo Nord $N(0,0,2)$ e il punto $(x,y,0)$ interseca la superficie sferica nel punto $F(\boldsymbol{z})$ (corrispondente al numero complesso $\boldsymbol{z}=x+iy$).

Tramite la cosiddetta proiezione stereografica si possono rappresentare i punti $\boldsymbol{z}$ del piano complesso esteso $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ come punti di una superficie sferica (detta sfera di Riemann). Per realizzare tale associazione, consideriamo la superficie sferica di equazione

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

e il piano ad essa tangente nell'origine di equazione $z=0$. Tramite la corrispondenza $(x,y,0)\leftrightarrow x+iy)$, facciamo corrispondere al piano di equazione $z=0$ il piano complesso esteso. Possiamo mettere in corrispondenza biunivoca il piano complesso e la superficie sferica, facendo corrispondere $x+iy$ con il punto di intersezione della superficie sferica con la retta congiungente il punto $(x,y,0)$ [appartenente al piano complesso] con il Polo Nord della sfera [avente coordinate $(0,0,2)$]. Le coordinate del punto di intersezione sono:

$$F(\boldsymbol{z})=\left(\frac{4x}{|\boldsymbol{z}|^2+4},\frac{4y}{|\boldsymbol{z}|^2+4},\frac{2|\boldsymbol{z}|^2}{|\boldsymbol{z}|^2+4}\right).$$

Si vede facilmente che il punto di intersezione $F(\boldsymbol{z})$ tende al punto $(0,0,2)$ se $|\boldsymbol{z}|\to+\infty$.

La suddetta superficie sferica si chiama *sfera di Riemann*. La trasformazione F^{-1} dal punto della sfera di Riemann ad un punto del piano complesso esteso si chiama *proiezione stereografica*.[1]

In questo documento verrà dettagliatamente presentata l'analisi complessa. Nel primo capitolo verrà dimostrato il Teorema di Cauchy e i suoi principali corollari. Nel secondo capitolo tratteremo le funzioni meromorfe e la classificazione delle singolarità. In particolare, verranno introdotti i residui senza soffermarci sulle sue applicazioni al calcolo degli integrali definiti. Nel terzo capitolo verrà dimostrato il Teorema di Weierstrass sulla rappresentazione delle funzioni analitiche come prodotti infiniti. Verrà anche discusso il Teorema di Hadamard. Nel quarto capitolo verranno dimostrati il Teorema di Runge sull'approssimazione delle funzioni analitiche mediante funzioni razionali e quello di Mittag-Lefler sulla costruzione delle funzioni analitiche utilizzando le cosiddette parti principali. Nel quinto capitolo verrà discussa la trasformata di Fourier. Alcuni risultati necessari alla comprensione dei vari argomenti si trovano nelle Appendici.

[1]Tramite la corrispondenza biunivoca tra superficie sferica e piano complesso esteso, si può definire una topologia su $\mathbb{C}_\infty$ tale che $\mathbb{C}_\infty$ è uno spazio compatto di Hausdorff.

Indice

Capitolo I

Funzioni Analitiche

In questo capitolo introduciamo i concetti di base sulle funzioni analitiche e armoniche e dimostriamo i principali teoremi. In particolare vengono dimostrate varie versioni del Teorema di Cauchy e vengono discusse alcune proprietà elementari quali il principio del massimo, il Teorema di Liouville e l'indice di una curva.

1 Differenziabilità e Analiticità

Sia Ω un sottoinsieme aperto del piano complesso $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. Allora f si dice *differenziabile* in $z_0 \in \Omega$ se esiste finito il limite

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{I.1}$$

Il limite $f'(z_0)$ si chiama la *derivata* della f in z_0. Ovviamente una funzione derivabile in z_0 è continua in z_0, poichè

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)| = \left(\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \right) \cdot \left(\lim_{z \to z_0} |z - z_0| \right) = |f'(z_0)| \cdot 0 = 0.$$

Contrariamente al caso della derivazione delle funzioni definite su un intervallo, il numero $z - z_0$ che appare nella definizione (I.1) è un numero complesso.

Scegliendo nella (I.1) $z - z_0 \in \mathbb{R}$ oppure $z - z_0 \in i\mathbb{R}$, si ottengono le cosiddette equazioni di Cauchy-Riemann. Infatti, per $f = u + iv$ ($u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni reali) e $z = x + iy$ si trova

$$f'(z_0) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)}_{\text{scegliendo } z - z_0 \in \mathbb{R}} = \underbrace{-i \left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \right)}_{\text{scegliendo } z - z_0 \in i\mathbb{R}}.$$

Quindi seguono le *equazioni di Cauchy-Riemann*[1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{I.2}$$

Sia Ω un aperto in $\mathbb{C}$. Allora $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *analitica* se f è differenziabile in ogni punto $z_0 \in \Omega$ e la sua derivata f' è continua. Una funzione complessa f si dice *analitica in* z_0 se esiste un intorno di z_0 in cui è analitica.[2]

Teorema I.1 (Derivazione della funzione composta) *Siano* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *e* $g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ *funzioni analitiche tali che* $f[\Omega] \subset \tilde{\Omega}$. *Allora* $g \circ f$ *è analitica in* Ω *e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \qquad z \in \Omega.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema soltanto sotto l'ipotesi che esista $\varepsilon > 0$ tale che $f(z) \neq f(z_0)$ per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Ciò è ovviamente vero se $f'(z_0) \neq 0$. Se la f fosse costante, lo sarebbe anche la $g \circ f$, implicando il teorema.

Quindi supponiamo che $f(z) \neq f(z_0)$ per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Allora

$$\frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Poichè $\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$ per la continuità della f in z_0, allora

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

$\square$

Dimostriamo ora la seguente proprietà.

Proposizione I.2 *Sia* Ω *un aperto connesso in* $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *differenziabile e* $f'(z) = 0$ *per ogni* $z \in \Omega$. *Allora* f *è costante.*

Uno spazio topologico X si dice *connesso* se $X = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ e A e B simultaneamente aperti e chiusi, implica che $A = \emptyset$ oppure $B = \emptyset$.

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e poniamo $A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$. Dimostreremo che A è aperto e chiuso in Ω, in modo che $A = \Omega$.

[1] Secondo (I.2) le forme differenziali $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono chiuse.

[2] Secondo il Teorema di Goursat una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è analitica se e solo se essa è differenziabile.

Sia $z \in \Omega$ e sia $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione in A con limite z. Allora $f(z_n) = f(z_0)$ per $n = 1, 2, \cdots$. Per la continuità della f in z ne segue che $f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$, cioè $z \in A$. Di conseguenza, A è chiuso in Ω.

Ora prendiamo un punto $w \in \Omega$ e scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che la palla aperta $B_\varepsilon(w) = \{z \in \Omega : |z - w| < \varepsilon\} \subset \Omega$. Per qualunque $z \in B_\varepsilon(w)$ poniamo $g(t) = f(tz + (1-t)w)$, $0 \le t \le 1$. Allora

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} = \frac{g(t) - g(s)}{(t-s)z + (s-t)w} \cdot \frac{(t-s)z + (s-t)w}{t - s}.$$

Dunque per $t \to s$ abbiamo

$$\lim_{t\to s} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} = f'(sz + (1-s)w) \cdot (z - w) = 0,$$

ossia $g'(s) = 0$ per $0 \le s \le 1$, che implica che g è costante. Quindi $f(z) = g(1) = g(0) = f(w) = f(z_0)$, cioè $B_\varepsilon(w) \subset A$. In altre parole, abbiamo dimostrato che A è aperto (in Ω).

Essendo A aperto e chiuso in Ω, $z_0 \in A$, e poichè, per ipotesi, Ω è connesso, si ha $A = \Omega$. □

2 Trasformazioni di Möbius

Siano a, b, c, d quattro numeri complessi tali che $ad - bc \neq 0$. Allora la mappa

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{I.3}$$

si dice *trasformazione di Möbius.* Noi consideriamo la S come una trasformazione del piano complesso esteso $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in se stesso.

Proposizione I.3 *Le trasformazioni di Möbius costituiscono un gruppo non abeliano rispetto alla composizione.*

Dimostrazione. Consideriamo le trasformazioni di Möbius

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad T(z) = \frac{ez + f}{gz + h},$$

con $ad - bc \neq 0$ e $eh - fg \neq 0$. Allora

$$(T \circ S)(z) = T(S(z)) = \frac{e\dfrac{az + b}{cz + d} + f}{g\dfrac{az + b}{cz + d} + h} = \frac{(ae + cf)z + (be + df)}{(ag + ch)z + (bg + dh)},$$

dove

$$(ae + cf)(bg + dh) - (be + df)(ag + ch) = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0.$$

In altre parole, $(T \circ S)(z) = (pz + q)/(rz + s)$, dove

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Quindi $T \circ S$ è una trasformazione di Möbius. Nella stessa maniera dimostriamo che

$$S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

è una trasformazione di Möbius (si noti che $da - (-b)(-c) \neq 0$) tale che $S^{-1} \circ S$ e $S \circ S^{-1}$ coincidono con la trasformazione identità (che è trasformazione di Möbius, per $a = d = 1$ e $b = c = 0$). □

Due trasformazioni di Möbius,

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

sono identiche se e solo se esiste $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha = \lambda a$, $\beta = \lambda b$, $\gamma = \lambda c$ e $\delta = \lambda d$.[3]

Ci sono alcune trasformazioni di Möbius particolari: la *traslazione* $S(z) = z + p$, la *dilatazione* $S(z) = \lambda z$ per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, la *rotazione* $S(z) = e^{i\theta} z$ per $\theta \in \mathbb{R}$, e l'*inversione* $S(z) = (1/z)$. Le traslazioni, le dilatazioni e le rotazioni costituiscono sottogruppi abeliani del gruppo di Möbius. L'inversione più l'identità costituiscono un sottogruppo di ordine 2.

Proposizione I.4 *Ogni trasformazione di Möbius si può scrivere come prodotto di traslazioni, dilatazioni e inversioni, dove alcuni fattori potrebbero mancare.*

Dimostrazione. Sia S la trasformazione di Möbius definita dalla (I.3).

Se $c = 0$ e quindi $ad \neq 0$, allora $S = S_2 \circ S_1$, dove $S_2(z) = (a/d)z$ è una dilatazione e $S_1(z) = z + (b/a)$ è una traslazione.

Se $c \neq 0$, allora $S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, dove $S_1(z) = z + (d/c)$ è una traslazione, $S_2(z) = (1/z)$ è un'inversione, $S_3(z) = ((bc - ad)/c^2)z$ è una dilatazione e $S_4(z) = z + (a/c)$ è una traslazione. □

[3] Il gruppo delle trasformazioni di Möbius è isomorfo al gruppo quoziente $SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$, essendo $SL_2(\mathbb{C})$ il gruppo delle matrici complesse con determinante uguale ad 1 e $\{\pm I_2\}$ il gruppo di ordine 2 con elementi $\pm I_2$.

I punti fissi della trasformazione di Möbius (I.3) (cioè gli z per cui $S(z) = z$) sono le soluzioni dell'equazione

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Di conseguenza, S ha al massimo due punti fissi, a meno che S non sia l'identità.

Sia S una trasformazione di Möbius, a, b, c tre punti diversi di $\mathbb{C}_\infty$, e $\alpha = S(a)$, $\beta = S(b)$ e $\gamma = S(c)$. Sia T un'altra trasformazione di Möbius con le stesse proprietà. Allora $T^{-1} \circ S$ ha a, b, c come tre punti fissi diversi e dunque coincide con l'identità. Di conseguenza $T = S$. In altre parole, una trasformazione di Möbius viene determinata in modo unico dalla sua azione su tre punti in $\mathbb{C}_\infty$.

Siano $z_2, z_3, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ tre punti diversi. Definiamo

$$S(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{z - z_3}{z - z_4}\right) / \left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right), & \{z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbb{C}, \\ \dfrac{z - z_3}{z - z_4}, & z_2 = \infty, \\ \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4}, & z_3 = \infty, \\ \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}, & z_4 = \infty. \end{cases}$$

Allora $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$ e $S(z_4) = \infty$, mentre S è l'unica trasformazione di Möbius che ha tali proprietà. Indicando con $\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4)$ l'immagine di z_1 sotto S, si ha

$$\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sigma(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \qquad \text{(I.4)}$$

per una trasformazione di Möbius T qualsiasi. Infatti, se $S(z) = \sigma(z, z_2, z_3, z_4)$ e $M = S \circ T^{-1}$ (ambedue trasformazioni di Möbius), allora $M(T(z_2)) = 1$, $M(T(z_3)) = 0$ e $M(T(z_4)) = \infty$ e dunque

$$(S \circ T^{-1})(z) = \sigma(z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

per ogni $z \in \mathbb{C}_\infty$. Dalla scelta $z = z_1$ discende l'affermazione.

Corollario I.5 *Se z_2, z_3, z_4 sono tre punti diversi di $\mathbb{C}_\infty$ e $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ sono tre punti diversi di $\mathbb{C}_\infty$, allora esiste un'unica trasformazione di Möbius tale che $S(z_2) = \omega_2$, $S(z_3) = \omega_3$ e $S(z_4) = \omega_4$.*

Dimostrazione. Siano $T(z) = \sigma(z, z_2, z_3, z_4)$ e $M(z) = \sigma(z, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Allora $S = M^{-1} \circ T$ ha tutte le proprietà che si vogliono. Se ci fosse un'altra trasformazione di Möbius con le stesse proprietà, allora $R^{-1} \circ S$ avrebbe i tre punti fissi diversi z_2, z_3, z_4 e dovrebbe coincidere con l'identità. □

Nella nostra terminologia una retta è una circonferenza che passa per il punto ∞. In tal caso tre punti diversi in $\mathbb{C}_\infty$ determinano una circonferenza in modo unico.

Proposizione I.6 *Quattro punti diversi z_1, z_2, z_3, z_4 di $\mathbb{C}_\infty$ appartengono alla stessa circonferenza se e solo se $\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia S la trasformazione di Möbius definita da $S(z) = \sigma(z, z_2, z_3, z_4)$. Allora $S^{-1}[\mathbb{R}] = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \sigma(z, z, z_3, z_4) \in \mathbb{R}\}$. Basta dimostrare che l'immagine della retta estesa $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sotto una trasformazione di Möbius è una circonferenza.

Sia S la trasformazione di Möbius (I.3). Se $x \in \mathbb{R}$ e $x = S(\omega)$, allora $S(\omega) = x = \overline{x} = \overline{S(\omega)}$. Cioè,

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{\overline{a\omega} + \overline{b}}{\overline{c\omega} + \overline{d}}.$$

Moltiplicando ambo i membri per i denominatori otteniamo

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|\omega|^2 + (a\overline{d} - \overline{b}c)\omega + (b\overline{c} - \overline{a}d)\overline{\omega} + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0. \qquad \text{(I.5)}$$

Se $a\overline{c} \in \mathbb{R}$, allora $a\overline{c} - \overline{a}c = 0$; ponendo $\alpha = 2(a\overline{d} - \overline{b}c)$ e $\beta = i(b\overline{d} - \overline{b}d)$ e moltiplicando la (I.5) per i, otteniamo $0 = \mathrm{Im}(\alpha\omega) - \beta = \mathrm{Im}(\alpha\omega - \beta)$, poichè $\beta \in \mathbb{R}$. Cioè, ω appartiene alla retta $\{\zeta \in \mathbb{C} : \alpha\zeta - \beta \in \mathbb{R}\}$. Se $a\overline{c}$ non è reale, allora la (I.5) diventa

$$|\omega|^2 + \overline{\gamma}\omega + \gamma\overline{\omega} - \delta = 0$$

per opportune costanti $\gamma \in \mathbb{C}$ e $\delta \in \mathbb{R}$. Quindi $|\omega + \gamma| = \lambda$, dove

$$\lambda = (|\gamma|^2 + \delta)^{1/2} = \left|\frac{ad - bc}{\overline{a}c - a\overline{c}}\right| > 0.$$

Quest'ultima equazione rappresenta una circonferenza. □

Teorema I.7 *Una trasformazione di Möbius trasforma circonferenze in circonferenze.*

Dimostrazione. Sia Γ una circonferenza e sia S una trasformazione di Möbius. Siano z_2, z_3, z_4 tre punti diversi di Γ e sia $\omega_j = S(z_j)$ per $j = 2, 3, 4$. Allora $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ determinano un'unica circonferenza Γ'. Allora $S[\Gamma] = \Gamma'$. Infatti, per ogni $z \in \mathbb{C}_\infty$ si ha [Vedi la (I.4)]

$$\sigma(z, z_2, z_3, z_4) = \sigma(Sz, \omega_2, \omega_3, \omega_4). \qquad \text{(I.6)}$$

Secondo la Proposizione I.6, $z \in \Gamma$ se e solo se la parte a sinistra della (I.6) è reale, mentre $Sz \in \Gamma'$ se e solo se la parte a destra della (I.6) è reale. In altre parole, $z \in \Gamma$ se e solo se $Sz \in \Gamma'$. □

Corollario I.8 *Per ogni coppia di circonferenze* Γ *e* Γ' *in* $\mathbb{C}_\infty$ *esiste una trasformazione di Möbius* T *tale che* $T[\Gamma] = \Gamma'$.

Ora studiamo il comportamento delle parti interna ed esterna di una circonferenza sotto l'effetto di una trasformazione di Möbius.

Definizione I.9 Sia Γ la circonferenza che contiene i tre punti diversi z_2, z_3, z_4 in $\mathbb{C}_\infty$. Allora i punti z, z^* in $\mathbb{C}_\infty$ si dicono *simmetrici* rispetto a Γ se e solo se

$$\sigma(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{\sigma(z, z_2, z_3, z_4)}.$$

Questa definizione dipende soltanto da Γ e non dalla scelta dei tre punti z_2, z_3, z_4.

Il punto z è simmetrico a se stesso rispetto a Γ se e solo se $z \in \Gamma$.

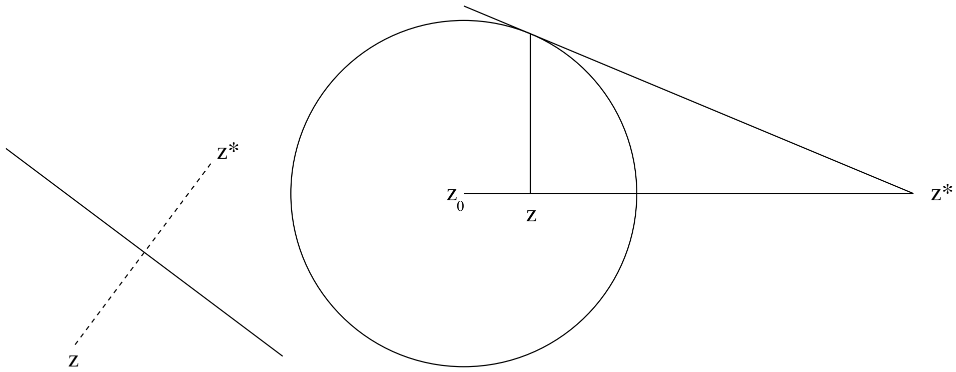


Figura I.1: Due punti simmetrici z e z^*, prima rispetto ad una retta, poi rispetto ad una circonferenza.

Nel caso in cui Γ è una retta, scegliamo $z_4 = \infty$ tra i tre punti. In tal caso il punto z^* è simmetrico a z rispetto a Γ se e solo se

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}},$$

cioè $|z^* - z_3| = |z - z_3|$ per ogni punto finito $z_3 \in \Gamma$. Inoltre,

$$\operatorname{Im} \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im} \frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}} = -\operatorname{Im} \frac{z - z_3}{z_2 - z_3},$$

cioè z e z^* appartengono ai due semipiani diversi determinati da Γ. Di conseguenza, il segmento $[z, z^*]$ è ortogonale alla retta Γ.

Supponiamo che $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ and che z_2, z_3, z_4 siano tre punti diversi di Γ. Allora

$$\begin{aligned}\sigma(z^*, z_2, z_3, z_4) &= \overline{\sigma(z, z_2, z_3, z_4)} = \overline{\sigma(z - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0, z_4 - z_0)} \\ &= \sigma\left(\overline{z} - \overline{z_0}, \frac{R^2}{z_2 - z_0}, \frac{R^2}{z_3 - z_0}, \frac{R^2}{z_4 - z_0}\right) \\ &= \sigma\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}, z_2 - z_0, z_3 - z_0, z_4 - z_0\right) \\ &= \sigma\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0, z_2, z_3, z_4\right).\end{aligned}$$

Quindi $z^* = z_0 + (R^2/(\overline{z} - \overline{z_0}))$ oppure $(z^* - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = R^2$. Dunque

$$\frac{z^* - z_0}{z - z_0} = \frac{R^2}{|z - z_0|^2} > 0.$$

Teorema I.10 (Principio di simmetria) *Se una trasformazione di Möbius S trasforma la circonferenza Γ_1 nella circonferenza Γ_2, allora S trasforma due punti simmetrici rispetto a Γ_1 in punti simmetrici rispetto a Γ_2.*

Dimostrazione. Siano z_2, z_3, z_4 tre punti diversi di Γ_1. Se z, z^* sono simmetrici rispetto a Γ_1, allora

$$\begin{aligned}&\sigma(S(z^*), S(z_2), S(z_3), S(z_4)) = \sigma(z^*, z_2, z_3, z_4) \\ &= \overline{\sigma(z, z_2, z_3, z_4)} = \overline{\sigma(S(z), S(z_2), S(z_3), S(z_4))}.\end{aligned}$$

Quindi $S(z)$ e $S(z^*)$ sono simmetrici rispetto a Γ_2. □

Discutiamo ora l'orientamento delle circonferenze.

Definizione I.11 Data una circonferenza Γ, un orientamento di Γ è una tripletta ordinata (z_1, z_2, z_3) di tre punti diversi di Γ. Dato un orientamento (z_1, z_2, z_3) di Γ, i punti z a destra di Γ sono i punti z che soddisfano $\operatorname{Im} \sigma(z, z_1, z_2, z_3) > 0$, mentre i punti z a sinistra di Γ sono quelli che soddisfano $\operatorname{Im} \sigma(z, z_1, z_2, z_3) < 0$.

Teorema I.12 (Principio di orientamento) *Siano Γ_1 e Γ_2 circonferenze e sia S una trasformazione di Möbius tale che $S[\Gamma_1] = \Gamma_2$. Sia (z_1, z_2, z_3) un orientamento di Γ_1. Allora S trasforma i punti a destra (sinistra) di Γ_1 in punti a destra (sinistra) di Γ_2.*

3 Teorema di Cauchy: Casi Elementari

Dimostriamo ora che una funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ può essere sviluppata in una serie di potenze attorno ad ogni punto $z_0 \in \Omega$.

Proposizione I.13 *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e supponiamo che $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset \Omega$. Se $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, allora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad |z - z_0| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Considerando la regione $\Omega_1 = \{(z - z_0)/\varepsilon : z \in \Omega\}$ e la funzione $g(z) = f(z_0 + \varepsilon z)$ si vede facilmente che basterebbe limitarci al caso $z_0 = 0$ e $\varepsilon = 1$. In altre parole, supponiamo che $\overline{B_1(0)} \subset \Omega$.

Dobbiamo dimostrare che, per $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z}\, ds.$$

Cioè, dobbiamo dimostrare che

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z}\, ds - 2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right) ds.$$

Sia

$$\varphi(s,t) = \frac{f(z + t(e^{is} - z))e^{is}}{e^{is} - z} - f(z),$$

dove $t \in [0,1]$ e $s \in [0, 2\pi]$. Poichè $|z + t(e^{is} - z)| = |z(1-t) + e^{is}t| < 1$, la funzione φ è ben definita e di classe C^1. Dunque $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\, ds$ è di classe C^1.

Ora dimostriamo che $g(t)$ è costante e $g(0) = 0$, che implica $g(1) = 0$ e quindi che vale la proposizione. Infatti,

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^{2\pi} \varphi(s,0)\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(z)e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right) ds \\ &= f(z) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z}\, ds - 2\pi \right\} = 0. \end{aligned}$$

Poi per $0 < t \leq 1$ si ha

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} e^{is} f'(z + t(e^{is} - z))\, ds = \left[-it^{-1} f(z + t(e^{is} - z)) \right]_{s=0}^{2\pi} = 0.$$

Quindi la continuità della g in $t \in [0,1]$ implica che $g(1) = g(0) = 0$. $\square$

Sia $|z-z_0|<\varepsilon$ e supponiamo che $|w-z_0|=\varepsilon$. Allora

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n,$$

dove $|(z-z_0)/(w-z_0)|<1$.

Teorema I.14 *Sia $f: B_R(z_0)\to\mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora per $\gamma(t)=z_0+\varepsilon e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$ e $\varepsilon\in(0,R)$, si ha*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right),\qquad |z-z_0|<R,$$

dove il raggio di convergenza della serie di potenze è almeno uguale ad R.

Dimostrazione. Per $|z-z_0|<\varepsilon$ si calcoli

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n,\end{aligned}$$

dove la convergenza assoluta della serie di potenze segue dalla stima

$$\frac{|f(w)|\,|z-z_0|^n}{|w-z_0|^{n+1}}\le\frac{\max\{|f(w)|:|w-z_0|=\varepsilon\}}{\varepsilon}\left(\frac{|z-z_0|}{\varepsilon}\right)^n.$$

□

Di conseguenza, una funzione analitica $f:\Omega\to\mathbb{C}$ è infinitamente derivabile e può essere sviluppata in una serie di potenze attorno ad ogni punto $z_0\in\Omega$ con raggio di convergenza $\ge \mathrm{dist}(z_0,\partial\Omega)$. Inoltre, in tal caso

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

dove $\gamma(t)=z_0+\varepsilon e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ per qualunque $\varepsilon>0$ inferiore a $\mathrm{dist}(z_0,\partial\Omega)$. Prendendo il valore assoluto sotto il segno dell'integrale e utilizzando $|w-z_0|=\varepsilon$, otteniamo la cosiddetta *stima di Cauchy*

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!\,M}{\varepsilon^n},\qquad M=\max\{|f(w)|:|w-z_0|=\varepsilon\}.$$

Una curva $\gamma : [0,1] \to \Omega$ si dice *rettificabile* se γ è di variazione limitata, cioè se

$$L(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1 \right\} < +\infty.$$

Il numero $L(\gamma)$ si chiama la lunghezza della curva γ.

Proposizione I.15 (Teorema di Cauchy) *Sia $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia γ una curva chiusa e rettificabile in $B_R(z_0)$. Allora*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che la funzione f ha una primitiva. Sfruttando il Teorema I.13 possiamo scrivere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ per $|z - z_0| < R$. Sia

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \right) (z - z_0)^{n+1} = (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \right) (z - z_0)^n.$$

Questa serie ha lo stesso raggio di convergenza della serie per f (cioè un numero $\geq R$), poichè $(n+1)^{1/n} \to 1$. Quindi la F è definita in tutto il disco $B_R(z_0)$. Inoltre, $F'(z) = f(z)$ per $|z - z_0| < R$.

Sia ora $\gamma : [0,1] \to B_R(z_0)$ una parametrizzazione della curva γ. Supponiamo che γ sia regolare a tratti, continua, chiusa (cioè $\gamma(0) = \gamma(1)$) e che esistano $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tali che γ sia di classe C^1 in $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$. Allora

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(w)\, dw &= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} [F(\gamma(t))]_{t=t_{k-1}}^{t_k} = 0, \end{aligned}$$

poichè $\gamma(t_0) = \gamma(t_m)$.

Infine, se γ è rettificabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un poligono

$$\delta = [\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)],$$

dove $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ e $\gamma(0) = \gamma(1)$, tale che

$$\left| \int_\gamma f(w)\, dw - \int_\delta f(w)\, dw \right| < \varepsilon.$$

In tal caso $|\int_\gamma f(w)\, dw| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque $\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$ $\square$

4 Proprietà delle Funzioni Analitiche

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora $z_0 \in \Omega$ si dice *zero di ordine* m della f se esiste una funzione analitica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $g(z) = (z - z_0)^m g(z)$ per $z \in \mathbb{C}$ e $g(z_0) \neq 0$.

Una *funzione intera* è una funzione analitica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Quindi i polinomi sono funzioni intere. Altri esempi di funzioni intere sono e^z, $\sin(z)$ e $\cos(z)$. Ogni funzione intera ammette uno sviluppo in serie di potenze con raggio di convergenza $+\infty$.

Teorema I.16 (Liouville) *Una funzione intera e limitata è costante.*

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica e sia $|f(z)| \leq M$ per $z \in \mathbb{C}$. Allora

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-w|=R} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^2}\, dw \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{M}{R},$$

qualunque sia $R > 0$. Quindi $f'(z) = 0$ per $z \in \mathbb{C}$ e dunque la f è costante. □

Corollario I.17 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio di grado ≥ 1 ha almeno uno zero.*

Dimostrazione. Sia $p(z)$ un polinomio senza zeri e non costante. Allora $f(z) = 1/p(z)$ è una funzione intera tale che $f(z) \to 0$ se $|z| \to +\infty$. Il Teorema I.16 implica che la f è costante e, in particolare, che $f(z) = 0$ per $z \in \mathbb{C}$, contraddizione. □

Dal Corollario I.17 si vede subito, usando il principio di induzione matematica, che ogni polinomio non costante ha la forma

$$p(z) = c(z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_m)^{\alpha_m},$$

dove gli zeri $z_1, \ldots, z_m$ sono numeri complessi diversi, $0 \neq c \in \mathbb{C}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono interi positivi.

Teorema I.18 *Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Se l'insieme degli zeri $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ ha un punto di accumulazione all'interno di Ω, allora $f(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ un punto di accumulazione dell'insieme degli zeri della f e sia $B_R(z_0) \subset \Omega$. Allora la continuità della f implica che $f(z_0) = 0$. Supponiamo ora che ci sia un intero $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Allora

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad |z - z_0| < R.$$

Ponendo $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}$, si vede che $g : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ è analitica, $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ e $g(z_0) = a_n \neq 0$. Per motivi di continuità esiste $\varepsilon \in (0, R)$ tale che $g(z) \neq 0$ per $|z - z_0| < \varepsilon$. Poichè z_0 è un punto di accumulazione dell'insieme degli zeri della f, esiste z_1 tale che $0 < |z_1 - z_0| < \varepsilon$ e $f(z_1) = 0$. In tal caso $0 = (z_1 - z_0)^n g(z_1)$ e quindi $g(z_1) = 0$, contraddizione. In altre parole, $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Sia $A = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \text{ per} \, n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Allora $A \neq \emptyset$. Inoltre, se $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione in A con limite $z \in \Omega$, allora la continuità di ciascuna derivata successiva $f^{(n)}$ implica che anche $z \in A$. Quindi A è chiuso in Ω.

Ora proviamo che A è aperto in Ω. Prendiamo $z_0 \in A$ e scegliamo $R > 0$ in modo che $B_R(z_0) \subset \Omega$. Allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per $|z - z_0| < R$, dove $a_n = (n!)^{-1} f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dunque $f(z) = 0$ per ogni $z \in B_R(z_0)$, che implica che $B_R(z_0) \subset A$. In altre parole, A è aperto (in Ω).

Quindi A è chiuso, aperto e non vuoto in Ω, per cui A deve necessariamente coincidere con Ω, essendo Ω connesso. $\square$

Corollario I.19 *Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{C}$. Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ due funzioni analitiche tali che l'insieme $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ ha almeno un punto di accumulazione in Ω. Allora $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Si applichi il Teorema I.18 alla funzione $h = f - g$. $\square$

Corollario I.20 *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica non costante e sia $f(z_0) = 0$ per un opportuno $z_0 \in \Omega$. Allora esiste $R > 0$ tale che $f(z) \neq 0$ per $0 < |z - z_0| < R$.*

Il Corollario I.20 serve a completare la dimostrazione del Teorema I.1.[4]

Secondo il seguente principio del massimo, una funzione analitica non costante in un aperto connesso non può assumere il massimo del suo valor assoluto all'interno dell'aperto.

Teorema I.21 (Principio del massimo, versione I) *Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tale che esiste $z_0 \in \Omega$ per cui $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ per ogni $z \in \Omega$. Allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ e sia $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} \, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) \, dt.$$

[4]Si dimostra facilmente il seguente: Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $f'(z_0) \neq 0$ per un opportuno $z_0 \in \Omega$. Allora esistono un intorno U di $f(z_0)$ e una funzione analitica $g : U \to \mathbb{C}$ tali che $g(f(z)) = z$ per $z \in f^{-1}[U]$ e $f(g(w)) = w$ per $w \in U$.

Quindi

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\varepsilon e^{it})|\, dt \leq |f(z_0)|,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $|f(z_0+\varepsilon e^{it})| \leq |f(z_0)|$ per $t \in [0, 2\pi]$. Dunque $|f(z_0)| = |f(z_0+\varepsilon e^{it})|$ per $t \in [0, 2\pi]$. Quindi la f manda il disco $B_\varepsilon(z_0)$ nella circonferenza $|z| = |f(z_0)|$. Utilizzando una trasformazione di Möbius h dalla circonferenza alla retta reale si ottiene una funzione analitica $g = h \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $g[B_\varepsilon(z_0)] \subset \mathbb{R}$. Ponendo $g = u + iv$, le equazioni di Cauchy-Riemann (I.2) implicano che le derivate della g rispetto a x e y si annullano. Quindi la g è costante in $B_\varepsilon(z_0)$ e lo è anche la f in $B_\varepsilon(z_0)$. Il Corollario I.19 poi implica che la f è costante in tutto il dominio Ω. □

Corollario I.22 (Principio del massimo, versione II) *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{C}$ e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $f|_\Omega$ è analitica. Allora*

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}.$$

Corollario I.23 (Lemma di Schwarz) *Sia $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tale che*

a. $|f(z)| \leq 1$ *per* $z \in \mathbb{D}$,

b. $f(0) = 0$.

Allora $|f'(0)| \leq 1$ e $|f(z)| \leq |z|$ per $z \in \mathbb{D}$. Inoltre, se $|f'(0)| = 1$ oppure se $|f(z_0)| = |z_0|$ per un'opportuna $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$, allora esiste una costante c, con $|c| = 1$, tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

Dimostrazione. Sia $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ la funzione analitica definita da $g(z) = f(z)/z$ per $0 \neq z \in \mathbb{D}$ e $g(0) = f'(0)$. Secondo il Principio del Massimo si ha per $\rho \in (0, 1)$

$$\max\{|g(z)| : |z| \leq \rho\} = \max\{|g(z)| : |z| = \rho\} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Facendo tendere ρ ad 1 risulta $|g(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ e quindi $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Inoltre risulta $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Supponiamo che $|f'(0)| = 1$ oppure $|f(z_0)| = |z_0|$ per un'opportuna $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$. In altre parole, supponiamo che $|g(z_0)| = 1$ per un'opportuna $z_0 \in \mathbb{D}$. In tal caso il Principio del Massimo implica che g è una costante c, con $|c| \leq 1$. Di conseguenza, $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. □

Per $a \in \mathbb{D}$ consideriamo la trasformazione di Möbius

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Allora φ_a è analitica in un disco aperto che contiene $\overline{\mathbb{D}}$. Inoltre,

$$\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = z = \varphi_a(\varphi_{-a}(z)), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Dunque la φ_a trasforma $\mathbb{D}$ in se stesso in modo biunivoco: $\varphi_a[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$. Poi per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha

$$|\varphi_a(e^{i\theta})| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{1-\overline{a}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{\overline{e^{i\theta}}-\overline{a}}\right| = 1,$$

cioè $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Infine,

$$\varphi_a'(0) = \left.\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right|_{z=0} = 1-|a|^2,$$
$$\varphi_a'(a) = \left.\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right|_{z=a} = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

Teorema I.24 *Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione analitica biunivoca tale che $f[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ e $f(a) = 0$. Allora esiste una costante c, con $|c| = 1$, tale che*

$$f(z) = c\varphi_a(z) = c\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Dimostrazione. Poichè $(\varphi_{-a} \circ f)[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ e $(f \circ \varphi_{-a})(0) = f(a) = 0$, abbiamo

$$(f \circ \varphi_{-a})'(0) = f'(\varphi_{-a}(0))\varphi_{-a}'(0) = f'(a)(1-|a|^2),$$

mentre dal Lemma di Schwarz segue che $|(f \circ \varphi_{-a})'(0)| \leq 1$. Quindi $|f'(a)| \leq (1-|a|^2)^{-1}$. In modo simile, essendo g la funzione inversa della f (cioè, $(g \circ f)(z) = z$ per ogni $z \in \mathbb{D}$), abbiamo $(\varphi_a \circ g)[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$, $(\varphi_a \circ g)(0) = 0$ e

$$(\varphi_a \circ g)'(0) = \varphi_a'(a)g'(0) = \frac{g'(0)}{1-|a|^2},$$

che implica che $|g'(0)| \leq 1-|a|^2$. Utilizzando il fatto che $g'(0)f'(a) = (g \circ f)'(a) = 1$, otteniamo $|f'(a)| = (1-|a|^2)^{-1}$. Poichè $(f \circ \varphi_{-a})[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$, $(f \circ \varphi_a)(0) = 0$ e

$$|(f \circ \varphi_{-a})'(0)| = |f'(a)\varphi_{-a}'(0)| = 1,$$

risulta l'esistenza di un'opportuna costante c, con $|c| = 1$, tale che $(f \circ \varphi_{-a})(w) = cw$ per ogni $w \in \mathbb{D}$. Ponendo $z = \varphi_{-a}(w)$, si ha $f(z) = c\varphi_a(z)$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

5 Teorema di Cauchy

Finora il Teorema di Cauchy è stato dimostrato per curve chiuse e rettificabili contenute in un disco aperto di $\mathbb{C}$. Per estenderlo al caso più generale bisogna introdurre il concetto di omotopia.

Definizione I.25 Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{C}$. Allora due funzioni continue $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ tali che $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ e $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ (cioè, due curve chiuse in Ω), si dicono *omotope* se esiste una funzione continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tale che

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), & 0 \le s \le 1, \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

L'omotopia è una relazione di equivalenza tra le curve chiuse in Ω. In un aperto semplicemente connesso (per esempio, in un aperto convesso o stellato) tutte le curve chiuse sono omotope tra loro.

Definizione I.26 Una funzione continua (oppure: una curva chiusa) $\gamma_0 : [0,1] \to \Omega$ tale che $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ si dice *contraibile* (oppure: omotopa ad una costante) se esistono una funzione continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ ed un punto $z_0 \in \Omega$ tali che

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = z_0, & 0 \le s \le 1, \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

In altre parole, γ_0 si dice contraibile se è omotopa ad una funzione costante.

Teorema I.27 (Cauchy) *Sia γ una curva rettificabile e contraibile, e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

Consideriamo una funzione continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ e un punto $z_0 \in \Omega$ tali che

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = z_0, & 0 \le s \le 1, \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), & 0 \le t \le 1. \end{cases} \tag{I.7}$$

Inoltre, supponiamo che Γ sia di classe C^2. Secondo il Teorema di Schwartz abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right), \qquad s,t \in [0,1].$$

Sia
$$g(t)=\int_0^1 f(\Gamma(s,t))\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t)\,ds.$$
Allora $g(0)=\int_\gamma f(w)\,dw$ e $g(1)=0$. Inoltre,
$$\begin{aligned}
g'(t)&=\int_0^1\left(f'(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma}{\partial s}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+f(\Gamma(t,s))\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial s}\right)\right)ds\\
&=\int_0^1\left(f'(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma}{\partial s}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+f(\Gamma(t,s))\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right)\right)ds\\
&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\left((f\circ\Gamma)\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right)\\
&=f(\Gamma(1,t))\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(1,t)-f(\Gamma(0,t))\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(0,t)=0,
\end{aligned}$$
poichè $\Gamma(0,t)=\Gamma(1,t)$ per $t\in[0,1]$. Quindi g è costante e $\int_\gamma f(w)\,dw=g(0)=g(1)=0$.

Dimostrazione. Supponiamo che Γ sia continua e verifichi la (I.7). Allora Γ è uniformemente continua in $(s,t)\in[0,1]\times[0,1]$ e dunque $\Gamma([0,1]\times[0,1])$ è un sottoinsieme compatto di Ω. Di conseguenza,
$$\rho=\operatorname{dist}(\Gamma([0,1]\times[0,1]),\mathbb{C}\setminus\Omega)>0.$$
L'uniforme continuità di Γ implica l'esistenza di $n\in\mathbb{N}$ tale che $|\Gamma(s,t)-\Gamma(s',t')|<\rho$ se $(s-s')^2+(t-t')^2<(2/n^2)$. Introduciamo i punti di Ω
$$z_{jk}=\Gamma\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right),\qquad 0\le j,k\le n,$$
e i rettangoli
$$\Sigma_{jk}=\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]\times\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right],\qquad 1\le j,k\le n.$$
Poichè il diametro di ciascun rettangolo è uguale a $\sqrt{2}/n$, si ha $\Gamma(\Sigma_{jk})\subset B_\rho(z_{jk})$. Inoltre, la regione chiusa
$$\Pi_{jk}=\left\{t_1z_{jk}+t_2z_{j-1,k}+t_3z_{j-1,k-1}+t_4z_{j,k-1}:\begin{matrix}t_1,t_2,t_3,t_4\in[0,1],\\ t_1+t_2+t_3+t_4=1\end{matrix}\right\}$$
è contenuta in $B_\rho(z_{jk})$. Dalla Proposizione I.15 segue che
$$\int_{[z_{j-1,k},z_{jk}]}f(w)\,dw=\int_{\{\Gamma(s,\frac{k}{n}):\frac{j-1}{n}\le s\le\frac{j}{n}\}}f(w)\,dw$$

per una funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qualsiasi ($j = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, n$). Inoltre, poichè $\Pi_{jk} \subset B_\rho(z_{jk})$ (vedi la Proposizione I.15)

$$\int_{\partial \Pi_{jk}} f(w)\, dw = 0, \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

si vede facilmente che

$$\int_{\pi_0} f(w)\, dw = \int_{\pi_1} f(w)\, dw = \int_{\pi_2} f(w)\, dw = \ldots = \int_{\pi_n} f(w)\, dw,$$

dove π_k è il "poligono curvilineo" con vertici $z_{0k}, z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk}, z_{0k}$ orientato nel modo indicato sopra. Infine, abbiamo

$$\int_\gamma f(w)\, dw = \int_{\pi_0} f(w)\, dw = \int_{\pi_n} f(w)\, dw = \int_{\{\Gamma(s,1) : 0 \le s \le 1\}} f(w)\, dw = 0,$$

poichè quest'ultima curva consiste del singolo punto z_0. $\square$

Corollario I.28 *Sia Ω un aperto semplicemente connesso in Ω, γ una curva chiusa e rettificabile in Ω e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

Sia Ω semplicemente connesso e sia $z_0 \in \Omega$. Allora la funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\delta(z_0 \mapsto z)} f(w)\, dw,$$

dove $\delta(z_0 \mapsto z)$ è una curva rettificabile in Ω da z_0 a z, è una primitiva della f nel senso che essa è analitica e verifica $F' = f$. Infatti, per $z, z_1 \in \Omega$ abbastanza vicini il segmento $[z_1, z]$ congiungendo z_1 con z è contenuto in Ω. Quindi potremmo scegliere $\delta(z_0 \mapsto z) = \delta(z_0 \mapsto z_1) \cup [z_1, z]$. Dunque

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) &= \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} f(w)\, dw - f(z_1) \\ &= \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} \{f(w) - f(z_1)\} dw, \end{aligned}$$

che implica

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \le |f(z) - f(z_1)|.$$

In altre parole,

$$\lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1).$$

6 Indice di una Curva

Una curva chiusa e rettificabile γ in $\mathbb{C}$ suddivide il suo complementare $\mathbb{C}\setminus\gamma$ in un numero finito di aperti ciascuno di essi caratterizzati da un numero intero, il cosiddetto indice.

Proposizione I.29 *Sia γ una curva chiusa e rettificabile in $\mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto non appartenente a γ. Allora*

$$n(\gamma; z_0) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz$$

è un numero intero chiamato l'indice della curva γ rispetto a z_0.

Dimostrazione. Seguendo l'approssimazione della curva γ presentata nella dimostrazione del Teorema I.27 basta supporre che γ sia regolare a tratti. Dunque esistono $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tali che $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ è continua, $\gamma(0) = \gamma(1)$ e γ è di classe C^1 in $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots , m)$. Sia

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\,ds.$$

Allora $g(0) = 0$ e $g(1) = 2\pi i\, n(\gamma; z_0)$. Inoltre,

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}, \quad t \notin \{t_1, \ldots , t_{m-1}\}.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0]\right) = e^{-g(t)}\gamma'(t) - g'(t)e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0] = 0,$$

dove $t \notin \{t_1, \ldots , t_{m-1}\}$. Ciò implica che la funzione $e^{-g(t)}[\gamma(t)-z_0]$ non dipende da $t \in [0, 1]$. In altre parole,

$$e^{-g(1)}[\gamma(0) - z_0] = e^{-g(1)}[\gamma(1) - z_0] = e^{-g(0)}[\gamma(0) - z_0] = \gamma(0) - z_0,$$

mentre $\gamma(0) \neq z_0$. Quindi $g(1) = 2\pi n$ per un opportuno $n \in \mathbb{Z}$. □

Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e γ e $\tilde{\gamma}$ sono due curve chiuse, rettificabili e omotope in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, allora

$$n(\gamma; z_0) = n(\tilde{\gamma}; z_0).$$

Inoltre, $n(\gamma; z_0)$ dipende in modo continuo dal punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Infatti, sia $\phi(z_0) = n(\gamma; z_0)$ per $z_0 \notin \gamma$. Allora per $z_0, z_1 \notin \gamma$ si ha

$$\begin{aligned} |\phi(z_0) - \phi(z_1)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma [(z-z_0)^{-1} - (z-z_1)^{-1}] dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\varphi \frac{z_0 - z_1}{(z-z_0)(z-z_1)} \, dz \right| \\ &\leq \frac{|z_0 - z_1|}{2\pi} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z-z_0|\,|z-z_1|}. \end{aligned}$$

Essendo $\rho = \text{dist}(z_0, \gamma) > 0$, per $|z_0 - z_1| < \frac{1}{2}\rho$ e $z \in \gamma$ si ha $|z - z_0| \geq \rho > \frac{1}{2}\rho$ e $|z - z_1| > \frac{1}{2}\rho$. Di conseguenza,

$$|\phi(z_0) - \phi(z_1)| < \frac{2L(\gamma)\delta}{\pi\rho^2},$$

se $|z_0 - z_1| < \delta < \frac{1}{2}\rho$, che dimostra la continuità della ϕ. Di conseguenza, poichè la ϕ assume soltanto valori interi, l'indice $n(\gamma; z_0)$ è costante in ogni componente connesso di $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Sia γ una curva chiusa, rettificabile e semplice in $\mathbb{C}$. Secondo il Teorema di Jordan (un risultato profondo di topologia), $\mathbb{C} \setminus \gamma$ è l'unione di due aperti connessi, uno limitato e l'altro illimitato. Se z_0 appartiene al componente illimitato, allora $n(\gamma; z_0) = 0$. Invece, se z_0 appartiene al componente limitato, abbiamo $n(\gamma; z_0) = 1$ se γ ha l'orientamente antiorario e $n(\gamma; z_0) = -1$ se γ ha l'orientamento orario. Infatti, si può spostare z_0 verso l'infinito se si trova nel componente illimitato e concludere che in tal caso $n(\gamma; z_0) = 0$. Invece, se z_0 appartiene al componente limitato, potremmo deformare γ in una circonferenza attorno a z_0 senza cambiare l'indice e concludere che $n(\gamma; z_0) = \pm 1$, dove il segno dipende dall'orientamento della circonferenza.

7 Teorema Integrale di Cauchy

In questa parte dimostriamo un'altra versione del Teorema di Cauchy, la cosiddetta Formula Integrale di Cauchy. Tale formula sarà utilizzata per contare gli zeri di una funzione analitica.

Teorema I.30 (Formula integrale di Cauchy) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia γ una curva chiusa, rettificabile e contraibile in Ω. Allora*

$$n(\gamma; z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz, \qquad z_0 \in \Omega \setminus \gamma. \tag{I.8}$$

Dimostrazione. Poichè $g(z) = [f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ è una funzione analitica in $z \in \Omega$ (con il valore $g(z_0) = f'(z_0)$), risulta per il Teorema di Cauchy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} - \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)n(\gamma;z_0), \end{aligned}$$

che implica la (I.8). □

Se γ è una curva chiusa, rettificabile e contraibile, derivando la (I.8) m volte, si trova:

$$n(\gamma;z_0)f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz, \qquad z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma.$$

Corollario I.31 *Sia Ω un aperto connesso, γ una curva chiusa, rettificabile e contraibile e $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione analitica. Sia $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione analitica che non si annulla nei punti di γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^m \mu_k n(\gamma;\alpha_k),$$

dove $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ sono gli zeri diversi della f con molteplicità $\mu_1,\ldots,\mu_m$.

Dimostrazione. La funzione f ammette la seguente rappresentazione:

$$f(z) = (z-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(z-\alpha_m)^{\mu_m}g(z), \qquad z\in\Omega,$$

dove $g:\Omega\to\mathbb{C}$ è una funzione analitica senza zeri. Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k}{z-\alpha_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{k=1}^m \mu_k\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha_k}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz}_{=0,\ \text{Cauchy}} \\ &= \sum_{k=1}^m \mu_k n(\gamma;\alpha_k). \end{aligned}$$

□

8 Funzioni Armoniche

Identificando il piano complesso $\mathbb{C}$ con il piano euclideo $\mathbb{R}^2$ tramite la legge che ad ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$ associa $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per le equazioni di Cauchy-Riemann le parti reali e immaginarie delle funzioni analitiche $f(z)$ soddisfano l'equazione di Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Tali soluzioni si chiamano *funzioni armoniche.* Per definizione le funzioni armoniche sono di classe C^2. Data la funzione analitica $f(z)$, allora $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ si dicono *coniugate armoniche.*[5]

Consideriamo ora una funzione armonica $u(x, y)$ in un aperto semplicemente connesso $\tilde{\Omega}$ in $\mathbb{R}^2$. Risolviamo ora il sistema di equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La funzione $v(x, y)$ esiste ed è unica (salvo per un termine costante), essendo $\tilde{\Omega}$ semplicemente connesso. Poichè u è di classe C^1, lo è anche v. Quindi $f = u + iv$ è analitica in $z = x + iy \in \Omega$, dove $\Omega = \{x + iy : (x, y) \in \tilde{\Omega}\}$. In altre parole, una funzione armonica di classe C^1 definita in una regione semplicemente connessa ha una coniugata armonica.[6]

Teorema I.32 (Teorema della media) *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica e $\overline{B_{z_0}(\varepsilon)}$ un disco chiuso contenuto in Ω. Se γ è la circonferenza $|z - z_0| = \varepsilon$, allora*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

Dimostrazione. Sia D un disco tale che $\overline{B_{z_0}(\varepsilon)} \subset D \subset \Omega$ e sia la $f : D \to \mathbb{C}$ analitica tale che $u = \operatorname{Re} f$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \overset{z=z_0+\varepsilon e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

Il teorema segue calcolando la parte reale. □

[5]Se v_1 e v_2 sono ambedue coniugate armoniche della funzione armonica u, allora $u+iv_1$ e $u+iv_2$ sono funzioni analitiche. Di conseguenza, $i(v_1 - v_2)$ è una funzione analitica a valori immaginari, cioè una costante in ogni componente complesso del suo dominio.

[6]La funzione $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ma non ha coniugata armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Infatti, $u = \operatorname{Re} f(x, y)$, dove $f(z) = \log(z)$, mentre zero è un punto di diramazione della funzione logaritmo. Per trovare la coniugata armonica di u, bisogna restringere il dominio ad una sottoregione semplicemente connessa.

Teorema I.33 (Principio del massimo) *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Supponiamo che esista $z_0 \in \Omega$ tale che $u(z) \leq u(z_0)$ per ogni $z \in \Omega$. Allora u è costante.*

Il teorema vale anche sotto l'ipotesi $u(z) \geq u(z_0)$ per $z \in \Omega$. Basta considerare $-u$ al posto di u.

Dimostrazione. Sia $E = \{z \in \Omega : u(z) = u(z_0)\}$. Allora, per la continuità di u, E è chiuso in Ω. Per $z_0 \in E$, scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_{z_0}(\varepsilon)} \subset \Omega$. Supponiamo che esista $z_1 \in B_{z_0}(\varepsilon)$ per cui $u(z_1) < u(z_0)$. Poichè u è continua, esiste $\rho > 0$ tale che $u(z) < u(z_0)$ se $|z - z_1| \leq \rho$. Applicando il Teorema I.32, si ha

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + |z_1 - z_0| e^{i\theta})\, d\theta,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è $\leq u(z_0)$, è continua ed è minore di $u(z_0)$ per almeno un valore di θ. Quindi la parte a destra è minore di $u(z_0)$, una contraddizione. Di conseguenza, $u(z) = u(z_0)$ se $|z - z_0| \leq \varepsilon$. Quindi E è aperto. Poichè E è aperto e chiuso in Ω e Ω è connesso, abbiamo $E = \Omega$ e $u(z) = u(z_0)$ per ogni $z \in \Omega$. □

Se f è analitica in un aperto Ω contenente il disco $\overline{B_R(0)}$ e non ha zeri, allora $\log(|f|)$ è armonica in tale disco. Infatti per il Teorema I.32, si ha

$$\log(|f(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(Re^{i\theta})|)\, d\theta. \tag{I.9}$$

Il seguente teorema generalizza tale risultato al caso in cui la f ha zeri all'interno del disco $\overline{B_R(0)}$.

Teorema I.34 (Formula di Jensen) *Sia la f analitica in un aperto che contiene il disco $\overline{B_R(0)}$. Siano $z_1, \ldots, z_n$ gli zero della f (ciascuno con la propria molteplicità) in $B_R(0)$. Allora*

$$\log(|f(z)|) = -\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(Re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{I.10}$$

dove $f(0) \neq 0$.

Dimostrazione. Per $|\zeta| < 1$ la trasformazione di Möbius $z \mapsto (z - \zeta)(1 - \overline{\zeta} z)^{-1}$ trasforma il disco $B_1(0)$ e la sua chiusura in se stesso. Quindi

$$z \mapsto \frac{R^2(z - z_k)}{R^2 - \overline{z_k} z}$$

trasforma il disco $B_R(0)$ e la sua chiusura in se stesso. Dunque la funzione

$$F(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{R^2 - \overline{z_k} z}{R(z - z_k)}$$

è analitica in un aperto contenente $\overline{B_R(0)}$, non ha zeri in $B_R(0)$ e verifica $|F(z)| = |f(z)|$ per $|z| = R$. Applicando la (I.9) alla funzione F otteniamo

$$\log(|F(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|F(Re^{i\theta})|)\, d\theta,$$

dove

$$F(0) = f(0) \prod_{k=1}^{n} \left(-\frac{R}{z_k} \right).$$

Come conseguenza otteniamo la (I.10). □

Sia $n_f(t)$ il numero degli zeri della f nel disco $B_t(0)$. Enumerando gli zeri tali che $0 < |z_1| < \ldots < |z_n| < R$, otteniamo

$$n_f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq |z_1|, \\ 1, & |z_1| < t \leq |z_2|, \\ \vdots\vdots\vdots & \\ n-1, & |z_{n-1}| < t \leq |z_n|, \\ n, & |z_n| < t \leq R. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n_f(t)}{t}\, dt &= \int_{|z_1|}^{|z_2|} \frac{dt}{t} + \int_{|z_2|}^{|z_3|} \frac{2\, dt}{t} + \ldots + \int_{|z_{n-1}|}^{|z_n|} \frac{(n-1)\, dt}{t} + \int_{|z_n|}^{R} \frac{n\, dt}{t} \\ &= \log \frac{|z_2|}{|z_1|} + 2 \log \frac{|z_3|}{|z_2|} + \ldots + (n-1) \log \frac{|z_n|}{|z_{n-1}|} | \log \frac{R}{|z_n|} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \log |z_k| + n \log R = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{R}{|z_k|}. \end{aligned}$$

Quindi la formula di Jensen (I.10) ammette la forma alternativa

$$\int_0^R \frac{n_f(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(Re^{i\theta})|\, d\theta - \log(|f(0)|), \qquad \text{(I.11)}$$

dove $f(0) \neq 0$.

Capitolo II

Singolarità e Serie di Laurent

In questo capitolo discutiamo le serie di Laurent, i vari tipi di singolarità e il calcolo dei residui. Dimostriamo in particolare il Teorema di Casorati-Weierstrass sulle singolarità essenziali, il principio dell'argomento e il Teorema di Rouché.

1 Classificazione dei Punti Singolari

Le funzioni analitiche possono presentare dei punti di *singolarità*, ossia dei punti nei quali si verifica un comportamento non ordinario. Un punto z_0 è definito *ordinario* se esiste un suo intorno nel quale la funzione è analitica, ossia se esiste un $\delta > 0$ tale che la funzione è analitica per ogni z con $|z - z_0| < \delta$. Diversamente z_0 è definito *singolare*, ossia rappresenta un punto di singolarità per f. I punti di singolarità possono essere di vario tipo.

a. **Singolarità eliminabili**: Un punto z_0 rappresenta una *singolarità eliminabile* per f se $f(z_0)$ non è definito, ma il limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ esiste finito.

b. **Poli**: Un punto z_0 è un *polo* di ordine n se esiste un intero positivo n (necessariamente unico) tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \alpha \neq 0,$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Se $n = 1$ il polo è detto semplice.

c. **Singolarità essenziali**: Un punto z_0 rappresenta una *singolarità essenziale* per f se essa è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ e non esiste alcun intero positivo n tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \alpha \neq 0.$$

d. **Singolarità isolate**: Un punto z_0 rappresenta una *singolarità isolata* per f se essa è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Ci sono due tipi di singolarità isolata: il polo e la singolarità essenziale.

Nel caso di un punto di diramazione z_0 non esiste alcun $\delta > 0$ tale che la f è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Invece in un tale intorno la f ha più di un valore, come evidenziato dalle funzioni $\sqrt{z}$ e $\log(z)$ per $z_0 = 0$.

In modo analogo si possono classificare le singolarità all'infinito. Una funzione f definita per $|z| > R$ (cioè, in un intorno di ∞) ha una singolarità di un certo tipo se $g(z) = f(1/z)$ ha lo stesso tipo di singolarità in $z_0 = 0$. In particolare, i polinomi di grado n hanno un polo di ordine n all'infinito, mentre una funzione intera che non è polinomio ha una singolarità essenziale all'infinito.

Teorema II.1 (Serie di Laurent) *Sia $f(z)$ analitica per $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Allora*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove la convergenza è assoluta e uniforme per $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$ per qualunque ρ_1, ρ_2 tali che $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \tag{II.1}$$

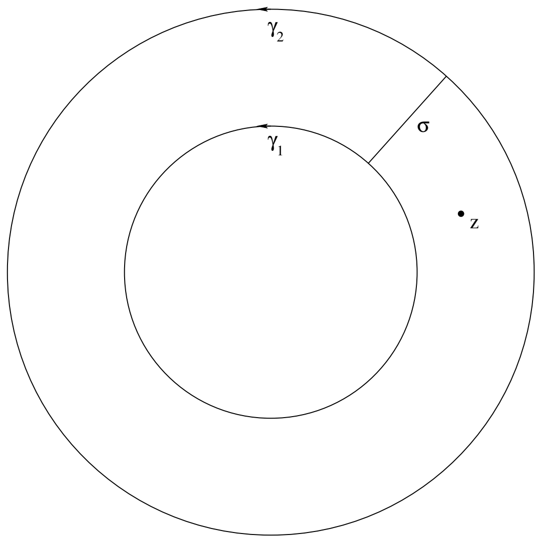
dove γ è la circonferenza $|z - z_0| = \rho$ con orientamento orario per qualunque $\rho \in (R_1, R_2)$.

Sono ammessi i valori $R_1 = 0$ e $R_2 = +\infty$ per i raggi delle circonferenze.

Dimostrazione. Siano ρ_1, ρ_2 costanti positive tali che $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$. Allora le circonferenze $\gamma_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho_j\}$ per $j = 1, 2$, con l'orientamento antiorario, sono curve chiuse e omotope. Dal Teorema di Cauchy segue che $\int_{\gamma_1} g(z)\, dz = \int_{\gamma_2} g(z)\, dz$ per qualunque funzione analitica $g : \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \to \mathbb{C}$. In particolare, le costanti a_n definite dalla (II.1) non dipendono dal raggio ρ della circonferenza γ.

Definiamo ora le due funzioni f_1 e f_2 nella seguente maniera:

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = \rho_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad |z - z_0| > \rho_1,$$
$$f_2(z) = +\frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = \rho_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad |z - z_0| < \rho_2.$$



Allora $f_1(z)$ è analitica per $|z-z_0| > \rho_1$ e $f_2(z)$ è analitica per $|z-z_0| < \rho_2$.

Se $R_1 < |z-z_0| < R_2$, scegliamo ρ_1, ρ_2 tali che $R_1 < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R_2$. Sia $\gamma_j(t) = z_0 + \rho_j e^{it}$ $(j = 1, 2,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$. Si scelga anche un segmento $\sigma(t) = z_0 + [(1-t)\rho_1 + t\rho_2]e^{i\theta_0}$ $(0 \leq t \leq 1)$ che non contiene il punto z. Allora la curva chiusa $\gamma = \gamma_2 - \sigma - \gamma_1 + \sigma$ è contraibile. Inoltre $n(\gamma_2; z) = 1$ e $n(\gamma_1; z) = 0$. Applicando la Formula Integrale di Cauchy risulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \text{(II.2)} \\ &= f_2(z) + f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

dove $f_2(z)$ viene sviluppata in una serie di potenze in $(z-z_0)$ (con raggio di convergenza $\geq \rho_2$) e $f_1(z)$ in una serie di potenze in $1/(z-z_0)$ (con raggio di convergenza $\geq (1/\rho_1)$). In tal caso sostituiamo nella (II.2)

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

se $|z-z_0| < |w-z_0| = \rho_2$ e

$$\frac{-1}{w-z_0} = \frac{-1}{z-z_0}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^m = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n (w-z_0)^{-(n+1)}$$

per $|z-z_0| > |w-z_0| = \rho_1$. Così otteniamo l'espressione (II.1) per i coefficienti a_n. $\square$

Corollario II.2 *Sia z_0 una singolarità isolata e sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ la sua serie di Laurent per $0 < |z-z_0| < R$. Allora:*

a. z_0 è una singolarità eliminabile se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.

b. z_0 è un polo di ordine m se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$.

c. z_0 è una singolarità essenziale se $a_n \neq 0$ per un numero infinito di pedici negativi n.

Dimostriamo ora un risultato sorprendente sul comportamento di una funzione analitica in un intorno di una singolarità essenziale. Osserviamo che una funzione analitica f con un polo a z_0 verifica

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Teorema II.3 (Casorati-Weierstrass) *Sia z_0 una singolarità essenziale di f. Allora esiste un $\delta > 0$ (abbastanza piccolo) tale che l'insieme dei valori $\{f(z) : 0 < |z-z_0| < \delta\}$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. In tal caso bisogna dimostrare che per $c \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ esiste z con $0 < |z-z_0| < \delta$ tale che $|f(z)-c| < \varepsilon$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che l'affermazione sia falsa. Dovrebbero quindi esistere $c \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ per $0 < |z - z_0| < \delta$. In tal caso

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - c}{z - z_0} \right| = +\infty,$$

che implica che $(f(z) - c)/(z - z_0)$ ha un polo in z_0. Se m fosse l'ordine del polo, allora $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m [f(z) - c] = 0$. Quindi

$$|z - a_0|^m |f(z)| \leq |z - z_0|^m |f(z) - c| + |z - z_0|^m |c|$$

implica che $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$. Di conseguenza, $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0. Contraddizione. $\square$

In altre parole, per qualunque $c \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con limite z_0 tale che $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = c$. Si può infatti dimostrare (Teorema di Picard [6, Theorem 9.16]) che per un $\delta > 0$ abbastanza piccolo l'insieme dei valori $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ coincide con tutto il piano complesso con l'eccezione di al più un punto. Per esempio, $f(z) = e^z$ ha una singolarità essenziale all'infinito, mentre per $0 \neq c \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^z = c$ ha almeno una soluzione in ogni intorno dell'infinito.

2 Residui

Sia f una funzione analitica nel disco $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ privato del suo centro z_0. Allora f è sviluppabile in serie di Laurent, ossia è possibile scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

dove per qualsiasi $\rho \in (0, \delta)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Il coefficiente

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \, dz$$

si dice *residuo* della funzione f in z_0, ossia

$$f(z) = \mathrm{Res}_{z_0}(f).$$

Se la f ha un polo di ordine m in z_0, allora

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Nel caso di un polo semplice risulta

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Teorema II.4 (Teorema dei residui) *Sia f una funzione analitica in Ω con l'eccezione dei punti isolati $z_1, \ldots, z_m$. Sia γ una curva chiusa, rettificabile e contraibile in Ω che non passa per i punti $z_1, \ldots, z_m$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \, dz = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma; z_j) Res_{z_j}(f).$$

Dimostriamo il Teorema dei Residui soltanto nel caso in cui le singolarità isolate $z_1, \ldots, z_m$ sono poli della f. Nella dimostrazione apparirà una somma finita che nel caso più generale sarebbe una serie infinita. Per giustificare la convergenza di quest'ultima occorre utilizzare il Teorema di Mittag-Lefler.

Dimostrazione. Sia μ_j l'ordine del polo z_j $(j = 1, \ldots, m)$. Allora esiste una funzione analitica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ e costanti a_{jk} $(j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, \mu_j)$ tali che

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}.$$

Di conseguenza,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} a_{jk} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^k} = \sum_{j=1}^{m} a_{j1}\, n(\gamma; z_j).$$

Infine osserviamo che $a_{j1} = \mathrm{Res}_{z_j}(f)$ $(j = 1, \ldots, m)$. $\square$

Sia Ω un aperto in $\mathbb{C}$. Una funzione f definita e analitica in Ω con l'eccezione di poli si dice *funzione meromorfa* in Ω. Ponendo $f(z_j) = \infty$ in ciascun polo, si costruisce una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$.

Teorema II.5 (Principio dell'argomento) *Sia f una funzione meromorfa in Ω con poli $p_1, \ldots, p_m$ (di ordine $\mu_1, \ldots, \mu_m$) e zeri $z_1, \ldots, z_n$ (di ordine $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$). Sia γ una curva chiusa, rettificabile e contraibile in Ω che non passa nè per i poli nè per gli zeri. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j n(\gamma; z_j) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k n(\gamma; p_k). \qquad \text{(II.3)}$$

Dimostrazione. Esiste una funzione analitica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ senza zeri tale che

$$f(z) = g(z) \frac{(z - z_1)^{\zeta_1} \ldots (z - z_n)^{\zeta_n}}{(z - p_1)^{\mu_1} \ldots (z - p_m)^{\mu_m}}.$$

Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\zeta_j}{z - z_j} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k}{z - p_k},$$

che implica la (II.3). $\square$

Teorema II.6 (Rouché) *Siano f e g funzioni meromorfe in Ω e $\overline{B_{z_0}(R)} \subset \Omega$. Supponiamo che la circonferenza $\gamma = \{z \in \Omega : |z - z_0| = R\}$ non contenga alcun polo o zero delle funzioni f e g e che*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \qquad |z - z_0| = R.$$

Allora

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

dove Z_f e Z_g sono il numero di zeri di f e g all'interno del disco $B_{z_0}(R)$ e P_f e P_g sono il numero di poli di f e g all'interno del disco $B_{z_0}(R)$, conteggiati ciascuno con la corrispondente molteplicità.

Dimostrazione. Chiaramente $h = f/g$ è una funzioni meromorfa in Ω con un numero finito di poli e zeri, tutti collocati all'esterno della circonferenza γ. Siccome

$$|h(z) - 1| < 1, \qquad z \in \gamma,$$

abbiamo $h[\gamma] \subset B_1(1)$. Osserviamo ora che $\log(z)$ è una funzione analitica in $B_1(1)$ che verifica $\log(1) = 0$. Allora $\log(h)$ è una funzione analitica in un intorno della circonferenza γ e h'/h è una sua primitiva. Dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz \\ &= (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g), \end{aligned}$$

che implica il teorema. □

Passiamo ora ad una seconda dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Corollario II.7 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio di grado ≥ 1 ha almeno uno zero.*

Dimostrazione. Sia $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, con $0 \neq a_n \in \mathbb{C}$, un polinomio di grado n. Sia $g(z) = a_n z^n$. Allora per $|z| = R$ risulta

$$\left| \frac{f(z) - g(z)}{g(z)} \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j| R^j}{|a_n| R^n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} R^{j-n},$$

dove l'ultima somma è minore di 1 per R abbastanza grande. Siccome f e g non hanno poli, la f ha esattamente n zeri di modulo minore di R per R abbastanza grande. □

Capitolo III

Fattorizzazioni delle Funzioni Analitiche

In questo capitolo discutiamo i Teoremi di Riemann e di Hadamard sulla rappresentazione moltiplicativa delle funzioni analitiche.

1 Prodotti Infiniti

Definizione III.1 Sia $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di numeri complessi. Si dice che il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ esiste e che z è il suo valore se

$$z = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} (z_1 z_1 \ldots z_{n-1} z_n).$$

Quindi il prodotto infinito è il limite dei corrispondenti prodotti parziali.

Supponiamo ora che $z_n \neq 0$ per $n \in \mathbb{N}$ e che $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ esista e sia diverso da zero. Sia $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ il prodotto parziale n-esimo. Allora

$$z_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to \frac{z}{z} = 1, \qquad n \to \infty.$$

Quindi $z_n \to 1$ è una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ di numeri z_n diversi da zero converga ad un numero complesso diverso da zero.

Consideriamo il seguente esempio. Sia $z_n = a$, dove $a \in \mathbb{C}$ con $0 < |a| < 1$, in modo che $p_n = a^n$ e, conseguentemente, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Questo esempio mostra che, oltre che l'esistenza del prodotto infinito, occorre che anche z sia diverso da zero (condizione necessaria) affinché $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Applicando la funzione logaritmica si può tradurre il prodotto infinito $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ di numeri diversi da zero in una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$. Per evitare problemi con il punto di diramazione della funzione logaritmica, supponiamo che $\operatorname{Re} z_n > 0$ e consideriamo la funzione analitica $\log : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ tale che $\log(1) = 0$ e $\exp(\log(z)) = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$.

Proposizione III.2 *Sia* $\operatorname{Re} z_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge ad un numero diverso da zero se e solo se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ *è convergente.*

Dimostrazione. Siano s tale che $z = e^s$, $|\operatorname{Im} s| < (\pi/2)$ e $p_n = z_1 \dots z_n$. Allora

$$s_n \stackrel{\text{def}}{=} \log(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \log(z_k).$$

Se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ con somma s, allora

$$p_n = \exp(\sum_{k=1}^{n} \log(z_k)) = \exp(s_n) \to e^s \neq 0.$$

D'altra parte, supponiamo che $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ abbia un limite diverso da zero $z = |z|e^{i\theta}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$. Allora $s_n = \log(|p_n|) + i\theta_n + 2\pi i k_n$, dove $\theta - \pi < \theta_n \leq \theta + \pi$ e $k_n \in \mathbb{Z}$. In tal caso $s_n - s_{n-1} = \log(z_n) \to \log(1) = 0$, mentre $[\log(|p_n|) + i\theta_n] - [\log(|p_{n-1}|) + i\theta_{n-1}] \to 0$. Di conseguenza, $(k_n - k_{n-1}) \to 0$ e dunque $k_n = k$ è costante per $n \geq n_0$. Ciò implica che $s_n \to \log(|z|) + i\theta + 2\pi i k$; in altre parole, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ è convergente. $\square$

Consideriamo la serie di potenze

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

con raggio di convergenza uguale ad 1. Allora per $|z| \leq \frac{1}{2}$ si ha

$$\left| 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2},$$

e quest'ultima disuguaglianza vale soltanto per $|z| \leq \frac{1}{2}$. Quindi

$$-\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \leq \frac{1}{2}, \qquad |z| \leq \frac{1}{2},$$

possiamo riscrivere le ultime disequazioni come

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|, \qquad |z| \leq \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza è immediato il seguente risultato.

Proposizione III.3 *Sia* $\operatorname{Re} z_n > -1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$$

è assolutamente convergente se e solo se il prodotto infinito $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *è assolutamente convergente.*

Non è immediato introdurre la definizione di convergenza assoluta di un prodotto infinito. Ovviamente è convergente il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$ se $z_n = (-1)^n$, ma il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ stesso non è convergente. In altre parole, se volessimo far seguire la convergenza di un prodotto infinito dalla sua convergenza assoluta, ci vuole un pò di cautela nel definire la convergenza assoluta.

Definizione III.4 Sia $\operatorname{Re} z_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ si dice *assolutamente convergente* se è assolutamente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$. In tal caso, grazie alla Proposizione III.2, un prodotto infinito assolutamente convergente è convergente.

Corollario III.5 *Se* $\operatorname{Re} z_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora il prodotto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *è assolutamente convergente se e solo se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - 1)$ *è assolutamente convergente.*

Passiamo ora alla convergenza uniforme in $x \in \Xi$, dove Ξ è un sottoinsieme del piano complesso.

Lemma III.6 *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni complesse su* Ξ *che converge uniformemente a* f *in* $x \in \Xi$. *Supponiamo che* $\operatorname{Re} f(x) \leq a$ *per ogni* $x \in \Xi$. *Allora* $\exp(f_n(x)) \to \exp(f(x))$ *uniformemente in* $x \in \Xi$.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|e^z - 1| < \varepsilon e^{-a}$ per $|z| < \delta$. Scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ per ogni $x \in \Xi$ e $n \geq n_0$. Dunque

$$\begin{aligned} |\exp(f_n(x)) - \exp(f(x))| &= \left| \frac{\exp(f_n(x))}{\exp(f(x))} - 1 \right| \exp(\operatorname{Re} f(x)) \\ &< \varepsilon e^{-a} \exp(\operatorname{Re} f(x)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lemma III.7 *Sia* Ξ *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{C}$ *e sia* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni complesse continue tali che* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *converge assolutamente e uniformemente in* $x \in \Xi$. *Allora il prodotto infinito*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

converge assolutamente e uniformemente in $x \in \Xi$. *Inoltre,* $f(x) = 0$ *se e solo se esiste* $n \in \mathbb{N}$ *con* $g_n(x) = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ sia assolutamente convergente, uniformemente in $x \in \Xi$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|g_n(x)| < \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$ e $x \in \Xi$. Ciò implica che per tali (n, x) abbiamo $\mathrm{Re}\,(1+g_n(x)) > 0$ e $|\log(1 + g_n(x))| \leq \frac{3}{2}|g_n(x)|$. Allora

$$h(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \log(1 + g_n(x))$$

converge uniformemente in $x \in \Xi$. Siccome h è continua e Ξ è compatto, h è limitata. La limitatezza di h implica l'esistenza di un'opportuna costante a tale che $\mathrm{Re}\, h(x) < a$ per $x \in \Xi$. Usando il Lemma III.6 si ottiene la convergenza del prodotto infinito

$$\exp(h(x)) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} (1 + g_n(x)),$$

uniformemente in $x \in \Xi$. Infine si trova

$$f(x) = (1 + g_1(x)) \ldots (1 + g_{n_0}(x)) \exp(h(x)).$$

Quindi $f(x) = 0$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ con $g_n(x) = -1$. □

Lemma III.8 *Sia* Ω *un aperto in* $\mathbb{C}$ *e sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni analitiche in* Ω *tali che* $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ *uniformemente in* $z \in \Xi$ *per ogni compatto* Ξ *in* Ω. *Allora* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *è analitica.*

Dimostrazione. Sia $z \in \Omega$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset \Omega$. Allora, per il Teorema Integrale di Cauchy, possiamo scrivere

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Siccome $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente in $z \in \overline{B_\varepsilon(z)} \subset \Omega$, risulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

e quindi f è analitica in $B_\varepsilon(z)$. □

Teorema III.9 *Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche in Ω, nessuna di loro identicamente nulla. Se $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-1)$ è assolutamente convergente uniformemente in ogni compatto di Ω, allora $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge ad una funzione analitica in Ω uniformemente in ogni compatto di Ω. Inoltre, se $f(a)=0$, allora $f_n(a)=0$ per un numero finito di indici n, mentre la molteplicità dello zero a della f è uguale alla somma delle molteplicità degli zeri a delle f_n.*

Dimostrazione. Sia la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-1)$ assolutamente convergente, uniformemente in ogni compatto di Ω. Allora, grazie al Lemma III.7, il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge assolutamente, uniformemente in ogni compatto di Ω. Inoltre, il Lemma III.8 implica l'analiticità della f.

Supponiamo che $f(a)=0$ e che $\overline{B_a(\varepsilon)} \subset \Omega$ per un opportuno $\varepsilon > 0$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-1)$ converge uniformemente in $z \in \overline{B_a(\varepsilon)} \subset \Omega$. Dunque, grazie al Lemma III.7, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(z) = f_1(z)\dots f_n(z)g(z)$ e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \overline{B_a(\varepsilon)} \subset \Omega$. Quindi la molteplicità dello zero a della f vale la somma delle molteplicità degli zeri a delle f_n. $\square$

2 Teorema di Weierstrass

Un polinomio non costante p può essere fattorizzato nel seguente modo:

$$p(z) = c(z-a_1)\dots(z-a_n),$$

dove $0 \neq c \in \mathbb{C}$, n è il grado e $a_1, \dots, a_n$ sono gli zeri (ciascuno con la propria molteplicità). Un risultato analogo vale per le funzioni intere con un numero finito di zeri. Perciò una funzione intera f ammette la fattorizzazione

$$f(z) = e^{g(z)}(z-a_1)\dots(z-a_n),$$

dove g è una funzione intera e $a_1, \dots, a_n$ sono gli zeri (ciascuno con la propria molteplicità). Per generalizzare il risultato al caso in cui il numero di zeri è infinito occorre utilizzare i prodotti infiniti. Purtroppo ci sono casi in cui il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(z-a_n)$ non converge. In tal caso bisogna modificare i fattori $(z-a_n)$ per arrivare ad un prodotto infinito convergente.

Definiamo ora i cosiddetti *fattori elementari*:

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1-z, \\ E_p(z) &= (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right), \end{aligned}$$

dove $p = 1, 2, 3, \dots$. Allora $E_p(z/a)$ ha uno zero semplice in a e nessun altro zero.

Lemma III.10 *Per* $|z| \leq 1$ *e* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *si ha* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

Dimostrazione. Per $p = 0$ il risultato è banale. Per $p \geq 1$ consideriamo la serie di potenze

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Allora

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \\ &= \left\{-1 + (1-z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1})\right\} \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right), \end{aligned}$$

che implica $a_1 = \ldots = a_p = 0$ e $a_k \leq 0$ per $k \geq p+1$. Di conseguenza, per $|z| \leq 1$ risulta

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -|z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \\ &= |z|^{p+1} (1 - E_p(1)) = |z|^{p+1}. \end{aligned}$$

□

Teorema III.11 *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di numeri complessi tali che* $a_n \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. *Supponiamo che* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sia una successione di interi non negativi tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty \qquad \text{(III.1)}$$

per ogni $r > 0$. *Allora il prodotto infinito*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{(III.2)}$$

converge uniformemente in $z \in \Xi$ *per ogni compatto* Ξ *in* $\mathbb{C}$. *La* f *è una funzione intera che non ha altri zeri oltre gli* a_n, *ciascuno di essi con molteplicità uguale al numero di volte in cui viene ripetuta* a_n.

Dimostrazione. Il Lemma III.10 implica che

$$\left| E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right| \leq \left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

per $|z| \leq r \leq |a_n|$. Per $r > 0$ esiste n_0 (che dipende da r) tale che $|a_n| \geq r$ per ogni $n \geq n_0$. Per ogni $r > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |E_{p_n}(z/a_n) - 1|$ viene maggiorata termine a termine dalla serie (III.1) per $z \in \overline{B_0(r)}$. Il Teorema III.9 implica che il prodotto infinito in (III.2) è assolutamente convergente, uniformemente in $z \in \overline{B_0(r)}$ per ogni $r > 0$. Inoltre, f risulta essere una funzione intera. □

Siccome $|a_n| > 2r$ per ogni n tranne un numero finito, abbiamo per tale n

$$\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Quindi si verifica la condizione sufficiente (III.1) per $p_n = n - 1$.

Teorema III.12 (Weierstrass) *Sia f una funzione intera. Siano m l'ordine dello zero della f in zero (dove $m = 0$ se $f(0) \neq 0$) e a_n gli altri zeri della f (ciascuno con la propria molteplicità). Allora esistono una funzione intera g e interi p_n tali che*

$$f(z) = z^m \, e^{g(z)} \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Il prodotto è finito se la f ha soltanto un numero finito di zeri.

Dimostrazione. Secondo il Teorema III.11 si possono scegliere gli interi p_n tali che

$$h(z) = z^m \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

ha gli stessi zeri della f con le stesse molteplicità. Dunque f/h ha delle singolarità eliminabili in zero (soltanto se $m \geq 1$) e nei punti a_n. Quindi f/h è una funzione intera senza zeri. Siccome il piano complesso è semplicemente connesso, esiste una funzione intera g tale che $e^g = (f/h)$. □

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/|a_n|)$ è convergente, allora si può prendere $p_n = 0$ dappertutto. Questa situazione si verifica nel caso degli zeri delle funzioni intere $\sin(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ e $\cos(\sqrt{z})$. Ciò vuol dire che esistono funzioni intere g e h tali che

$$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right),$$

$$\cos(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!} = e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(n - \frac{1}{2})^2\pi^2}\right).$$

Tra poco vedremo che $g(z) \equiv h(z) \equiv 0$. Invece, se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/|a_n|^{p+1})$ per un opportuno $p = 0, 1, 2, \ldots$, si può prendere $p_n = p$ dappertutto.

3 Crescita delle Funzioni Intere

Sia f una funzione intera. Poniamo

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

Secondo il Principio del Massimo la funzione $M_f(r)$ è crescente in r. Infatti, se f non è una funzione costante, $M_f(r)$ è strettamente crescente in r. Per dimostrare la continuità di $M_f(r)$, prendiamo r_1, r_2 con $0 < r_1 < r_2$ e scegliamo $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ tale che $M_f(r_2) = |f(r_2 e^{i\theta_0})|$; in tal caso

$$0 < M_f(r_2) - M_f(r_1) \leq |f(r_2 e^{i\theta_0})| - |f(r_1 e^{i\theta_0})| < \varepsilon$$

se $r_2 - r_1 < \delta(\varepsilon)$. Di conseguenza, $M_f(r)$ dipende in modo continuo da r.

Proposizione III.13 *Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $M_f(r) \leq cost.r^n$ per $r > 0$, allora la f è un polinomio di grado $\leq n$.*

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{III.3}$$

per $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione

$$g(z) = \frac{f(z) - [a_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n]}{z^{n+1}}$$

è una funzione intera. Per $r > 1$ abbiamo

$$M_g(r) \leq \frac{M_f(r)}{r^{n+1}} + \frac{|c_0| + |c_1|r + \ldots + |c_n|r^n}{r^{n+1}},$$

che tende a zero se $r \to +\infty$. Secondo il Teorema di Liouville risulta $g(z) \equiv 0$ e quindi $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$. □

Una funzione intera f si dice di *ordine finito* se esiste $k > 0$ tale che

$$M_f(r) \leq e^{r^k}, \qquad r \geq r_0(k).$$

Il limite inferiore di tutte tali k si dice *ordine* della f. In tal caso, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $r_0 > 0$ e una successione $0 < r_1 < r_2 < \ldots \to +\infty$ tali che

$$e^{r_j^{\rho-\varepsilon}} \le M_f(r_j) \text{ per } j = 1, 2, 3, \ldots; \quad M_f(r) \le e^{r^{\rho+\varepsilon}} \text{ per } r > r_0.$$

Dunque

$$(\rho-\varepsilon) \le \frac{\log\log M_f(r_j)}{\log r_j} \text{ per } j = 1, 2, 3, \ldots; \quad \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \le \rho+\varepsilon \text{ per } r > r_0.$$

Di conseguenza,

$$\rho = \max_{r\to+\infty}\lim \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}. \tag{III.4}$$

Per $f(z) = \cos(\sqrt{z})$ e $g(z) = \sin(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ risultano

$$\begin{aligned} M_f(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{r}) = \frac{e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}}}{2}, \\ M_g(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)!} = \frac{\sinh(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} = \frac{e^{\sqrt{r}} - e^{-\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Quindi ambedue le funzioni hanno ordine $\rho = \frac{1}{2}$.

Rappresentando una funzione intera f dalla sua serie di potenze (III.3), si ha

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta.$$

Quindi

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\, 2\pi r \,\frac{M_f(r)}{r^{n+1}} = \frac{M_f(r)}{r^{n+1}}. \tag{III.5}$$

Proposizione III.14 *L'ordine di una funzione intera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ verifica*

$$\rho = \max_{n\to\infty}\lim \frac{n\,\log n}{\log(1/|c_n|)}. \tag{III.6}$$

Dimostrazione. Essendo la f di ordine finito, abbiamo $M_f(r) \le \exp(Ar^k)$ per ogni $r > 0$ e quindi $|c_n| \le r^{-n}\exp(Ar^k)$ per $r > 0$. Quest'ultima espressione assume il suo massimo per $r = (n/Ak)^{1/k}$ e quindi

$$|c_n| \le \left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k}. \tag{III.7}$$

D'altra parte, sia vera la (III.7) per $n \geq n_0(k, A)$. Per $n > m_r = [2^k eAr^k]$ e $r > 0$ sufficientemente grande si ha grazie alla (III.7)

$$|c_n z^n| = |c_n| r^n \leq \left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k} \left(\frac{n}{eAk} 2^{-k}\right)^{n/k} = 2^{-n}, \qquad |z| = r$$

e dunque

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{m_r} |c_n| r^n + \sum_{n=m_r+1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{m_r} |c_n| r^n + 2^{-m_r}, \qquad |z| = r.$$

Ora sia $\mu(r) = \max_n |c_n| r^n$. Allora

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq (1 + m_r)\mu(r) + 2^{-m_r} \leq (1 + 2^k eAkr^k)\mu(r) + 2^{-m_r}.$$

Siccome $\mu(r) \leq \max_n \{(eAk/n)^{n/k} r^n$ e quest'ultima espressione assume il suo massimo per $n = Akr^k$, abbiamo $\mu(r) \leq \exp(Ar^k)$, che implica

$$M_f(r) \leq (1 + 2^k eAkr^k)e^{Ar^k} + 2^{-m_r} \leq (2 + 2^k eAkr^k)e^{Ar^k} \leq e^{Br^k}$$

per un'opportuna costante $B > A > 0$. □

Consideriamo $f(z) = \cosh(\sqrt{z})$, dove $c_n = (-1)^n/(2n)!$ Allora $\log(1/|c_n|) = \log[(2n)!] = \sum_{k=1}^{2n} \log k$. Calcolando gli integrali $\int_1^{2n} \log x\, dx$ e $\int_1^{2n+1} \log x\, dx$ utilizzando le somme di Riemann inferiori e superiori, otteniamo

$$\int_1^{2n} \log x\, dx < \sum_{k=1}^{2n} \log k < \int_1^{2n+1} \log x\, dx,$$

oppure

$$2n \log(2n) - 2n + 1 < \sum_{k=1}^{2n} \log k < (2n + 1) \log(2n + 1) - 2n.$$

Dunque

$$\frac{n \log n}{(2n + 1) \log(2n + 1) - 2n} < \frac{n \log n}{\log(1/|c_n|)} < \frac{n \log n}{2n \log(2n) - 2n + 1}.$$

Siccome le parti a sinistra e destra tendono a $\frac{1}{2}$ se $n \to \infty$, otteniamo $\rho = \frac{1}{2}$. Di conseguenza, $\cosh(\sqrt{z})$ è una funzione intera di ordine $\frac{1}{2}$. Nella stessa maniera si dimostra che $\sin(\sqrt{z})/\sqrt{z})$ (dove $c_n = (-1)^n/(2n+1)!$) è una funzione intera di ordine $\frac{1}{2}$.

Definizione III.15 Sia $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di numeri complessi diversi da zero tali che $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. Allora

$$\inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} < +\infty \right\}$$

si dice *esponente di convergenza* della successione. L'esponente di convergenza vale $+\infty$ se è divergente $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\lambda}$ per ogni $\lambda > 0$.

Per $a_n = (n^2\pi^2)^{-1}$ abbiamo esponente di convergenza $\frac{1}{2}$. Noi collegheremo l'ordine di una funzione intera f ha l'esponente di convergenza della successione dei suoi zeri diversi da zero.

Proposizione III.16 *Data una successione* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *di numeri complessi diversi da zero tali che* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, *sia* $n(r) = \#\{k : |a_k| < r\}$. *Allora il suo esponente di convergenza vale*

$$\rho_1 = \max\lim_{r\to+\infty} \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

Dimostrazione. Ovviamente, per $\lambda > \rho_0$, essendo ρ_0 l'esponente di convergenza,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} = \int_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\lambda}.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t^\lambda} = \frac{n(r)}{r^\lambda} + \lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt,$$

quindi è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt. \tag{III.8}$$

Dunque per $\varepsilon > 0$ esiste $r_0(\varepsilon)$ tale che per $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$\varepsilon > \lambda \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt \geq \lambda n(r) \int_r^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{n(r)}{r^\lambda},$$

oppure $r^{-\lambda}n(r) \to 0$ se $r \to +\infty$. Di conseguenza, $\rho_1 \leq \lambda$ e quindi $\rho_1 \leq \rho_0$.

D'altra parte, per $t > 0$ abbastanza grande si ha

$$n(t) \leq t^{\rho_1 + (\varepsilon/2)}.$$

Quindi l'integrale generalizzato (III.8) converge per $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$. Di conseguenza, $\rho_0 \leq \rho_1$. □

Stimiamo ora $E_p(u)$.

Lemma III.17 *Per* $p = 1, 2, 3, \ldots$ *e* $u \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$\log(|E_p(u)|) \leq 3e(2 + \log p)\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}.$$

Per $p = 0$ *abbiamo*

$$\log(|E_0(u)|) \leq \log(1 + |u|).$$

Dimostrazione. Siccome $E_0(u) = 1 + u$, l'ultima parte del lemma segue subito. Ora sia $p \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned}
\log(|E_p(u)|) &= \mathrm{Re}\left[\log(1-u) + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right] \\
&= -\mathrm{Re}\left[\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{u^k}{k}\right] \leq \frac{|u|^k}{k} \leq \frac{|u|^{p+1}}{(p+1)(1-|u|)} \leq |u|^{p+1}
\end{aligned}$$

per $|u| \leq (p/(p+1))$. Per $|u| > (p/(p+1))$ la disuguaglianza $\log(1+|u|) \leq |u|$ implica

$$\begin{aligned}
\log(|E_p(u)|) &\leq 2|u| + \frac{|u|^2}{2} + \ldots + \frac{|u|^p}{p} \\
&= |u|^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}|u|^{-1} + \ldots + \frac{1}{2}|u|^{2-p} + 2|u|^{1-p}\right) \\
&\leq |u|^p\left[2\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p-1} + \sum_{k=2}^{p}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p-k}\right] \\
&\leq |u|^p\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(2 + \sum_{k=2}^{p}\frac{1}{k}\right) \\
&\leq |u|^p\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(2 + \int_1^p \frac{dx}{x}\right) \\
&\leq |u|^p e(2+\log p) \leq \frac{|u|^p}{1+|u|}3e(2+\log p).
\end{aligned}$$

□

Lemma III.18 *Se è convergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)}$, *allora il corrispondente prodotto infinito* $\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n)$ *verifica la disuguaglianza*

$$\log(|\Pi(z)|) \leq k_p\left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}}\,dt + r\int_r^{\infty}\frac{n(t)}{t^{p+2}}\,dt\right),$$

dove $k_0 = 1$, $k_p = 3e(p+1)(2+\log p)$ *per* $p \in \mathbb{N}$, $r = |z|$ *e* $z \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Dal Lemma III.17 segue per $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\log(|\Pi(z)|) \leq 3e(2+\log p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{p+1}}{|a_n|^p(|a_n|+r)} = 3e(2+\log p) r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^p(t+r)}.$$

Utilizzando $\lim_{r \to +\infty} r^{-(p+1)} n(r) = 0$ [che segue dalla convergenza della serie] e integrando per parti risulta per $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
\log(|\Pi(z)|) &\leq 3e(2+\log p) r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{pr + (p+1)t}{t^{p+1}(t+r)^2} n(t)\, dt \\
&\leq 3e(2+\log p)(p+1) r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t+r)}\, dt \\
&\leq 3e(2+\log p)(p+1) r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}}\, dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}}\, dt \right).
\end{aligned}$$

□

Teorema III.19 (Borel) *L'intero non negativo p nel prodotto infinito*

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n) \tag{III.9}$$

verifica $p \leq \rho_1$, dove ρ_1 è l'esponente di convergenza della successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dimostrazione. Dal Lemma III.18 segue

$$\log(|\Pi(z)|) \leq C_\lambda k_p r^p \left(\int_0^r t^{\lambda-p-1}\, dt + r \int_r^{\infty} t^{\lambda-p-2}\, dt \right) = B_\lambda C_\lambda r^\lambda,$$

dove

$$B_\lambda = k_p \left(\frac{1}{\lambda - p} + \frac{1}{p+1-\lambda} \right).$$

In altre parole, l'ordine p del prodotto $\Pi(z)$ verifica $p \leq \lambda$ per ogni $\lambda > \rho_1$, cioè $p \leq \rho_1$. □

Ora dimostriamo che l'esponente di convergenza ρ_1 della successione degli zeri di una funzione intera f verifica $\rho_1 \leq \rho$, dove ρ è l'ordine della f.

Lemma III.20 *Sia f analitica in un intorno del disco $\overline{B_{er}(0)}$ e sia $f(0) = 1$. Allora*

$$n_f(r) \leq \log M_f(er).$$

Dimostrazione. Dalla (I.11) segue

$$n_f(r) = n_f(r)\int_r^{er}\frac{dt}{t} \leq \int_r^{er}\frac{n_f(t)}{t}\,dt\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(|f(ere^{i\theta})|)\,d\theta \leq \log M_f(er),$$

che dimostra il lemma. □

Teorema III.21 *L'esponente di convergenza della successione degli zeri di una funzione intera è al massimo uguale al suo ordine.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che $f(0) = 1$. Dal Lemma III.20 segue che

$$\rho_1 = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log n_r(r)}{\log r} \leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log M_f(er)}{\log er} = \rho,$$

che dimostra il teorema. Per un valore di $f(0)$ qualsiasi consideriamo

$$f_\lambda(z) = (\lambda!)z^{-\lambda}\frac{f(z)}{f^{(\lambda)}(0)}$$

al posto della f, poichè la f_λ ha lo stesso ordine e lo stesso esponente di convergenza della f. □

Teorema III.22 (Hadamard) *Sia f una funzione intera di ordine finito ρ. Allora*

$$f(z) = z^m\, e^{P(z)}\prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

dove m è l'ordine dello zero di f in zero, a_n sono gli altri zeri e $P(z)$ è un polinomio di grado $\leq p \leq \rho$.

Dimostrazione. Per l'ordine p nel prodotto (III.9) abbiamo $p \leq \rho_1$, secondo il Teorema III.19. D'altra parte, $\rho_1 \leq \rho$, l'ordine della funzione intera f, secondo il Teorema III.21. Quindi $p \leq \rho$, l'ordine della f.

Ci rimane dimostrare che la funzione $g(z)$ nell'esponente è un polinomio di grado q con $q \leq \rho$. Sia

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{z^m\Pi(z)},$$

una funzione intera senza zeri. Quindi $\psi(z) = e^{g(z)}$ per una funzione intera g. Allora la ψ ha ordine $\leq \rho$ e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, verifica

$$\log(|\psi(z)|) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \qquad |z| = r,$$

per r abbastanza grande. Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$M_g(r) \leq r^{\rho+2\varepsilon}$$

per r abbastanza grande e quindi la g è un polinomio di grado $\leq \rho$. □

Se l'ordine $\rho \in (0,1)$, il Teorema di Hadamard implica la rappresentazione

$$f(z) = \text{cost.} z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

dove il numero di zeri è per forza infinito. Nel caso contrario la f sarebbe un polinomio. Si vede subito che la costante vale $\lim_{z\to 0}(z^{-m}f(z))$. Applicando il Teorema di Hadamard a due funzioni intere note di ordine $\frac{1}{2}$, troviamo

$$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right), \qquad \cos(\sqrt{z}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right).$$

Di conseguenza,

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \qquad \cos(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right). \tag{III.10}$$

Per $z = (\pi/2)$ risulta l'illustre formula di Wallis (1656)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{2.2.4.4.6.6.\ldots.(2m)(2m)}{1.3.3.5.5.7.\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

Esempio III.23 Consideriamo ora la funzione intera di ordine 1

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

dove γ è un'opportuna costante tale che $\Gamma(1) = 1$. In altre parole,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty} E_1(-z/n).$$

Grazie al Lemma III.10 e al Teorema III.11, il prodotto infinito converge uniformemente in z in ogni compatto del piano complesso. Gli zeri della funzione intera $1/\Gamma(z)$ sono $-1, -2, -3, \ldots$, essendo tutti semplici. Siccome $\Gamma(1) = 1$, scegliamo $\gamma = -\log(c)$, dove

$$c = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-1/n} > 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\sum_{k=1}^{\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-1/k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - \log(n+1)\right),
\end{aligned}$$

la cosiddetta costante di Eulero [$\gamma \approx 0.5772$]. Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= z\, e^{\gamma z} \lim_{n\to\infty} \frac{z+k}{k} e^{-z/k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!} e^{z(\gamma-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!} n^{-z}\, e^{z(\gamma-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}+\log(n))} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\, n^z}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\frac{z}{\Gamma(z+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\, n^z}\, \frac{z+1+n}{n} = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= z \lim_{n\to\infty} \frac{(z+1)\ldots(z+n)}{n!}\, \frac{(1-z)(2-z)\ldots(n-z)}{n!}\, \underbrace{\frac{n+1-z}{n^z\, n^{1-z}}}_{\to 1} \\
&= z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.
\end{aligned}$$

Capitolo IV

Approssimazione Razionale

In questo capitolo discutiamo il Teorema di Runge sull'approssimazione razionale delle funzioni analitiche e il Teorema di Mittag-Lefler sulla costruzione delle funzioni meromorfe dalle sue parti principali.

1 Teorema di Runge

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare il Teorema di Runge sull'uniforme approssimazione delle funzioni analitiche mediante funzioni razionali. Premettiamo il seguente lemma sul riempiemento degli aperti tramite una successione di compatti.

Proposizione IV.1 *Sia Ω un aperto in $\mathbb{C}$. Allora esiste una successione $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ di compatti con le seguenti proprietà:*

(a) *Per $n \in \mathbb{N}$ l'insieme K_n è contenuto nella parte interna di K_{n+1}.*

(b) *Ogni compatto K in Ω è contenuto in un opportuno K_n.*

(c) *Ogni componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ contiene un componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.*

(d) *$\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ e sia

$$K_n = \overline{B_n(z_0)} \cap \left\{ z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Allora $K_n \subset \Omega$ e K_n è chiuso e limitato e quindi compatto. Inoltre,

$$K_n \subset \underbrace{B_{n+1}(z_0) \cap \left\{ z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{n+1} \right\}}_{\text{aperto in } \Omega} \subset K_{n+1}. \tag{IV.1}$$

Quindi, se K è un compatto in Ω, gli aperti in (IV.1) costituiscono un ricoprimento aperto di K mediante una successione crescente di aperti. Dunque esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$K \subset B_{m+1}(z_0) \cap \left\{ z \in \Omega : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{m+1} \right\} \subset K_{m+1}.$$

□

Teorema IV.2 (Runge) *Sia Ω un aperto in $\mathbb{C}$ e sia $E \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tale che la sua chiusura $\overline{E}$ abbia un'intersezione non vuota con ogni componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Allora per ogni funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$, per ogni compatto $K \subset \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione razionale $R(z)$ i cui poli sono in E e tale che*

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

Corollario IV.3 *Sia Ω un aperto in $\mathbb{C}$ tale che $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ sia connesso. Allora per ogni funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ esiste una successione $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ di polinomi tale che $p_n(z)$ tende a $f(z)$ uniformemente in z in ogni compatto di Ω.*

Il Corollario IV.3 segue immediatamente dal Teorema IV.2 prendendo $E = \{\infty\}$ e sfruttando il fatto che le funzioni razionali con un singolo polo all'infinito sono i polinomi non costanti. Per dimostrare il Teorema di Runge IV.2 faremo uso di due importanti lemmi.

Lemma IV.4 *Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva rettificabile e K un compatto disgiunto da $\gamma[0,1]$. Considerata $f : \gamma[0,1] \to \mathbb{C}$ continua e $\varepsilon > 0$, esiste una funzione razionale $R(z)$ con tutti i suoi poli sulla curva $\gamma[0,1]$ tale che*

$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - R(z) \right| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

Dimostrazione. Poichè $\gamma[0,1] \cap K = \emptyset$, esiste un numero r tale che $0 < r < \mathrm{dist}(K, \gamma)$. Quindi per $t, s \in [0,1]$ e $z \in K$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| &\leq \frac{1}{r^2} \left| f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(s))\gamma(t) - z[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))] \right| \\
&\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))|\, |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{1}{r^2} |\gamma(t)|\, |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \\
&+ \frac{|z|}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \\
&\leq \frac{c}{r^2} \left(|\gamma(t) - \gamma(s)| + 2|f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))| \right),
\end{aligned}$$

dove $K \cup \gamma[0,1] \cup \mathrm{Im}(f) \subset B_c(0)$. L'uniforme continuità di γ e $f \circ \gamma$ implica l'esistenza di $0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che

$$\left|\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j)-z}\right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Var}(\gamma)}, \qquad t_{j-1} \le t \le t_j,\ z \in K.$$

Sia

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_{j-1}))\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{\gamma(t_{j-1})-z},$$

una funzione razionale avente i suoi poli nei punti $\gamma(0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1})$. Allora per $z \in K$ risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - R(z)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1}))-z}\right]d\gamma(t)\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{\mathrm{Var}(\gamma)}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} d|\gamma|(t) \le \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lemma IV.5 *Sia K un compatto in $\mathbb{C}$ e siano a, b due punti in $\mathbb{C} \setminus K$ tali che*

$$|a-b| \le \frac{1}{2}\mathit{dist}(b,K).$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni funzione razionale $R(z)$ avente il punto a come suo unico polo, esiste una funzione razionale $Q(z)$ avente il punto b come suo unico polo tale che

$$|Q(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

Dimostrazione. **Caso** $R(z) = (z-a)^{-n}$ **per** $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi,

$$\left|\frac{a-b}{z-b}\right| \le \frac{1}{2}, \qquad z \in K.$$

Quindi

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{(z-b)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k, \tag{IV.2}$$

e la serie a secondo membro è maggiorata (per $z \in K$) da

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}\frac{1}{2^k},$$

inoltre

$$\frac{\binom{k+n}{k+1}2^{-k-1}}{\binom{k+n-1}{k}2^{-k}} = \frac{1}{2}\frac{k+n}{k+1} \to \frac{1}{2}, \qquad k \to +\infty.$$

Perciò la serie di funzioni in (IV.2) è uniformemente convergente in $z \in K$. Per N abbastanza grande la funzione razionale

$$Q(z) = \frac{1}{(z-b)^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n-1}{k}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$$

ha il punto b come suo unico polo e verifica $|Q(z) - R(z)| < \varepsilon$ per $z \in K$.

Caso generale. Se

$$R(z) = \sum_{j=1}^{m}\frac{r_j}{(z-a)^j} + p(z),$$

dove $p(z)$ è un polinomio, allora per $j = 1, \ldots, m$ esiste una funzione razionale $Q_j(z)$ con il suo unico polo in b tale che

$$\left|\frac{1}{(z-a)^j} - Q_j(z)\right| < \frac{\varepsilon}{m|r_j|}, \qquad z \in K.$$

Se $r_j = 0$, scegliamo ovviamente $Q_j(z) \equiv 0$. Quindi

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{m} r_j Q_j(z) + p(z)$$

è una funzione razionale con il suo unico polo in b e tale che

$$|Q(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

$\square$

Siamo ora pronti a dimostrare il Teorema di Runge (Teorema IV.2).

Dimostrazione (**del Teorema IV.2**) Per prima cosa consideriamo una successione $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ di compatti in Ω come nella Proposizione IV.1. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che K è contenuto nella parte interna di K_N. Poniamo

$$\begin{aligned} H = &\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus K_N) \geq \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z, K)\} \\ &\cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus K_N) \geq \frac{1}{2}\mathrm{dist}(K, \mathbb{C}\setminus K_N)\}. \end{aligned}$$

Quindi H è chiuso e

$$K \subset H \subset \text{int}(K_N)$$

è la parte interna di K_N. Dalla compattezza di K_n segue quella di H. Dal Lemma IV.4 segue l'esistenza di una funzione razionale $Q(z)$ con tutti i suoi poli contenuti in $\text{int}(K_N) \setminus H$ tale che

$$|f(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in H.$$

Possiamo scrivere $Q(z)$ come somma $Q_1(z) + \ldots + Q_m(z)$ di funzioni razionali $Q_j(z)$ con un singolo polo. Sia $a \in \text{int}(K_N) \setminus H$ il polo di $Q_1(z)$.

Dalla compattezza della frontiera ∂K_N di K_N segue l'esistenza di $b \in \partial K_N$ tale che $|a - b| = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus K_N)$. Siccome $a \notin H$, abbiamo

$$|a - b| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N) \leq \frac{1}{2}\text{dist}(b, K),$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N) = \text{dist}(K, \partial K_N).$$

Scegliamo ora $b' \in \mathbb{C} \setminus K_N$ tale che $|b - b'| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N)$ in modo che

$$|b - b'| < \frac{1}{2}\text{dist}(b', K).$$

Sia D il componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus K_N$ che contiene il punto b'. Secondo la costruzione della Proposizione IV.1, D contiene un componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$; in particolare, $D \cap \overline{E} \neq \emptyset$. Scegliamo $c \in D \cap \overline{E} \neq \emptyset$. Si possono presentare due casi.

Caso $c \neq \infty$. Poichè b' e c appartengono allo stesso aperto connesso (e quindi connesso per archi) D in $\mathbb{C}_\infty$, esistono $s_2, \ldots, s_p \in D$ tali che $s_2 = b'$, $s_p = c$ e

$$|s_k - s_{k+1}| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N), \qquad 2 \leq k \leq p - 1. \tag{IV.3}$$

Siano $s_0 = a$ e $s_1 = b$. Scegliamo $s_{p+1} \in E$ tale che

$$|c - s_{p+1}| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N). \tag{IV.4}$$

Quindi

$$|s_k - s_{k+1}| < \frac{1}{2}\text{dist}(s_{k+1}, K). \tag{IV.5}$$

Infatti per $2 \leq k \leq p - 1$ la (IV.5) segue dalle (IV.3)-(IV.4) e da $\{s_k : 2 \leq k \leq p + 1\} \subset \mathbb{C} \setminus K_N$. Per $k = 0, 1$ la (IV.5) coincide con le stime precedenti per $|a - b|$ e $|b - b'|$, rispettativamente.

Applicando il Lemma IV.5 troviamo le funzioni razionali $S_1(z), \ldots, S_{p+1}(z)$ tali che s_k è l'unico polo di $S_k(z)$ e

$$|S_k(z) - S_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{2m(p+1)}, \qquad z \in K,\ 0 \le k \le p,$$

mentre $S_0(z) = Q_1(z)$. Sia $R_1(z) = S_{p+1}(z)$. Allora $R_1(z)$ è una funzione razionale con l'unico polo s_{p+1} appartenente ad E e tale che

$$|Q_1(z) - S_1(z)| \le \sum_{k=0}^{p} |S_k(z) - S_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Caso $c = \infty$. Si segua la stessa procedura utilizzando la distanza lungo la sfera Riemanniana $\mathbb{C}_\infty$ anziché quella nel piano complesso.

Per concludere la dimostrazione basta applicare la stessa procedura a tutti i termini $Q_1(z), \ldots, Q_m(z)$ in modo da arrivare alle funzioni razionali $R_1(z), \ldots,$ $R_m(z)$ con tutti i loro poli in E tali che

$$|Q_j(z) - R_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in K.$$

Poniamo ora $R(z) = R_1(z) + \ldots + R_m(z)$. Allora $R(z)$ ha tutti i suoi poli in E e

$$|R(z) - f(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

∎

2 Teorema di Mittag-Lefler

Dimostriamo ora il seguente teorema.

Teorema IV.6 (Mittag-Lefler) *Sia Ω un aperto in $\mathbb{C}$, $\{z_k\}$ una successione in Ω senza punti di accumulazione all'interno di Ω, e*

$$S_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} A_{jk}(z - z_k)^{-j}.$$

Allora esiste una funzione meromorfa f in Ω i cui poli sono esattamente i punti z_k e le cui parti principali in z_k sono esattamente $S_k(z)$.

Dimostrazione. Costruiamo i sottoinsiemi compatti K_n di Ω come nella Proposizione IV.1. Allora ogni K_n contiene soltanto un numero finito di punti z_k. Definiamo gli insiemi di interi I_n (disgiunti tra loro) nel seguente modo:

$$I_1 = \{k : z_k \in K_1\}, \qquad I_n = \{k : z_k \in K_n \setminus K_{n-1}\},$$

per $n \geq 2$. In altre parole, $\mathbb{N} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Sia

$$f_n(z) = \sum_{k \in I_n} S_k(z),$$

con $f_n(z) = 0$ se $I_n = \emptyset$. Allora f_n è una funzione razionale con poli in $K_n \setminus K_{n-1}$. Siccome f_n è analitica in un intorno di K_{n-1}, per il Teorema di Runge esiste una funzione razionale $R_n(z)$ con poli in $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tale che

$$|f_n(z) - R_n(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad z \in K_{n-1}.$$

Poniamo

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n(z) - R_n(z)], \tag{IV.6}$$

e dimostriamo che tale funzione f è la funzione meromorfa enunciata nel teorema.

Infatti, sia K un compatto contenuto in $\Omega \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Allora $K \subset K_N$ per un $N \in \mathbb{N}$. Risulta

$$|f_n(z) - R_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n \geq N, \ z \in K.$$

Quindi la serie di funzioni (IV.6) è uniformente convergente in z per ogni compatto di $\Omega \setminus \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$. Poichè ogni suo termine è analitico in $\Omega \setminus \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$, f è meromorfa in Ω. Inoltre, fissato $k \in \mathbb{N}$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|z_j - z_k| < \varepsilon$ per $j \neq k$. Dunque $f(z) - S_k(z)$ è analitica in $z \in B_{a_k}(\varepsilon)$. Di conseguenza, z_k è un polo della funzione f e $S_k(z)$ è la corrispondente parte principale. □

Qual'è la funzione meromorfa (in $\mathbb{C}$) più semplice che ha poli semplici in tutti gli interi n con parte principale $1/(z-n)$? Siccome per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-n)^{-1}$ è divergente, non possiamo semplicemente prendere la somma delle parti principali. La soluzione del problema è

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \tag{IV.7}$$

dove $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Poichè [vedi (III.10)]

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

si ottiene facilmente che $f(z) = \pi\mathrm{cotan}(\pi z)$.

Esempio IV.7 Dimostriamo nuovamente che la parte a destra della (IV.7) è uguale a $\pi\mathrm{cotan}(\pi z)$. Infatti, sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $z \in \mathbb{C}$ con poli semplici in $z_1, \ldots, z_N$ e corrispondenti residui $a_1, \ldots, a_N$. Allora per $C_N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_N\}$ con $R_N = \max(|z_1|, \ldots, |z_N|)+1$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{z_n - z},$$

dove abbiamo applicato il Teorema Integrale di Cauchy alla funzione analitica $g(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{N} (a_n/(z - z_n))$. Dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{z f(w)}{w(w-z)}\, dw = f(z) - f(0) + \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{1}{z_n - z} - \frac{1}{z_n}\right). \tag{IV.8}$$

Consideriamo una funzione meromorfa $f(z)$ in $z \in \mathbb{C}$ con poli semplici in $z = z_n$ con corrispondenti residui a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Sia $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ una successione di raggi tali che $|z_j| > R_N > |z_k|$ per $j > N \geq k$ e sia $f(z)$ limitata in $z \in \cup_{N=1}^{\infty} C_N$. In tal caso l'integrale nella parte a sinistra della (IV.8) si annulla (per $z \in \mathbb{C}$ fisso) se $N \to +\infty$. Se è convergente la serie a destra (per $z \neq z_n$), risulta

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n}\right).$$

Consideriamo ora la funzione $f(z) = \pi\mathrm{cotan}(\pi z) - (1/z)$ e $R_N = N + \frac{1}{2}$. Allora $f(0) = 0$ e

$$\pi\mathrm{cotan}(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right),$$

da cui la (IV.7).

Capitolo V

Trasformata di Fourier

In questo capitolo facciamo un richiamo della teoria delle serie di Fourier e introduciamo la trasformata di Fourier, sia per le funzioni nella classe $L^1(\mathbb{R})$ sia per quelle nella classe $L^2(\mathbb{R})$.

1 Serie di Fourier

Consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \tag{V.1}$$

dove i coefficienti Fourier a_0, a_n e b_n sono numeri complessi. La serie in (V.1) è convergente se la funzione $f(x)$ è periodica con periodo 2π e regolare a tratti. La somma è uguale a $f(x)$ nei punti di continuità di f ed a $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ nei punti in cui f ha una discontinuità di prima specie (cioè un salto).[1] La serie (V.1) converge uniformemente per x che appartiene a tutti gli intervalli chiusi e limitati in cui f è continua. I coefficienti di Fourier si ricavano dalla funzione $f(x)$ nel seguente modo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \tag{V.2a}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \tag{V.2b}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \tag{V.2c}$$

[1]Esistono funzioni continue e periodiche con periodo 2π per cui la serie di Fourier è divergente in ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi non basta la continuità di f per garantire la convergenza della sua serie di Fourier.

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Inoltre, si ha la cosiddetta identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right). \tag{V.3}$$

L'identità di Parseval (V.3) può essere estesa alle funzioni $f(x)$ periodiche con periodo 2π che appartengono allo spazio di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$. Poichè l'insieme

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}\right\}$$

è una base ortonormale di $L^2(-\pi,\pi)$, si ottiene

$$f(x) = \tilde{a}_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) + \tilde{b}_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right),$$

dove

$$\tilde{a}_0 = a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \tilde{a}_n = a_n\sqrt{\pi}, \qquad \tilde{b}_n = b_n\sqrt{\pi}.$$

Un altro modo per rappresentare una serie di Fourier è il seguente:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{V.4}$$

dove $f(x)$ è periodica con periodo 2π e regolare a tratti; inoltre

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx.$$

I coefficienti c_n sono collegati ai coefficienti di Fourier precedenti nel seguente modo:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}[a_n - ib_n], & n = 1, 2, 3, \ldots, \\ \frac{1}{2}a_0, & n = 0, \\ \frac{1}{2}[a_{-n} + ib_{-n}], & n = -1, -2, -3, \ldots, \end{cases}$$

e la corrispondente identità di Parseval ha la forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{V.5}$$

L'identità di Parseval (V.5) può essere estesa alle funzioni $f(x)$ periodiche con periodo 2π che appartengono allo spazio di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$. Sfruttando il fatto che l'insieme

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

è una base ortonormale di $L^2(-\pi, \pi)$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{V.6}$$

Definiamo la trasformata di Fourier discreta nel seguente modo:

$$\mathcal{F}_d(f) = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Allora $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}_d$ è un operatore unitario dallo spazio di Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$ sullo spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$.[2] Infatti, l'identità di Parseval può essere scritta nella forma

$$(2\pi)^{-1/2}\|f\|_2 = \|\mathcal{F}_d f\|_2,$$

dove le norme sono quelle in $L^2(-\pi, \pi)$ a sinistra) e $\ell^2(\mathbb{Z})$ (a destra).

La trasformata di Fourier discreta $\mathcal{F}_d$ può essere definita anche per le funzioni $f \in L^1(-\pi, \pi)$. In tal caso si ha

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1,$$

qualunque sia $n \in \mathbb{Z}$. Inoltre, $c_n \to 0$ se $n \to \pm\infty$.[3]

2 Trasformata di Fourier: funzioni integrabili

Sia $f(x)$ una funzione in $L^1(\mathbb{R})$. Allora la funzione $\hat{f}(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}$) definita dall'integrale di Lebesgue

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)\,dx \tag{V.7}$$

si dice *trasformata di Fourier* di f. Ovviamente, la stima

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx = \|f\|_1 < +\infty$$

implica l'integrabilità della funzione $e^{i\xi x}f(x)$ (essendo $\xi \in \mathbb{R}$ un parametro).

Lemma V.1 (di Riemann-Lebesgue) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\hat{f}(\xi) = 0. \tag{V.8}$$

[2] $\ell^2(\mathbb{Z})$ è lo spazio di Hilbert di tutte le successioni complesse $\boldsymbol{c} = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ per cui la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ è convergente.

[3] Ciò segue subito dal Lemma di Riemann-Lebesgue (Teorema V.1).

Dimostrazione. Prima consideriamo il caso in cui $f(x) = 1$ per $x \in [a,b]$ e $f(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, essendo $[a,b]$ un intervallo compatto. Allora

$$\hat{f}(\xi) = \left[\frac{e^{i\xi x}}{i\xi}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{i\xi b} - e^{i\xi a}}{i\xi} = 2\,e^{\frac{1}{2}i(a+b)\xi}\frac{\sin(\frac{1}{2}(b-a)\xi)}{\xi} \to 0, \qquad \xi \to \pm\infty.$$

Scegliendo $-\infty < c_1 < \ldots < c_n < +\infty$ tali che $f(x) = 0$ per $x \notin [c_1, c_n)$ e $f(x) = f_j$ per $c_j \leq x < c_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, si ha

$$\hat{f}(\xi) = 2\sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{1}{2}i(c_j + c_{j+1})}\frac{\sin(\frac{1}{2}(c_{j+1} - c_j)\xi)}{\xi} \to 0, \qquad \xi \to \pm\infty.$$

In altre parole, il Lemma di Riemann-Lebesgue vale se f è una funzione semplice (integrabile con un numero finito di valori diversi).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. In tal caso esiste una successione $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ di funzioni semplici tali che $\|f - f_N\|_1 \to 0$ se $N \to +\infty$. Quindi, per un opportuno $\varepsilon > 0$, esiste un intero N tale che $\|f - f_N\|_1 < (\varepsilon/2)$. Utilizzando la stima

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}_N(\xi)| \leq \|f - f_N\|_1$$

e una costante $c > 0$ tale che $|\hat{f}_N(\xi)| < (\varepsilon/2)$ per $|\xi| > c$, si vede che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c > 0$ tale che $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$ per $|\xi| > c$. Di conseguenza, $\hat{f}(\xi) \to 0$ se $\xi \to \pm\infty$. □

Il Teorema della Convergenza Dominata implica:

Proposizione V.2 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f}(\xi)$ dipende da $\xi \in \mathbb{R}$ in modo continuo.*

Dimostrazione. Facendo tendere ξ a η, si trova

$$\lim_{\xi \to \eta} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \to \eta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} f(x)\,dx = \hat{f}(\eta),$$

sfruttando la stima $|e^{i\xi x} f(x)| \leq |f(x)|$ e il fatto che $f \in L^1(\mathbb{R})$. □

La trasformata di Fourier costituisce un operatore lineare $\mathcal{F}$ dallo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R})$ nello spazio di Banach $C_0(\mathbb{R})$ con la seguente proprietà:[4]

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

[4] $C_0(\mathbb{R})$ è lo spazio di tutte le funzione continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $g(\xi) \to 0$ se $\xi \to \pm\infty$. La norma è: $\|g\|_\infty = \max_{\xi \in \mathbb{R}} |g(\xi)|$.

3 Teorema di Plancherel

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Allora la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}f = \hat{f}$ appartiene a $C_0(\mathbb{R})$.

Teorema V.3 (di Plancherel) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx. \tag{V.9}$$

Inoltre, $\mathcal{F}$ ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbb{R})$ che verifica (V.3) *per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ ed è un operatore lineare invertibile su $L^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f per $x \in [-\pi, \pi]$ (vedi [4], Teorema 2.5.2, Vol. 2):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (2\pi)^{-1} \hat{f}(-n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(-n)|^2. \end{aligned}$$

Poichè $c_n[e^{-ixt} f] = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n+t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx dt = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ixt} f(x)|^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(n+t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |\hat{f}(\xi)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ abbia supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |c^{-1/2}\hat{f}(\tfrac{\xi}{c})|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Infine, se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo (V.3).

L'equazione (V.3) dimostra che la $\mathcal{F}$ può essere estesa ad un operatore lineare $\mathcal{F}$ da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ che verifica (V.3). Infatti, $\mathcal{F}$ manda i vettori appartenenti al sottospazio denso $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ in vettori appartenenti al sottospazio denso $C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ e l'immagine di $\mathcal{F}$ è chiusa in $L^2(\mathbb{R})$. Di conseguenza, $\mathcal{F}$ è un operatore lineare invertibile sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. □

Dal Teorema V.3 si vede subito che $U = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ è un operatore lineare unitario sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R})$. L'applicazione dell'operatore lineare $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ ad una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ non cambia la sua norma in L^2.

Corollario V.4 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\hat{f})(-x) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)e^{-i\xi x}\,dx. \tag{V.10}$$

Dimostrazione. Secondo la formula di polarizzazione si può esprimere il prodotto scalare complesso in norme al quadrato:

$$(f,g) = \tfrac{1}{4}\|f+g\|_2^2 - \tfrac{1}{4}\|f-g\|_2^2 + \tfrac{1}{4}i\|f+ig\|_2^2 - \tfrac{1}{4}i\|f-ig\|_2^2,$$

dove $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Applicando tale regola alle immagini dell'operatore unitario $U = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ (cioè $\|Uf\|_2 = \|f\|_2$ per ciascuna funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$), si ha

$$\begin{aligned}(Uf,Ug) &= \tfrac{1}{4}\|Uf+Ug\|_2^2 - \tfrac{1}{4}\|Uf-Ug\|_2^2 + \tfrac{1}{4}i\|Uf+iUg\|_2^2 - \tfrac{1}{4}i\|Uf-iUg\|_2^2\\ &= \tfrac{1}{4}\|U[f+g]\|_2^2 - \tfrac{1}{4}\|U[f-g]\|_2^2 + \tfrac{1}{4}i\|U[f+ig]\|_2^2 - \tfrac{1}{4}i\|U[f-ig]\|_2^2\\ &= \tfrac{1}{4}\|f+g\|_2^2 - \tfrac{1}{4}\|f-g\|_2^2 + \tfrac{1}{4}i\|f+ig\|_2^2 - \tfrac{1}{4}i\|f-ig\|_2^2 = (f,g).\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{V.11}$$

Poichè $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-1/2}U^{-1}$, si ha

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{-1}\hat{f}, g) &= (2\pi)^{-1/2}(U^{-1}\hat{f}, g)\\ &= (2\pi)^{-1/2}(U^{-1}\hat{f}, U^{-1}[Ug])\\ &= (2\pi)^{-1/2}(\hat{f}, Ug) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}, \mathcal{F}g).\end{aligned}$$

Infine, osservando che

$$\overline{(\mathcal{F}g)(\xi)} = (\mathcal{F}\overline{g})(-\xi), \tag{V.12}$$

otteniamo (V.4). □

4 Proprietà della Trasformata di Fourier

In questo paragrafo dimostriamo alcune proprietà aritmetiche della trasformata di Fourier.

Teorema V.5 (di convoluzione) *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora il prodotto di convoluzione $f * g$ definito da*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Inoltre,

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Dimostrazione. Si vede facilmente che

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)g(y)|\,dzdx = \|f\|_1\|g\|_1.$$

Quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, la funzione $F(x,y) = e^{ix\xi}f(x-y)g(y)$ è integrabile in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Applicando il Teorema di Fubini si ha

$$\begin{aligned}\widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy\right]dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z+y)\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(y)\,dydz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi}f(z)\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}g(y)\,dydz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

Teorema V.6 *Supponiamo che, per un opportuno intero $k = 1, 2, 3, \ldots$, la funzione $(1 + |x|)^k f(x)$ appartenga ad $L^1(\mathbb{R})$. Allora la trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ è di classe C^k in $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{ix\xi} f(x)\, dx,$$

e $\hat{f}^{(k)}(\xi) \to 0$ se $\xi \to \pm\infty$.

Dimostrazione. Se fosse permesso calcolare la derivata k-esima sotto il segno di integrale, la tesi sarebbe immediata. Ma questo fatto (derivabilità sotto il segno di integrale) segue dall'utilizzo del principio di induzione matematica rispetto a k e dal Teorema della Convergenza Dominata. Dal Lemma di Riemann-Lebesgue segue infine che $\hat{f}^{(k)}(\xi) \to 0$ se $\xi \to \pm\infty$. $\square$

Teorema V.7 *Supponiamo che, per un opportuno intero $k = 1, 2, 3, \ldots$, la funzione $f(x)$ sia di classe C^k e che $f, f', \ldots, f^{(k)}$ appartengano a $L^1(\mathbb{R})$. Allora la trasformata di Fourier di $f^{(k)}(x)$ verifica*

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Inoltre, $\hat{f}(\xi) = o(\xi^k)$ se $\xi \to \pm\infty$.

Dimostrazione. Basta eseguire k integrazioni per parti successive. $\square$

5 Classe di Schwarz

La *classe di Schwarz* $\mathcal{S}$ consiste di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ per cui, per $k, m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $(1 + |x|)^m f^{(k)}(x)$ tende a zero se $x \to \pm\infty$. In altre parole, una funzione appartenente alla classe di Schwarz e tutte le sue derivate successive hanno un decadimento all'infinito di ordine $(1 + |x|)^{-m}$, qualunque sia $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Proposizione V.8 *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora per $k, m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ si ha*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^m |f^{(k)}(x)|\, dx < +\infty.$$

Dimostrazione. Fissati m e k, esiste una costante M tale che

$$(1 + |x|)^{m+2} |f^{(k)}(x)| \le M, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^m |f^{(k)}(x)|\, dx \le M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + |x|)^2} = 2M < +\infty.$$

$\square$

È quasi immediato il seguente teorema:

Teorema V.9 *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora la sua trasformata di Fourier $\hat{f} \in \mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Per $j, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ si ha

$$\xi^j \hat{f}^{(k)}(\xi) = (i)^k \xi^j \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{ix\xi} f(x)\, dx = (i)^{j+k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\frac{d}{dx}\right)^j \{x^k f(x)\} dx,$$

dove sono stati applicati i teoremi V.6 e V.7. Quindi

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^m |\hat{f}^{(k)}(\xi)| &\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |\xi|^j |\hat{f}^{(k)}(\xi)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^j \{x^k f(x)\} \right| dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\min(j,k)} \binom{j}{r} \times \\ &\times k(k-1)\ldots(k-[j-r]+1)|x|^{k-[j-r]} |f^{(r)}(x)|\, dx < +\infty.\end{aligned}$$

Quindi la funzione $(1+|\xi|)^m \hat{f}^{(k)}(\xi)$ è limitata in $\xi \in \mathbb{R}$. Poichè è limitata anche la funzione $(1+|\xi|)^{m+1} \hat{f}^{(k)}(\xi)$, segue che $(1+|\xi|)^m \hat{f}^{(k)}(\xi)$ tende a zero se $\xi \to \pm\infty$, qualunque siano $m, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Di conseguenza, $\hat{f} \in \mathcal{S}$. $\Box$

Introduciamo una topologia in $\mathcal{S}$ che rende continua la trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Prima osserviamo che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale complesso nel senso che $\lambda f \pm \mu g \in \mathcal{S}$ se $f, g \in \mathcal{S}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Purtroppo non si riesce a cambiare $\mathcal{S}$ in uno spazio di Banach o di Hilbert, introducendo un'opportuna norma o un opportuno prodotto scalare. Invece possiamo definire in $\mathcal{S}$ una metrica completa.

Per ogni coppia di interi non negativi m e k, definiamo la seguente seminorma:[5]

$$\|f\|_{m,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^m |f^{(k)}(x)|.$$

Si dice che una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}$ converge ad una funzione $f \in \mathcal{S}$ se per ogni coppia di interi non negativi m e k si ha

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{m,k} = 0. \tag{V.13}$$

[5]Una seminorma $\|\cdot\|$ in uno spazio vettoriale $\mathcal{M}$ è una funzione $\|\cdot\| : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ con le seguenti proprietà: 1) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ per $f, g \in \mathcal{M}$, 2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ per $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{M}$. In generale, una seminorma non ha la seguente terza proprietà che la rende una norma: 3) $\|f\| = 0$ se e solo se $f = 0$.

In parole, $f_n \to f$ in $\mathcal{S}$ se e solo se, per ogni coppia di interi non negativi m e k, $(1+|x|)^m f_n^{(k)}(x)$ tende a $(1+|x|)^m f^{(k)}(x)$ uniformemente in $x \in \mathbb{R}$.

Teorema V.10 *La trasformazione di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è continua.*

Dimostrazione. Durante la dimostrazione della Proposizione V.8 abbiamo trovato la seguente stima:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^m |f^{(k)}(x)|\, dx \leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^{m+2} |f^{(k)}(x)|, \tag{V.14}$$

dove $m, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Utilizzando la stima contenuta nella dimostrazione del Teorema V.9, si ha:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|)^m |\hat{f}^{(k)}(\xi)| &\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |\xi|^j |\hat{f}^{(k)}(\xi)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^j \{x^k f(x)\} \right| dx \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} \sum_{r=0}^{\min(j,k)} \binom{m}{j} \binom{j}{r} \frac{k!}{(k-j+r)!} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{k-j+r} |f^{(r)}(x)|\, dx \\
&\leq 2 \sum_{j=0}^{m} \sum_{r=0}^{\min(j,k)} \binom{m}{j} \binom{j}{r} \frac{k!}{(k-j+r)!} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^{k-j+r+2} |f^{(r)}(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Quindi, se $f_n \to f$ in $\mathcal{S}$, allora $(1+|\xi|)^m |\hat{f}_n^{(k)}(\xi) - \hat{f}^{(k)}(\xi)|$ tende a zero uniformemente in $\xi \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, $\hat{f}_n \to \hat{f}$ in $\mathcal{S}$. $\square$

Appendice A

Integrazione secondo Lebesgue

L'integrale di Riemann non basta per studiare la fisica matematica, grazie alle sua pessime proprietà di convergenza. D'altra parte, l'integrale di Lebesgue copre tutte le applicazioni di fisica matematica ma non è facile da introdurre in poco tempo. Fortunatamente lo studio degli insiemi di Borel e delle funzioni misurabili secondo Borel ci permette a generalizzare il concetto di integrale abbastanza ma a farlo in tempi ragionevoli.

1 Insiemi di Borel

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è detto *insieme di Borel* se appartiene alla famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ più piccola ottenuta dagli insiemi aperti applicando le seguenti operazioni: 1) unione finita o numerabile, 2) intersezione finita o numerabile, e 3) complementazione [cioè l'operazione $B \mapsto \mathbb{R}^n \setminus B$]. È chiaro che tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono di Borel. Per $n = 1$ gli intervalli $[a, b) = \cap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ sono di Borel.

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, dove $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $a_1 < b_1$, $\ldots$, $a_n < b_n$. Allora

$$m([a, b)) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

è la *misura* del pluriintervallo $[a, b)$. Per un'unione finita o numerabile E di pluriintervalli due a due disgiunti si definisce la sua misura $m(E)$ come la somma delle misure dei pluriintervalli, possibilmente con $m(E) = +\infty$. Allora $m([a, \infty)) = +\infty$, dove $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > a_1, \ldots, x_n > a_n\}$. Siccome tutte le palle $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < \varepsilon\}$ sono unioni numerabili due a due disgiunti di pluriintervalli, anche la misura di $B_\varepsilon(a)$ si può calcolare. Osservando ora che tutti gli aperti sono unioni finite o numerabili di palle, si può estendere la misura a qualsiasi sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sia Σ la cosiddetta σ-algebra degli insiemi di Borel in $\mathbb{R}^n$, dove σ-algebra vuol dire una famiglia di sottoinsiemi chiusa rispetta all'unione finita e numerabile, all'intersezione finita e numerabile e alla complementazione che contiene l'insieme vuoto e $\mathbb{R}^n$ stesso, insieme con la misura di Borel. Questa misura ha le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Borel due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme di Borel e
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi di Borel, allora
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

Purtroppo la σ-algebra degli insiemi di Borel ha la proprietà che non tutti i sottoinsiemi degli insiemi di Borel di misura zero sono di Borel. Per questo motivo la σ-algebra di Borel viene estesa a quella di Lebesgue: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice *misurabile* (*secondo Lebesgue*) se esiste un insieme di Borel B tale che la cosiddetta differenza simmetrica $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è un sottoinsieme di un insieme di Borel di misura zero. In tal caso si definisce come la misura $m(A)$ quella dell'insieme di Borel B. Si può dimostrare che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una σ-algebra con le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme misurabile e
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi misurabili, allora
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

È molto difficile individuare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che non è misurabile. Dall'assioma di scelta segue la sua esistenza.[1] Purtroppo esistono altri assiomi della teoria degli insiemi che conducono ad una situazione in cui ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è misurabile.

2 Integrale di Lebesgue

Si dice *funzione semplice* una funzione complessa φ definita in $\mathbb{R}^n$ che ha soltanto un numero finito di valori e per cui tutti gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c\}$, per $0 \neq c \in \mathbb{C}$, sono misurabili di misura finita. Essendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i valori diversi della funzione semplici φ, si ha

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{E_j}(x) = \begin{cases} \lambda_j, & x \in E_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^{m} E_j, \end{cases}$$

dove $E_1, \ldots, E_m$ sono insiemi misurabili di misura finita disgiunti due a due e χ_E è la funzione caratteristica di E (cioè, $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, e $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$). Come *integrale di Lebesgue* si definisce

$$\int \varphi(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j m(E_j).$$

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice misurable se per ogni insieme di Borel E in $\mathbb{C}$ l'immagine inversa

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$$

è misurabile. In particolare, le funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili.

Le funzioni misurabili hanno le seguenti proprietà:

1. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $f + g$ e $f - g$ sono misurabili.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora λf è misurabile.

[1] Dim: La relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ è una relazione di equivalenza in $[0, 1)$ che suddivide $[0, 1)$ in classi di equivalenza. Applicando l'Assioma di Scelta, sia E un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Allora, per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $E_q \stackrel{\text{def}}{=} [(q + E) \cap [0, 1)] \cup [(q - 1 + E) \cap [0, 1)]$ è un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Se E fosse misurable, lo sarebbe anche E_q per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. In tal caso la misura di E_q non dipenderebbe da q, mentre $\cup_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} E_q = [0, 1)$. Quindi sia l'ipotesi $m(E) = 0$ che quella $m(E) > 0$ condurebbe alla contraddizione che $m([0, 1)) \in \{0, +\infty\}$. Di conseguenza, E non può essere misurabile.

3. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora fg è misurabile.

4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora il prodotto di composizione $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile.

5. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f| = \max(f, -f)$, $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$ sono misurabili.

6. Se $f_1, f_2, \ldots$ sono misurabili e $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, allora f è misurabile.

Definiamo ora l'integrale di Lebesgue per le funzioni misurabili non negative. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ misurabile e non negativa. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici non negative $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tali che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (tranne in un sottoinsieme di misura zero). In tal caso la successione degli integrali di Lebesgue $\int f_n(x)\, dx$ è crescente e il suo limite (che potrebbe essere uguale a $+\infty$) si definisce come l'integrale di Lebesgue della f:

$$\int f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx.$$

Nel seguente teorema i valori degli integrali possono essere uguali a $+\infty$.

Teorema A.1 (Beppo-Levi) *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative. Sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx.$$

Passiamo ora all'integrazione delle funzioni a valori reali. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo $f_\pm = \max(\pm f, 0)$. Allora $f_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ sono misurabili e non negative e $f_+ - f_- = f$. Poniamo ora

$$\int f(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x)\, dx - \int f_-(x)\, dx & \text{se ambedue gli integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\, dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x)\, dx < +\infty, \\ -\infty & \text{se } \int f_+(x)\, dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x)\, dx = +\infty, \\ \text{non esistente} & \text{se } \int f_+(x)\, dx = \int f_-(x)\, dx = +\infty. \end{cases}$$

Inoltre,

$$\int |f(x)|\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x)\,dx + \int f_-(x)\,dx & \text{se ambedue gli integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx = +\infty, \\ \text{non definito} & \text{se } \int f_+(x)\,dx = \int f_-(x)\,dx = +\infty. \end{cases}$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *sommabile* se ambedue gli integrali $\int f_\pm(x)\,dx$ sono finiti.

Per definire gli integrali delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, si osservi prima che $\operatorname{Re} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono misurabili. In tal caso, se sono definiti ambedue gli integrali $\int \operatorname{Re} f(x)\,dx$ e $\int \operatorname{Im} f(x)\,dx$ finiti, allora

$$\int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice sommabile se è finito l'integrale della funzione $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$.

L'integrale di Lebesgue ha le seguenti proprietà:

1. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.
2. $\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$,
3. $|\int f(x)\,dx| \le \int |f(x)|\,dx$.
4. Se $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura zero, allora $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$.

L'ultima proprietà è di estrema importanza per capire l'integrale di Lebesgue: Il suo valore non si cambia se la funzione viene modificata su un insieme di misura zero. Due funzione f, g come nella proprietà 4 si dicono *quasi uguali.* Oppure: Si dice che $f(x) = g(x)$ *quasi ovunque.*

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \to \mathbb{C}$ si dice misurabile se la sua estensione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

è misurabile. In tal caso

$$\int_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \tilde{f}(x)\chi_E(x)\,dx,$$

dove $\chi_E(x) = 1$ per $x \in E$ e $\chi_E(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Discutiamo ora il seguente esempio illustrativo.

Esempio A.2 Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Allora la f è continua per $x \geq 0$ e quindi misurabile. Vale l'integrale di Riemann generalizzata

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Purtroppo questo integrale non è un integrale di Lebesgue. Infatti,

$$f_+(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & 2(n-1)\pi \leq x \leq (2n-1)\pi, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin(x)}{x}, & (2n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Osservando che

$$\int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \sin(x)\,dx = -\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin(x)\,dx = 1,$$

si vede facilmente che

$$\int f_+(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\pi} = +\infty,$$

$$\int f_-(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} = +\infty.$$

Quindi $\int f(x)\,dx$ non esiste nel senso di Lebesgue.

3 Alcuni Teoremi Importanti

Il seguente risultato riguarda lo scambio tra limite e integrazione.

Teorema A.3 (della convergenza dominata, di Lebesgue) *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni misurabili tali che*

a. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *per quasi ogni* x, *b. per $n = 1,2,3,\dots$ si ha $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni x, dove g è sommabile.*

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

La seconda condizione è assolutamente necessaria.

Esempio A.4 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = \phi(x-n)$, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n(x)\,dx}_{\text{sempre uguale ad } 1} = 1, \qquad \int \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\text{uguale a } 0 \text{ q.o.}} dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Esempio A.5 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\phi(0) > 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x\phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = n\phi(nx)$, si vede subito che $f_n(x) \to 0$ per $x \neq 0$ e $f_n(0) \to +\infty$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n(x)\,dx}_{\text{sempre uguale ad } 1} = 1, \qquad \int \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\text{uguale a } 0 \text{ q.o.}} dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Il Teorema della Convergenza Dominata è fondamentale e ha molti corollari di importanza. Per esempio, sia $f(\cdot,\xi) : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile che depende in modo continuo dal parametro $\xi \in \Omega$. Allora $\int f(x,\xi)\,dx$ depende in modo continuo da $\xi \in \Omega$ **se esiste una funzione sommabile** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ **tale che** $|f(x,\xi)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\xi \in \Omega$. Infatti, scegliendo $\eta \in \Omega$, basterebbe considerare una successione in $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ in Ω convergente ad η e la successione di funzioni $f_n(x) = f(x,\eta_n)$ per $n = 1,2,3,\dots$ per dimostrare il corollario.

L'ultimo risultato riguarda il cambio dell'ordine di integrazione.

Teorema A.6 (Fubini) *Sia* $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$, *scritta come funzione di* $z = (x, y)$ *con* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ *e* $z \in \mathbb{R}^{n+m}$, *misurabile e non negativa, oppure sommabile. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dx \right) dy. \quad \text{(A.1)}$$

In particolare, la (A.1) *vale nei seguenti casi:*

1. *almeno uno degli integrali* $\int \int |f(x, y)|\, dy\, dx$ *e* $\int \int |f(x, y)|\, dx\, dy$ *è finito.*

2. *La* f *è non negativa quasi ovunque.*

Appendice B

Esempi

Si dimostra facilmente la seguente tesi: Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $f'(z_0) \neq 0$ per un opportuno $z_0 \in \Omega$. Allora esistono un intorno U di $f(z_0)$ e una funzione analitica $g : U \to \mathbb{C}$ tali che $g(f(z)) = z$ per $z \in f^{-1}[U]$ e $f(g(w)) = w$ per $w \in U$.

Esempio B.1 Applichiamo la tesi alla funzione analitica

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

attorno al punto $z_0 = 0$. La funzione esponenziale ha la proprietà $e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta$, mentre

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\} = \{2im\pi : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Quindi, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, esiste una corrispondenza biunivoca tra la striscia verticale

$$\{z \in \mathbb{C} : (2m-1)i\pi < \operatorname{Re} z < (2m+1)i\pi\}$$

e il piano complesso tagliato lungo l'asse reale negativo

$$U = \{w \in \mathbb{C} : w \notin \mathbb{R}\} \cup (0, +\infty).$$

La funzione inversa, detta funzione logaritmica principale,

$$g(w) = \log(w)$$

viene definita sull'insieme U tale che

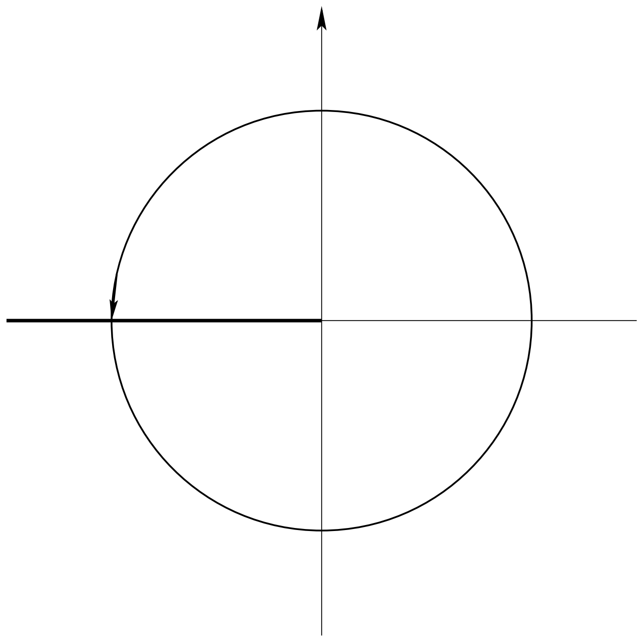
$$g[U] = \{z \in \mathbb{C} : -i\pi < \operatorname{Re} z < i\pi\}.$$

In tal caso $g(w) = \log(w)$ ha gli stessi valori del solito logaritmo naturale se w è reale e positivo. Per $w = \rho e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, abbiamo

$$g(w) = \log(\rho) + i\theta,$$

essendo reale il numero $\log(\rho)$.

Il punto $w = 0$ si dice *punto di diramazione* della funzione logaritmica.



Esempio B.2 Consideriamo la funzione analitica

$$f(z) = z^2.$$

attorno al punto $z_0 = 1$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra il semipiano destro

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$$

e il piano complesso tagliato lungo l'asse reale negativo

$$U = \{w \in \mathbb{C} : w \notin \mathbb{R}\} \cup (0, +\infty).$$

La funzione inversa, detta radice quadrata principale,

$$g(w) = \sqrt{w}$$

viene definita sull'insieme U tale che

$$g[U] = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}.$$

In tal caso $g(w) = \sqrt{w}$ ha valori positivi se w è reale e positivo. Per $w = \rho e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, abbiamo

$$g(w) = \sqrt{w} = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2},$$

essendo positivo il numero $\sqrt{\rho}$.

Il punto $w = 0$ si dice *punto di diramazione* della radice quadrata principale.

Esempio B.3 Consideriamo, per $n = 3, 4, 5, \ldots$, la funzione analitica

$$f(z) = z^n.$$

attorno al punto $z_0 = 1$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra il settore

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

e il piano complesso tagliato lungo l'asse reale negativo

$$U = \{w \in \mathbb{C} : w \notin \mathbb{R}\} \cup (0, +\infty).$$

La funzione inversa, detta radice quadrata principale,

$$g(w) = \sqrt[n]{w}$$

viene definita sull'insieme U tale che

$$g[U] = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

In tal caso $g(w) = \sqrt[n]{w}$ ha valori positivi se w è reale e positivo. Per $w = \rho e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, abbiamo

$$g(w) = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\theta/n},$$

essendo positivo il numero $\sqrt[n]{\rho}$.

Il punto $w = 0$ si dice *punto di diramazione* della radice n-esima principale.

Esempio B.4 Consideriamo ora la funzione

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z+1}\,\sqrt{z-1}$$

pensata come prodotto di due funzioni analitiche sull'intersezione dei loro domini. Definiamo

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1/2}, \quad z = -1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, \qquad -\pi < \theta_1 < \pi, \\ f_2(z) &= \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2/2}, \quad z = 1 + \rho_2 e^{i\theta_2}, \qquad 0 < \theta_2 < 2\pi, \end{aligned}$$

essendo positivi ρ_1 e ρ_2. In tal caso $f(z) = f_1(z) f_2(z)$ viene definita per ciascuna $z \in \mathbb{C}$, con l'eccezione dei tagli $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Se invece definiamo

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1/2}, \quad z = -1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, \qquad 0 < \theta_1 < 2\pi, \\ f_2(z) &= \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2/2}, \quad z = 1 + \rho_2 e^{i\theta_2}, \qquad 0 < \theta_2 < 2\pi, \end{aligned}$$

dove sono positivi ρ_1 e ρ_2, la funzione $f(z) = f_1(z) f_2(z)$ viene definita per ciascuna $z \in \mathbb{C}$, con l'eccezione del taglio $[-1, 1]$.

Ci sono due punti di diramazione: $z = -1$ e $z = 1$.

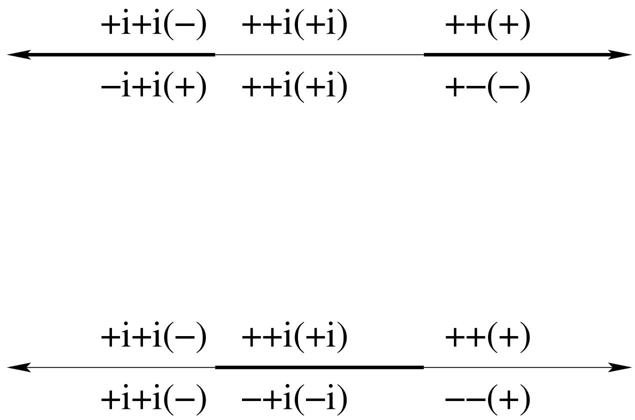


Figura B.1: Indicazione dei valori di $f_1(z)$, $f_2(z)$ e $f(z)$ sopra e sotto il taglio, per il primo esempio e poi per il secondo.

Bibliografia

[1] M.J. Ablowitz and A.S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, Second ed., Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.

[3] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable* II, Graduate Texts in Mathematics **159**, Springer, Berlin, 1995.

[4] Enrico Giusti, *Analisi Matematica* 1-2 (due volumi), Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[5] B.Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Transl. Math. Monographs **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.

[6] A.I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vols. 1-3, Chelsea Publ., New York, 1965.

[7] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third ed., McGraw-Hill, New York, 1976. Esiste la traduzione italiana.

[8] Sebastiano Seatzu, *Dispense di Matematica Applicata*, Cap. I: *Analisi Complessa*, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari, 2007.

[9] William T. Shaw, *Recovering holomorphic functions from their real or imaginary parts without the Cauchy-Riemann equations*, SIAM Review **46**(4), 717–728 (2004).