# FUNZIONI ANALITICHE ED APPLICAZIONI

Corso di 6 Crediti
Laurea Specialistica in Matematica
A.A. 2008-2009


Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 335-5287988 (cell.)
Skype: cornelis110553

cornelis@krein.unica.it
http:\\krein.unica.it\~cornelis
http:\\bugs.unica.it\~cornelis

# Indice

# Capitolo I

# Funzioni Analitiche

In questo capitolo introduciamo i concetti di base sulla funzioni analitiche e armoniche e dimostriamo i principali teoremi. In particolare vengono dimostrate le varie versioni del Teorema di Cauchy. Inoltre discutiamo le sue principali proprietà elementari quali il principio del massimo, il Teorema di Liouville e l'indice di una curva.

## 1 Differenziabilità e Analiticità

Sia $\Omega$ un sottoinsieme aperto (o semplicemente aperto) del piano complesso $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. Allora la $f$ si dice *differenziabile* in $z_0 \in \Omega$ se esiste finito il limite

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{I.1}$$

Il limite $f'(z_0)$ si chiama la *derivata* della $f$ in $z_0$. Ovviamente una funzione derivabile in $z_0$ è continua in $z_0$, poichè

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)| = \left( \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \right) \cdot \left( \lim_{z \to z_0} |z - z_0| \right) = |f'(z_0)| \cdot 0 = 0.$$

Contrariamente al caso della derivazione delle funzioni definite su un intervallo, è complesso il numero $h$ che appare nella definizione (I.1).

Scegliendo $h \in \mathbb{R}$ oppure $h \in i\mathbb{R}$ nella (I.1), ne seguono le cosiddette equazioni di Cauchy-Riemann. Infatti, per $f = u + iv$ ($u, v$ funzioni reali) e $z = x + iy$ risulta

$$f'(z_0) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)}_{\text{scegliendo } h \in \mathbb{R}} = \underbrace{-i \left( \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \right)}_{\text{scegliendo } h \in i\mathbb{R}}.$$

Quindi valgono le *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{I.2}$$

Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$. Allora $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *analitica* se $f$ è differenziabile in ogni punti $z_0 \in \Omega$ e la sua derivata $f'$ è continua. Una funzione complessa $f$ si dice *analitica in* $z_0$ se esiste un intorno di $z_0$ in cui è analitica.

**Teorema I.1 (Derivazione della funzione composta)** *Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ funzioni analitiche e sia $f[\Omega] \subset \tilde{\Omega}$. Allora $g \circ f$ è analitica su $\Omega$ e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \qquad z \in \Omega.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema soltanto sotto l'ipotesi che esista $\varepsilon > 0$ tale che $f(z) \neq f(z_0)$ per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Ciò è ovviamente vero se $f'(z_0) \neq 0$. Se la $f$ fosse costante, lo sarebbe anche la $g \circ f$, implicando il teorema.

Quindi supponiamo che $f(z) \neq f(z_0)$ per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Se $0 < |h| < \varepsilon$, allora $f(z_0 + h) \neq f(z_0)$ e

$$\frac{(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0)}{h} = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Siccome $\lim_{h\to 0} [f(z_0 + h) - f(z_0)] = 0$ per la continuità della $f$ in $z_0$, allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0)}{h} = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

□

Dimostriamo ora la seguente proprietà.

**Proposizione I.2** *Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differenziabile e $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$. Allora la $f$ è costante.*

*Dimostrazione.* Fissando $z_0 \in \Omega$ poniamo $A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$. Dimostreremo che $A$ è aperto e chiuso in $\Omega$, implicando che $A = \Omega$.

Sia $z \in \Omega$ e sia $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione in $A$ con limite $z$. Allora $f(z_n) = f(z_0)$ per $n = 1, 2, \cdots$. Per la continuità della $f$ in $z$ ne segue che $f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$, cioè $z \in A$. Di conseguenza, $A$ è chiuso in $\Omega$.

Ora prendiamo un punto $w \in \Omega$ e scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che la palla aperta $B_\varepsilon(w) = \{z \in \Omega : |z - w| < \varepsilon\} \subset \Omega$. Per $z \in B_\varepsilon(w)$ qualsiasi si pone $g(t) = f(tz + (1 - t)w)$, $0 \leq t \leq 1$. Allora

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} = \frac{g(t) - g(s)}{(t - s)z + (s - t)w} \cdot \frac{(t - s)z + (s - t)w}{t - s}.$$

Dunque per $t \to s$ abbiamo

$$\lim_{t \to s} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} = f'(sz + (1-s)w) \cdot (z - w) = 0,$$

ossia $g'(s) = 0$ per $0 \le s \le 1$, implicando che la $g$ è costante. Quindi $f(z) = g(1) = g(0) = f(w) = f(z_0)$, cioè $B_\varepsilon(w) \subset A$. In altre parole, abbiamo dimostrato che $A$ è aperto (in $\Omega$).

Siccome $A$ è aperto e chiuso in $\Omega$ e $z_0 \in A$, ne risulta $A = \Omega$, grazie al fatto che $\Omega$ è connesso. □

# 2 Trasformazioni di Möbius

Siano $a, b, c, d$ quattro numeri complessi tali che $ad - bc \neq 0$. Allora la mappa

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{I.3}$$

si dice *trasformazione di Möbius*. Noi consideriamo la $S$ come una trasformazione del piano complesso esteso $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in se stesso.

**Proposizione I.3** *Le trasformazioni di Möbius costituiscono un gruppo non abeliano rispetto alla composizione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo le trasformazioni di Möbius

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad T(z) = \frac{ez + f}{gz + h},$$

dove $ad - bc \neq 0$ e $eh - fg \neq 0$. Allora

$$(T \circ S)(z) = T(S(z)) = \frac{e\dfrac{az + b}{cz + d} + f}{g\dfrac{az + b}{cz + d} + h} = \frac{(ae + cf)z + (be + df)}{(ag + ch)z + (bg + dh)},$$

dove

$$(ae + cf)(bg + dh) - (be + df)(ag + ch) = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0.$$

In altre parole, $(T \circ S)(z) = (pz + q)/(rz + s)$, dove

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Quindi $T \circ S$ è una trasformazione di Möbius. Nella stessa maniera dimostriamo che

$$S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

è una trasformazione di Möbius [poichè $da - (-b)(-c) \neq 0$] tale che $S^{-1} \circ S$ e $S \circ S^{-1}$ coincidono con la trasformazione identità (che è trasformazione di Möbius, per $a = d = 1$ e $b = c = 0$). □

Due trasformazioni di Möbius,

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

sono identiche se e solo se esiste $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha = \lambda a$, $\beta = \lambda b$, $\gamma = \lambda c$ e $\delta = \lambda d$.

Ci sono alcune trasformazioni di Möbius particolari: la *traslazione* $S(z) = z + p$, la *dilation* $S(z) = \lambda z$ per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, la *rotazione* $S(z) = e^{i\theta} z$ per $\theta \in \mathbb{R}$, e l'*inversione* $S(z) = (1/z)$. Le traslazioni, le dilation e le rotazioni costituiscono sottogruppi abeliani del gruppo di Möbius. L'inversione più l'identità costituiscono un sottogruppo di ordine 2.

**Proposizione I.4** *Ogni trasformaziome di Möbius è il prodotto di traslazioni, dilation e inversioni, dove alcuni fattori potrebbero mancare.*

*Dimostrazione.* Sia $S$ la trasformazione di Möbius definita dalla (I.3).

Se $c = 0$ e quindi $ad \neq 0$, allora $S = S_2 \circ S_1$, dove $S_1(z) = (a/d)z$ è una dilation e $S_2(z) = z + (b/d)$ è una traslazione.

Se $c \neq 0$, allora $S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, dove $S_1(z) = z + (d/c)$ è una traslazione, $S_2(z) = (1/z)$ è un'inversione, $S_3(z) = ((bc - ad)/c^2)z$ è una dilation e $S_4(z) = z + (a/c)$ è una traslazione. □

I punti fissi della trasformazione di Möbius (I.3) [cioè gli $z$ per cui $S(z) = z$] sono le soluzioni dell'equazione

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Di conseguenza, la $S$ ha al massimo due punti fissi, almeno che la $S$ non sia l'identità.

Ora sia $S$ una trasformazione di Möbius, $a, b, c$ tre punti diversi di $\mathbb{C}_\infty$, e $\alpha = S(a)$, $\beta = S(b)$ e $\gamma = S(c)$. Sia $T$ un'altra trasformazione di Möbius con le stesse proprietà. Allora $T^{-1} \circ S$ ha $a, b, c$ come tre punti fissi diversi e dunque coincide con l'identità. Di conseguenza $T = S$. In altre parole, una trasformazione di Möbius viene determinata in modo unico dalla sua azione su tre punti in $\mathbb{C}_\infty$.

Siano $z_2, z_3, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ tre punti diversi. Definiamo

$$S(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{z - z_3}{z - z_4}\right) / \left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right), & \{z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbb{C}, \\ \dfrac{z - z_3}{z - z_4}, & z_2 = \infty, \\ \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4}, & z_3 = \infty, \\ \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}, & z_4 = \infty. \end{cases}$$

Allora $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$ e $S(z_4) = \infty$, mentre la $S$ è l'unica trasformazione di Möbius che ha tali proprietà. Scrivendo $\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4)$ per l'immagine di $z_1$ sotto la $S$, si ha

$$\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sigma(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \tag{I.4}$$

per una trasformazione di Möbius $T$ qualsiasi. Infatti, se $S(z) = \sigma(z, z_2, z_3, z_4)$ e $M = S \circ T^{-1}$ (ambedue trasformazioni di Möbius), allora $M(T(z_2)) = 1$, $M(T(z_3)) = 0$ e $M(T(z_4)) = \infty$ e dunque

$$(S \circ T^{-1})(z) = \sigma(z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

per ogni $z \in \mathbb{C}_\infty$. Per $z = z_1$ ne segue l'affermazione.

**Corollario I.5** *Se $z_2, z_3, z_4$ sono tre punti diversi di $\mathbb{C}_\infty$ e $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ sono tre punti diversi di $\mathbb{C}_\infty$, allora esiste un'unica trasformazione di Möbius tale che $S(z_2) = \omega_2$, $S(z_3) = \omega_3$ e $S(z_4) = \omega_4$.*

*Dimostrazione.* Siano $T(z) = \sigma(z, z_2, z_3, z_4)$ e $M(z) = \sigma(z, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Allora $S = M^{-1} \circ T$ ha tutte le proprietà che si vogliono. Se ci fosse un'altra trasformazione di Möbius con le stesse proprietà, allora $R^{-1} \circ S$ avrebbe i tre punti fissi diversi $z_2, z_3, z_4$ e dovrebbe coincidere con l'identità. □

Sotto la nostra terminologia una retta è una circonferenza che passa per il punto $\infty$. In tal caso tre punti diversi in $\mathbb{C}_\infty$ determinano una circonferenza in modo unico.

**Proposizione I.6** *I quattro punti diversi $z_1, z_2, z_3, z_4$ di $\mathbb{C}_\infty$ appartengono alla stessa circonferenza se e solo se $\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Sia $S$ la trasformazione di Möbius definita da $S(z) = \sigma(z, z_2, z_3, z_4)$. Allora $S^{-1}[\mathbb{R}] = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \sigma(z, z_,z_3, z_4) \in \mathbb{R}\}$. Basta dimostrare che l'immagine della retta estesa $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sotto una trasformazione di Möbius è una circonferenza.

Sia $S$ la trasformazione di Möbius (I.3). Se $x \in \mathbb{R}$ e $x = S(\omega)$, allora $S(\omega) = x = \overline{x} = \overline{S(\omega)}$. Cioè,

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{\overline{a\omega} + \overline{b}}{\overline{c\omega} + \overline{d}}.$$

Multiplicando le due parti dai denominatori otteniamo

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|\omega|^2 + (a\overline{d} - \overline{b}c)\omega + (b\overline{c} - \overline{a}d)\overline{\omega} + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0. \tag{I.5}$$

Se $a\overline{c} \in \mathbb{R}$, allora $a\overline{c} - \overline{a}c = 0$; ponendo $\alpha = 2(a\overline{d} - \overline{b}c)$ e $\beta = i(b\overline{d} - \overline{b}d)$ e moltiplicando la (I.5) da $i$, otteniamo $0 = \mathrm{Im}(\alpha\omega) - \beta = \mathrm{Im}(\alpha\omega - \beta)$, poichè $\beta \in \mathbb{R}$. Cioè, $\omega$ appartiene alla retta $\{\zeta \in \mathbb{C} : \alpha\zeta - \beta \in \mathbb{R}\}$. Se $a\overline{c}$ non è reale, allora la (I.5) diventa

$$|\omega|^2 + \overline{\gamma}\omega + \gamma\overline{\omega} - \delta = 0$$

per opportune costanti $\gamma \in \mathbb{C}$ e $\delta \in \mathbb{R}$. Quindi $|\omega + \gamma| = \lambda$, dove

$$\lambda = (|\gamma|^2 + \delta)^{1/2} = \left|\frac{ad - bc}{\overline{a}c - a\overline{c}}\right| > 0.$$

Quest'ultima equazione rappresenta una circonferenza. □

**Teorema I.7** *Una trasformazione di Möbius trasforma circonferenze in circonferenze.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ una circonferenza e sia $S$ una trasformazione di Möbius. Siano $z_2, z_3, z_4$ tre punti diversi di $\Gamma$ e sia $\omega_j = S(z_j)$ per $j = 2, 3, 4$. Allora $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ determinano un'unica circonferenza $\Gamma'$. Allora $S[\Gamma] = \Gamma'$. Infatti, per ogni $z \in \mathbb{C}_\infty$ si ha [Vedi la (I.4)]

$$\sigma(z, z_2, z_3, z_4) = \sigma(Sz, \omega_2, \omega_3, \omega_4). \tag{I.6}$$

Secondo la Proposizione I.6, $z \in \Gamma$ se e solo se la parte a sinistra della (I.6) è reale, mentre $Sz \in \Gamma'$ se e solo se la parte a destra della (I.6) è reale. In altre parole, $z \in \Gamma$ se e solo se $Sz \in \Gamma'$. □

**Corollario I.8** *Per ogni coppia di circonferenze $\Gamma$ e $\Gamma'$ in $\mathbb{C}_\infty$ esiste una trasformazione di Möbius $T$ tale che $T[\Gamma] = \Gamma'$.*

Ora studiamo il comportamento delle parti interna ed esterna di una circonferenza sotto l'effetto di una trasformazione di Möbius.

**Definizione I.9** Sia $\Gamma$ la circonferenza che contiene i tre punti diversi $z_2, z_3, z_4$ in $\mathbb{C}_\infty$. Allora i punti $z, z^*$ in $\mathbb{C}_\infty$ si dicono *simmetrici* rispetto a $\Gamma$ se e solo se

$$\sigma(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{\sigma(z, z_2, z_3, z_4)}.$$

Questa definizione dipende soltanto da $\Gamma$ e non dalla scelta dei tre punti $z_2, z_3, z_4$.

Il punto $z$ è simmetrico a se stesso rispetto a $\Gamma$ se e solo se $z \in \Gamma$.

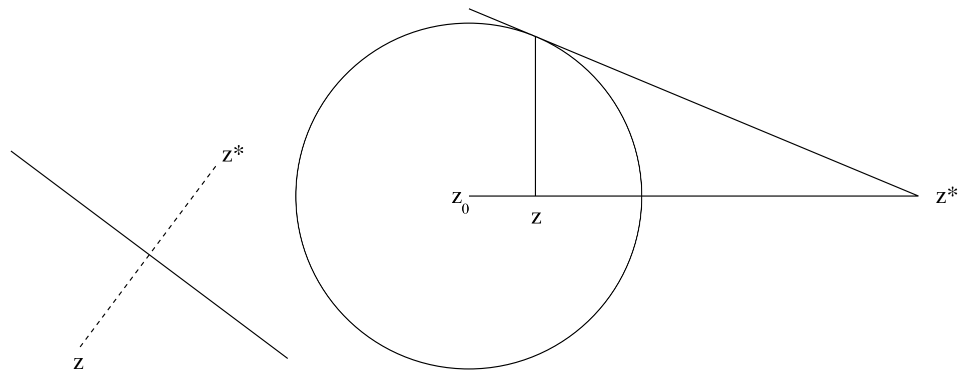



Figura I.1: Due punti simmetrici $z$ e $z^*$, prima rispetto ad una retta, poi rispetto ad una circonferenza.

Nel caso in cui $\Gamma$ è una retta, scegliamo $z_4 = \infty$ tra i tre punti. In tal caso il punto $z^*$ è simmetrico a $z$ rispetto a $\Gamma$ se e solo se

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}},$$

cioè $|z^* - z_3| = |z - z_3|$ per ogni punto finito $z_3 \in \Gamma$. Inoltre,

$$\mathrm{Im}\,\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \mathrm{Im}\,\frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}} = -\mathrm{Im}\,\frac{z - z_3}{z_2 - z_3},$$

cioè $z$ e $z^*$ appartengono ai due semipiani diversi determinati da $\Gamma$. Di conseguenza, il segmento $[z, z^*]$ è ortogonale alla retta $\Gamma$.

Supponiamo che $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ and che $z_2, z_3, z_4$ siano tre punti diversi di $\Gamma$. Allora

$$\begin{aligned}
\sigma(z^*, z_2, z_3, z_4) &= \overline{\sigma(z, z_2, z_3, z_4)} = \overline{\sigma(z - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0, z_4 - z_0)} \\
&= \sigma\left(\overline{z} - \overline{z_0}, \frac{R^2}{z_2 - z_0}, \frac{R^2}{z_3 - z_0}, \frac{R^2}{z_4 - z_0}\right) \\
&= \sigma\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}, z_2 - z_0, z_3 - z_0, z_4 - z_0\right) \\
&= \sigma\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0, z_2, z_3, z_4\right).
\end{aligned}$$

Quindi $z^* = z_0 + (R^2/(\overline{z} - \overline{z_0}))$ oppure $(z^* - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = R^2$. Dunque

$$\frac{z^* - z_0}{z - z_0} = \frac{R^2}{|z - z_0|^2} > 0.$$

**Teorema I.10 (Principio di simmetria)** *Se una trasformazione di Möbius $S$ trasforma la circonferenza $\Gamma_1$ nella circonferenza $\Gamma_2$, allora $S$ trasforma due punti simmetrici rispetto a $\Gamma_1$ in punti simmetrici rispetto a $\Gamma_2$.*

*Dimostrazione.* Siano $z_2, z_3, z_4$ tre punti diversi di $\Gamma_1$. Se $z, z^*$ sono simmetrici rispetto a $\Gamma_1$, allora

$$\begin{aligned}
&\sigma(S(z^*), S(z_2), S(z_3), S(z_4)) = \sigma(z^*, z_2, z_3, z_4) \\
&= \overline{\sigma(z, z_2, z_3, z_4)} = \overline{\sigma(S(z), S(z_2), S(z_3), S(z_4))}.
\end{aligned}$$

Quindi $S(z)$ e $S(z^*)$ sono simmetrici rispetto a $\Gamma_2$. □

Discutiamo ora l'orientamento delle circonferenze.

**Definizione I.11** Data una circonferenza $\Gamma$, un orientamento di $\Gamma$ è un triplo ordinato $(z_1, z_2, z_3)$ di tre punti diversi di $\Gamma$. Data un orientamento $(z_1, z_2, z_3)$ di $\Gamma$, i punti $z$ a destra di $\Gamma$ sono i punti $z$ che soddisfano $\operatorname{Im}\sigma(z, z_1, z_2, z_3) > 0$, mentre i punti $z$ a sinistra di $\Gamma$ sono quelli che soddisfano $\operatorname{Im}\sigma(z, z_1, z_2, z_3) < 0$.

**Teorema I.12 (Principio di orientamento)** *Siano $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ circonferenze e sia $S$ una trasformazione di Möbius tale che $S[\Gamma_1] = \Gamma_2$. Sia $(z_1, z_2, z_3)$ un orientamento di $\Gamma_1$. Allora la $S$ trasforma i punti a destra (sinistra) di $\Gamma_1$ in punti a destra (sinistra) di $\Gamma_2$.*

# 3 Teorema di Cauchy: Casi Elementari

Dimostriamo ora che una funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ può essere sviluppata in una serie di potenze attorno ad ogni punto $z_0 \in \Omega$.

**Proposizione I.13** *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *una funzione analitica e supponiamo che* $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset \Omega$*. Se* $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *allora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad |z - z_0| < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Considerando la regione $\Omega_1 = \{(z - z_0)/\varepsilon : z \in \Omega\}$ e la funzione $g(z) = f(z_0 + \varepsilon z)$ si vede facilmente che basterebbe limitarci al caso $z_0 = 0$ e $\varepsilon = 1$. In altre parole, supponiamo che $\overline{B_1(0)} \subset \Omega$.

Dobbiamo dimostrare che, per $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z}\, ds.$$

Cioè, dobbiamo dimostrare che

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z}\, ds - 2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right) ds.$$

Sia

$$\varphi(s, t) = \frac{f(z + t(e^{is} - z))e^{is}}{e^{is} - z} - f(z),$$

dove $t \in [0, 1]$ e $s \in [0, 2\pi]$. Siccome $|z + t(e^{is} - z)| = |z(1 - t) + e^{is}t| < 1$, la funzione $\varphi$ è ben definita e di classe $C^1$. Dunque $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, t)\, ds$ è di classe $C^1$.

Ora dimostriamo che $g(t)$ è costante e $g(0) = 0$, che implica che $g(1) = 0$ e quindi che vale la proposizione. Infatti,

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^{2\pi} \varphi(s, 0)\, ds = \int_0^{2\pi} \left( \frac{f(z)e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right) dz \\ &= f(z) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z}\, dz - 2\pi \right\} = 0. \end{aligned}$$

Poi per $0 < t \leq 1$ si ha

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} e^{is} f'(z + t(e^{is} - z))\, ds = \left[ -it^{-1} f(z + t(e^{is} - z)) \right]_{s=0}^{2\pi} = 0.$$

Quindi la continuità della $g$ in $t \in [0, 1]$ implica che $g(1) = g(0) = 0$. $\square$

Sia $|z - z_0| < \varepsilon$ e supponiamo che $|w - z_0| = \varepsilon$. Allora

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n,$$

dove $|(z-z_0)/(w-z_0)| < 1$.

**Teorema I.14** *Sia $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora per $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ e $\varepsilon \in (0, R)$, si ha*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \left( \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right), \qquad |z - z_0| < R,$$

*dove il raggio di convergenza della serie di potenze è almeno uguale ad $R$.*

*Dimostrazione.* Per $|z - z_0| < \varepsilon$ si calcoli

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

dove la convergenza assoluta della serie di potenze segue dalla stima

$$\frac{|f(w)|\, |z-z_0|^n}{|w-z_0|^{n+1}} \le \frac{\max\{|f(w)| : |w - z_0| = \varepsilon\}}{\varepsilon} \left( \frac{|z-z_0|}{\varepsilon} \right)^n.$$

□

Di conseguenza, una funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è infinitamente derivabile e può essere sviluppata in una serie di potenze attorno ad ogni punto $z_0 \in \Omega$ con raggio di convergenza $\ge \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Inoltre, in tal caso

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw,$$

dove $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ per qualunque $\varepsilon > 0$ inferiore a $\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Portando il valore assoluto sotto il segno dell'integrale e utilizzando $|w - z_0| = \varepsilon$, otteniamo la cosiddetta *stima di Cauchy*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\, M}{\varepsilon^n}, \qquad M = \max\{|f(w)| : |w - z_0| = \varepsilon\}.$$

Una curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \Omega$ si dice *rettificabile* se $\gamma$ è di variazione limitata, cioè se

$$L(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1 \right\} < +\infty.$$

Il numero $L(\gamma)$ si chiama la lunghezza della curva $\gamma$.

**Proposizione I.15 (Teorema di Cauchy)** *Sia $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $\gamma$ una curva chiusa e rettificabile in $B_R(z_0)$. Allora*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo ora che la $f$ ha una primitiva. Grazie al Teorema I.13 si ha $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ per $|z - z_0| < R$. Sia

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n+1} \right) (z - z_0)^{n+1} = (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n+1} \right) (z - z_0)^{n+1}.$$

Questa serie ha lo stesso raggio di convergenza della serie per la $f$ [cioè un numero $\geq R$], poichè $(n+1)^{1/n} \to 1$. Quindi la $F$ è definita in tutto il disco $B_R(z_0)$. Inoltre, $F'(z) = f(z)$ per $|z - z_0| < R$.

Sia ora $\gamma : [0,1] \to B_R(z_0)$ una parametrizzazione della curva $\gamma$ (che supponiamo di essere regolare a tratti), dove $\gamma$ è continua, $\gamma(0) = \gamma(1)$ e esistono $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tali che $\gamma$ è di classe $C^1$ in $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(w)\, dw &= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\
&= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} [F(\gamma(t))]_{t=t_{k-1}}^{t_k} = 0,
\end{aligned}$$

poichè $\gamma(t_0) = \gamma(t_m)$.

Infine, se $\gamma$ è rettificabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un poligono

$$\delta = [\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)],$$

dove $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ e $\gamma(0) = \gamma(1)$, tale che

$$\left| \int_\gamma f(w)\, dw - \int_\delta f(w)\, dw \right| < \varepsilon.$$

In tal caso $|\int_\gamma f(w)\, dw| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque $\int_\gamma f(w)\, dw = 0$. $\square$

# 4 Proprietà delle Funzioni Analitiche

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora $z_0 \in \Omega$ si dice *zero di ordine* $m$ della $f$ se esiste una funzione analitica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $g(z) = (z-z_0)^m g(z)$ per $z \in \mathbb{C}$ e $g(z_0) \neq 0$.

Una *funzione intera* è una funzione analitica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Quindi i polinomi sono funzioni intere. Altri esempi di funzioni intere sono $e^z$, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $z^{-\nu}J_\nu(z)$ e $1/\Gamma(z)$. Ogni funzione intera ammette uno sviluppo in serie di potenze con raggio di convergenza $+\infty$.

**Teorema I.16 (Liouville)** *Una funzione intera e limitata è costante.*

*Dimostrazione.* Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica e sia $|f(z)| \leq M$ per $z \in \mathbb{C}$. Allora

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-w|=R} \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2}\, dw \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi R}{R^2},$$

qualunque sia $R > 0$. Quindi $f'(z) = 0$ per $z \in \mathbb{C}$ e dunque la $f$ è costante. □

**Corollario I.17 (Teorema fondamentale dell'algebra)** *Un polinomio di grado $\geq 1$ ha almeno uno zero.*

*Dimostrazione.* Sia $p(z)$ un polinomio senza zeri e non costante. Allora $f(z) = 1/p(z)$ è una funzione intera tale che $f(z) \to 0$ se $|z| \to +\infty$. Il Teorema I.16 implica che la $f$ è costante e, in particolare, che $f(z) = 0$ per $z \in \mathbb{C}$, una contraddizione. □

Dal Corollario I.17 si vede subito [cioè per l'induzione matematica] che ogni polinomio non costante ha la forma

$$p(z) = c(z-z_1)^{\alpha_1} \ldots (z-z_m)^{\alpha_m},$$

dove gli zeri $z_1, \ldots, z_m$ sono numeri complessi diversi, $0 \neq c \in \mathbb{C}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono interi positivi.

**Teorema I.18** *Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Se l'insieme degli zeri $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ ha un punto di accumulazione all'interno di $\Omega$, allora $f(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

*Dimostrazione.* Sia $z_0 \in \Omega$ un punto di accumulazione dell'insieme degli zeri della $f$ e sia $B_R(z_0) \subset \Omega$. Allora la continuità della $f$ implica che $f(z_0) = 0$. Supponiamo ora che ci sia un intero $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Allora

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \qquad |z-z_0| < R.$$

Ponendo $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}$, si vede che $g : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ è analitica, $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ e $g(z_0) = a_n \neq 0$. Per motivi di continuità esiste $\varepsilon \in (0, R)$ tale che $g(z) \neq 0$ per $|z - z_0| < \varepsilon$. Purtroppo, siccome $z_0$ è un punto di accumulazione dell'insieme degli zeri della $f$, esiste $z_1$ tale che $0 < |z_1 - z_0| < \varepsilon$ e $f(z_1) = 0$. In tal caso $0 = (z_1 - z_0)^n g(z_1)$ e quindi $g(z_1) = 0$, una contraddizione. In altre parole, $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Sia $A = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \text{ per } n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Allora $A \neq \emptyset$. Inoltre, se $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione in $A$ con limite $z \in \Omega$, allora la continuità di ciascuna derivata successiva $f^{(n)}$ implica che anche $z \in A$. Quindi $A$ è chiuso in $\Omega$.

Per capire perchè $A$ è aperto (in $\Omega$), prendiamo $z_0 \in A$ e scegliamo $R > 0$ tale che $B_R(z_0) \subset \Omega$. Allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per $|z - z_0| < R$, dove $a_n = (n!)^{-1} f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dunque $f(z) = 0$ per ogni $z \in B_R(z_0)$, che implica che $B_R(z_0) \subset A$. In altre parole, $A$ è aperto (in $\Omega$).

Essendo chiuso (in $\Omega$), aperto e non vuoto, l'insieme $A$ deve per forza coincidere con $\Omega$, grazie al fatto che $\Omega$ è connesso. $\square$

**Corollario I.19** *Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{C}$. Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ due funzioni analitiche tali che l'insieme $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ ha almeno un punto di accumulazione in $\Omega$. Allora $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

*Dimostrazione.* Si applichi il Teorema I.18 alla funzione $h = f - g$. $\square$

**Corollario I.20** *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica non costante e sia $f(z_0) = 0$ per un opportuno $z_0 \in \Omega$. Allora esiste $R > 0$ tale che $f(z) \neq 0$ per $0 < |z - z_0| < R$.*

Il Corollario I.20 serve a completare la dimostrazione del Teorema I.1.

Secondo il seguente principio del massimo, una funzione analitica non costante in un aperto connesso non può assumere il massimo del suo valor assoluto all'interno dell'aperto.

**Teorema I.21 (Principio del massimo, versione I)** *Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tale che esiste $z_0 \in \Omega$ per cui $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ per ogni $z \in \Omega$. Allora la $f$ è costante.*

*Dimostrazione.* Sia $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ e sia $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it})\, dt.$$

Quindi

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{it})|\, dt \leq |f(z_0)|,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $|f(z_0 + \varepsilon e^{it})| \leq |f(z_0)|$ per $t \in [0, 2\pi]$. Dunque $|f(z_0)| = |f(z_0 + \varepsilon e^{it})|$ per $t \in [0, 2\pi]$. Quindi la $f$ manda il disco $B_\varepsilon(z_0)$ nella circonferenza $|z| = |f(z_0)|$. Utilizzando una trasformazione di Möbius $h$ dalla circonferenza alla retta reale si crea una funzione analitica $g = h \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $g[B_\varepsilon(z_0)] \subset \mathbb{R}$. Ponendo $g = u + iv$, le equazioni di Cauchy-Riemann (I.2) implicano che le derivate della $g$ rispetto a $x$ e $y$ si annullano. Quindi la $g$ è costante in $B_\varepsilon(z_0)$ e lo è anche la $f$ in $B_\varepsilon(z_0)$. Il Corollario I.19 poi implica che la $f$ è costante in tutto il dominio $\Omega$. $\square$

**Corollario I.22 (Principio del massimo, versione II)** *Siano $\Omega$ un aperto limitato in $\mathbb{C}$ e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $f|_\Omega$ è analitica. Allora*

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}.$$

**Corollario I.23 (Lemma di Schwarz)** *Sia $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tale che*

*a.* $|f(z)| \leq 1$ *per* $z \in \mathbb{D}$,

*b.* $f(0) = 0$.

*Then $|f'(0)| \leq 1$ e $|f(z)| \leq |z|$ per $z \in \mathbb{D}$. Inoltre, se $|f'(0)| = 1$ oppure se $|f(z_0)| = |z_0|$ per un'opportuna $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$, allora esiste una costante $c$, con $|c| = 1$, tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.*

*Dimostrazione.* Sia $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ la funzione analitica definita da $g(z) = f(z)/z$ per $0 \neq z \in \mathbb{D}$ e $g(0) = f'(0)$. Seconda il Principio del Massimo si ha per $\rho \in (0, 1)$

$$\max\{|g(z)| : |z| \leq \rho\} = \max\{|g(z)| : |z| = \rho\} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Facendo $\rho$ tendere ad 1 risulta $|g(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ e quindi $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Inoltre risulta $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Supponiamo che $|f'(0)| = 1$ oppure $|f(z_0)| = |z_0|$ per un'opportuna $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$. In altre parole, supponiamo che $|g(z_0)| = 1$ per un'opportuna $z_0 \in \mathbb{D}$. In tal caso il Principio del Massimo implica che la $g$ è una costante, $c$ con $|c| \leq 1$. Di conseguenza, $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Per $a \in \mathbb{D}$ consideriamo la trasformazione di Möbius

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Allora la $\varphi_a$ è analitica in un disco aperto che contiene $\overline{\mathbb{D}}$. Inoltre,

$$\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = z = \varphi_a(\varphi_{-a}(z)), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Dunque la $\varphi_a$ trasforma $\mathbb{D}$ in se stesso in modo biunivoco: $\varphi_a[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$. Poi per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha

$$|\varphi_a(e^{i\theta})| = \left|\frac{e^{i\theta} - a}{1 - \overline{a}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta} - a}{\overline{e^{i\theta}} - \overline{a}}\right| = 1,$$

cioè $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Infine,

$$\begin{aligned}
\varphi_a'(0) &= \left.\frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2}\right|_{z=0} = 1 - |a|^2, \\
\varphi_a'(a) &= \left.\frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2}\right|_{z=a} = \frac{1}{1 - |a|^2}.
\end{aligned}$$

**Teorema I.24** *Sia* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *una funzione analitica biunivoca tale che* $f[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ *e* $f(a) = 0$. *Allora esiste una costante* $c$, *con* $|c| = 1$, *tale che*

$$f(z) = c\varphi_a(z) = c\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

*Dimostrazione.* Siccome $(\varphi_{-a} \circ f)[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ e $(f \circ \varphi_{-a})(0) = f(a) = 0$, abbiamo

$$(f \circ \varphi_{-a})'(0) = f'(\varphi_{-a}(0))\varphi_{-a}'(0) = f'(a)(1 - |a|^2),$$

mentre dal Lemma di Schwarz segue che $|(f \circ \varphi_{-a})'(0)| \leq 1$. Quindi $|f'(a)| \leq (1 - |a|^2)^{-1}$. In modo simile, essendo $g$ la funzione inversa della $f$ (cioè, $(g \circ f)(z) = z$ per ogni $z \in \mathbb{D}$), abbiamo $(\varphi_a \circ g)[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$, $(\varphi_a \circ g)(0) = 0$ e

$$(\varphi_a \circ g)'(0) = \varphi_a'(a)g'(0) = \frac{g'(0)}{1 - |a|^2},$$

che implica che $|g'(0)| \leq 1 - |a|^2$. Utilizzando che $g'(0)f'(a) = (g \circ f)'(a) = 1$, otteniamo $|f'(a)| = (1 - |a|^2)^{-1}$. Siccome $(f \circ \varphi_{-a})[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$, $(f \circ \varphi_a)(0) = 0$ e

$$|(f \circ \varphi_{-a})'(0)| = |f'(a)\varphi_{-a}'(0)| = 1,$$

risulta l'esistenza di un'opportuna costante $c$, con $|c| = 1$, tale che $(f \circ \varphi_{-a})(w) = cw$ per ogni $w \in \mathbb{D}$. Ponendo $z = \varphi_{-a}(w)$, risulta $f(z) = c\varphi_a(z)$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

# 5 Teorema di Cauchy

Finora è stato dimostrato il Teorema di Cauchy per le curve chiuse e rettificabili contenute in un disco aperto in $\mathbb{C}$. Per estenderlo al caso più generale bisogna introdurre il concetto di omotopia delle curve.

**Definizione I.25** Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{C}$. Allora due funzioni continue $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ tali che $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ e $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ [cioè, due curve chiuse in $\Omega$], si dicono *omotope* se esiste una funzione continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tale che

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), & 0 \le s \le 1, \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

L'omotopia è una relazione di equivalenza tra le curve chiuse in $\Omega$. In un aperto semplicemente connesso [per esempio, in un aperto convesso o stellato] tutte le curve chiuse sono omotope tra loro.

**Definizione I.26** Una funzione continua $\gamma_0 : [0,1] \to \Omega$ tale che $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ (oppure: una curva chiusa) si dice *contraibile* (oppure: omotopa ad una costante) se esistono una funzione continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ ed un punto $z_0 \in \Omega$ tali che

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = z_0, & 0 \le s \le 1, \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

In altre parole, $\gamma_0$ si dice contraibile se è omotopa ad una funzione costante.

**Teorema I.27 (Cauchy)** *Sia $\gamma$ una curva rettificabile e contraibile, e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

Esistono una funzione continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ e un punto $z_0 \in \Omega$ tali che

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = z_0, & 0 \le s \le 1, \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), & 0 \le t \le 1. \end{cases} \tag{I.7}$$

Supponiamo prima che la $\Gamma$ è di classe $C^2$. Secondo il Teorema di Schwartz abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right), \qquad s,t \in [0,1].$$

Sia
$$g(t) = \int_0^1 f(\Gamma(s,t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\, ds.$$
Allora $g(0) = \int_\gamma f(w)\, dw$ e $g(1) = 0$. Inoltre,
$$\begin{aligned}
g'(t) &= \int_0^1 \left( f'(\Gamma(t,s)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + f(\Gamma(t,s)) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}\right)\right) ds \\
&= \int_0^1 \left( f'(\Gamma(t,s)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + f(\Gamma(t,s)) \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right)\right) ds \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left( (f\circ\Gamma)\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right) \\
&= f(\Gamma(1,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(1,t) - f(\Gamma(0,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0,t) = 0,
\end{aligned}$$
poichè $\Gamma(0,t) = \Gamma(1,t)$ per $t \in [0,1]$. Quindi la $g$ è constante e $\int_\gamma f(w)\, dw = g(0) = g(1) = 0$.

*Dimostrazione.* Supponiamo ora che la $\Gamma$ è continua e verifica la (I.7). Allora la $\Gamma$ è uniformemente continua in $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ e dunque $\Gamma([0,1]\times[0,1])$ è un sottoinsieme compatto di $\Omega$. Di conseguenza,
$$\rho = \operatorname{dist}(\Gamma([0,1]\times[0,1]), \mathbb{C}\setminus\Omega) > 0.$$
L'uniforme continuità della $\Gamma$ implica l'esistenza di $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < \rho$ se $(s-s')^2 + (t-t')^2 < (4/n^2)$. Introduciamo ora i punti
$$z_{jk} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), \qquad 0 \le j,k \le n,$$
di $\Omega$ e i rettangoli
$$\Sigma_{jk} = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \qquad 1 \le j,k \le n.$$
Siccome il diametro di ciascun rettangolo è uguale a $\sqrt{2}/n$, si ha $\Gamma(\Sigma_{jk}) \subset B_\rho(z_{jk})$. Inoltre, la regione chiusa
$$\Pi_{jk} = \left\{ t_1 z_{jk} + t_2 z_{j-1,k} + t_3 z_{j-1,k-1} + t_4 z_{j,k-1} : \begin{matrix} t_1,t_2,t_3,t_4 \in [0,1], \\ t_1+t_2+t_3+t_4 = 1\end{matrix} \right\}$$
è contenuta in $B_\rho(z_{jk})$. Dalla Proposizione I.15 segue che
$$\int_{[z_{j-1,k}, z_{jk}]} f(w)\, dw = \int_{\{\Gamma(s,\frac{k}{n}) : \frac{j-1}{n} \le s \le \frac{j}{n}\}} f(w)\, dw$$

per una funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qualsiasi ($j = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, n$). Inoltre, siccome $\Pi_{jk} \subset B_\rho(z_{jk})$ e quindi [Vedi la Proposizione I.15]

$$\int_{\partial \Pi_{jk}} f(w)\, dw = 0, \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

si vede facilmente che

$$\int_{\pi_0} f(w)\, dw = \int_{\pi_1} f(w)\, dw = \int_{\pi_2} f(w)\, dw = \ldots = \int_{\pi_n} f(w)\, dw,$$

dove $\pi_k$ è il poligono con vertici $z_{0k}, z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk}, z_{0k}$ orientato nel modo sovraindicato. Infine, abbiamo

$$\int_\gamma f(w)\, dw = \int_{\pi_0} f(w)\, dw = \int_{\pi_n} f(w)\, dw = \int_{\{\Gamma(s,1):0 \le s \le 1\}} f(w)\, dw = 0,$$

poichè quest'ultima curva consiste nel singolo punto $z_0$. □

**Corollario I.28** *Sia $\Omega$ un aperto semplicemente connesso in $\Omega$, $\gamma$ una curva chiusa e rettificabile in $\Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

Sia $\Omega$ semplicemente connesso e sia $z_0 \in \Omega$. Allora la funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\delta(z_0 \mapsto z)} f(w)\, dw,$$

dove $\delta(z_0 \mapsto z)$ è una curva rettificabile in $\Omega$ da $z_0$ a $z$, è una primitiva della $f$ nel senso che essa è analitica e verifica $F' = f$. Infatti, per $z, z_1 \in \Omega$ abbastanza vicini il segmento $[z_1, z]$ tra loro è contenuto in $\Omega$. Quindi potremmo scegliere $\delta(z_0 \mapsto z) = \delta(z_0 \mapsto z_1) \cup [z_1, z]$. Dunque

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) &= \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1,z]} f(w)\, dw - f(z_1) \\ &= \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1,z]} \{f(w) - f(z_1)\} dw, \end{aligned}$$

che implica

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \le |f(z) - f(z_1)|.$$

In altre parole,

$$\lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1).$$

# 6 Indice di una Curva

Una curva chiusa e rettificabile $\gamma$ in $\mathbb{C}$ suddivide il suo complementare $\mathbb{C} \setminus \gamma$ in un numero finito di aperti ciascuno di loro caratterizzati da un numero intero, il cosiddetto indice.

**Proposizione I.29** *Sia $\gamma$ una curva chiusa e rettificabile in $\mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto fuori di $\gamma$. Allora*

$$n(\gamma; z_0) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

*è un numero intero chiamato l'indice della curva $\gamma$ rispetto a $z_0$.*

*Dimostrazione.* Seguendo l'approssimazione della curva $\gamma$ presentata nella dimostrazione del Teorema I.27 basta supporre che $\gamma$ sia regolare a tratti. Dunque esistono $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tali che $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ è continua, $\gamma(0) = \gamma(1)$ e $\gamma$ è di classe $C^1$ in $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$. Sia

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds.$$

Allora $g(0) = 0$ e $g(1) = 2\pi i\, n(\gamma; z_0)$. Inoltre,

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}, \quad t \notin \{t_1, \ldots, t_{m-1}\}.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0]\right) = e^{-g(t)}\gamma'(t) - g'(t)e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0] = 0,$$

dove $t \notin \{t_1, \ldots, t_{m-1}\}$. Ciò implica che la funzione $e^{-g(t)}[\gamma(t)-z_0]$ non dipende da $t \in [0, 1]$. In altre parole,

$$e^{-g(1)}[\gamma(0) - z_0] = e^{-g(1)}[\gamma(1) - z_0] = e^{-g(0)}[\gamma(0) - z_0] = \gamma(0) - z_0,$$

mentre $\gamma(0) \neq z_0$. Quindi $g(1) = 2\pi n$ per un opportuno $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\gamma$ e $\tilde{\gamma}$ sono due curve chiuse, rettificabili e omotope in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, allora

$$n(\gamma; z_0) = n(\tilde{\gamma}; z_0).$$

Inoltre, $n(\gamma; z_0)$ dipende in modo continuo dal punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Infatti, sia $\phi(z_0) = n(\gamma; z_0)$ per $z_0 \notin \gamma$. Allora per $z_0, z_1 \notin \gamma$ si ha

$$\begin{aligned}
|\phi(z_0) - \phi(z_1)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma [(z-z_0)^{-1} - (z-z_1)^{-1}] dz \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\varphi \frac{z_0 - z_1}{(z-z_0)(z-z_1)} \, dz \right| \\
&\leq \frac{|z_0 - z_1|}{2\pi} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z-z_0|\,|z-z_1|}.
\end{aligned}$$

Essendo $\rho = \operatorname{dist}(z_0, \gamma) > 0$, per $|z_0 - z_1| < \frac{1}{2}\rho$ e $z \in \gamma$ risultano $|z - z_0| \geq \rho > \frac{1}{2}\rho$ e $|z - z_1| > \frac{1}{2}\rho$. Di conseguenza,

$$|\phi(z_0) - \phi(z_1)| < \frac{2L(\gamma)\delta}{\pi\rho^2}$$

se $|z_0 - z_1| < \delta < \frac{1}{2}\rho$, che dimostra la continuità della $\phi$. Di conseguenza, siccome la $\phi$ assume soltanto valori interi, l'indice $n(\gamma; z_0)$ è constante in ogni componente connesso di $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Sia $\gamma$ una curva chiusa, rettificabile e semplice in $\mathbb{C}$. Secondo il Teorema di Jordan, un risultato profondo di topologia, $\mathbb{C} \setminus \gamma$ è l'unione di due aperti connessi, uno limitato e l'altro illimitato. Se $z_0$ appartiene al componente illimitato, allora $n(\gamma; z_0) = 0$. Invece, se $\gamma$ appartiene al componente limitato, abbiamo $n(\gamma; z_0) = 1$ se $\gamma$ ha l'orientamente antiorario e $n(\gamma; z_0) = -1$ se $\gamma$ ha l'orientamento orario. Infatti, si può spostare $z_0$ verso l'infinito se si trova nel componente illimitato e concludere che in tal caso $n(\gamma; z_0) = 0$. Invece, se $z_0$ appartiene al componente limitato, potremmo deformare $\gamma$ in una circonferenza attorno a $z_0$ senza cambiare l'indice e concludere che $n(\gamma; z_0) = \pm 1$, dove il segno dipende dall'orientamento della circonferenza.

# 7 Teorema Integrale di Cauchy

In questa parte dimostriamo ancora un'altra versione del Teorema di Cauchy, la cosiddetta Formula Integrale di Cauchy. Poi verrà applicata per conteggiare gli zeri di una funzione analitica.

**Teorema I.30 (Formula integrale di Cauchy)** *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $\gamma$ una curva chiusa e rettificabile in $\Omega$ che è contraibile. Allora*

$$n(\gamma; z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz, \qquad z_0 \in \Omega \setminus \gamma. \tag{I.8}$$

*Dimostrazione.* Siccome $g(z) = [f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ è una funzione analitica in $z \in \Omega$ (con il valore $g(z_0) = f'(z_0)$), risulta dal Teorema di Cauchy

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} - \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)n(\gamma; z_0),\end{aligned}$$

che implica la (I.8). □

Derivando la (I.8) $m$ volte, risulta

$$n(\gamma; z_0)f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz, \qquad z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma,$$

se $\gamma$ è una curva chiusa e rettificabile che è contraibile.

**Corollario I.31** *Sia $\Omega$ un aperto connesso, $\gamma$ una curva chiusa, rettificabile e contraibile e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^m \mu_k n(\gamma; \alpha_k),$$

*dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono gli zeri diversi della $f$ con molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_m$.*

*Dimostrazione.* La funzione $f$ ha la rappresentazione

$$f(z) = (z-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(z-\alpha_m)^{\mu_m}g(z), \qquad z \in \Omega,$$

dove $g : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione analitica senza zeri. Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k}{z-\alpha_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{k=1}^m \mu_k \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha_k}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz}_{=0,\ \text{Cauchy}} \\ &= \sum_{k=1}^m \mu_k n(\gamma; \alpha_k).\end{aligned}$$

□

# 8 Funzioni Armoniche

Secondo le equazioni di Cauchy-Riemann, le parti reali e immeginarie delle funzioni analitiche $f(z)$ sono soluzioni dell'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ all'identificare del piano complesso $\mathbb{C}$ con il piano euclideo $\mathbb{R}^2$ tramite $z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tali soluzioni si chiamano *funzioni armoniche*. Per definizione le funzioni armoniche sono di classe $C^2$. Data la funzione analitica $f(z)$, allora $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$ si dicono *coniugate armoniche*.[1]

Consideriamo ora una funzione armonica $u(x, y)$ in un aperto semplicemente connesso $\tilde{\Omega}$ in $\mathbb{R}^2$. Risolviamo ora il sistema di equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Allora $v(x, y)$ esiste e è unica (salvo per un termine costante), grazie al fatto che $\tilde{\Omega}$ è semplicemente connesso. Siccome la $u$ è di classe $C^1$, lo è anche la $v$. Quindi $f = u + iv$ è analitica in $z = x + iy \in \Omega$, dove $\Omega = \{x + iy : (x, y) \in \tilde{\Omega}\}$. In altre parole, una funzione armonica di classe $C^1$ definita in una regione semplicemente connessa ha una coniugata armonica.[2]

**Teorema I.32 (Teorema della media)** *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica e $\overline{B_{z_0}(\varepsilon)}$ un disco chiuso contenuto in $\Omega$. Se $\gamma$ è la circonferenza $|z - z_0| = \varepsilon$, allora*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

*Dimostrazione.* Sia $D$ un disco tale che $\overline{B_{z_0}(\varepsilon)} \subset D \subset \Omega$ e sia la $f : D \to \mathbb{C}$ analitica tale che $u = \operatorname{Re} f$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \overset{z=z_0+\varepsilon e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

Il teorema segue calcolando la parte reale. □

**Teorema I.33 (Principio del massimo)** *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Supponiamo l'esistenza di $z_0 \in \Omega$ tale che $u(z) \leq u(z_0)$ per ogni $z \in \Omega$. Allora la $u$ è costante.*

[1]Se $v_1$ e $v_2$ sono ambedue coniugate armoniche della funzione armonica $u$, allora $u + iv_1$ e $u = iv_2$ sono funzioni analitiche. Di conseguenza, $i(v_1 - v_2)$ è una funzione analitica a valori immaginari, cioè una costante in ogni componente complesso del suo dominio.

[2]La funzione $u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ma non ha coniugata armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Infatti, $u = \operatorname{Re} f(x, y)$, dove $f(z) = \log(z)$, mentre zero è un punto di diramazione della funzione logaritmico. Per trovare la coniugata armonica della $u$, bisogna ristringere il dominio ad una sottoregione semplicemente connessa.

Il teorema vale anche sotto l'ipotesi $u(z) \geq u(z_0)$ per $z \in \Omega$. Basta considerare $-u$ al posto di $u$.

*Dimostrazione.* Sia $E = \{z \in \Omega : u(z) = u(z_0)\}$. Allora $E$ è chiuso in $\Omega$, grazie alla continuità della $u$. Per $z_0 \in E$, scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_{z_0}(\varepsilon)} \subset \Omega$. Supponiamo l'esistenza di $z_1 \in B_{z_0}(\varepsilon)$ per cui $u(z_1) < u(z_0)$. Siccome la $u$ è continua, esiste $\rho > 0$ tale che $u(z) < u(z_0)$ se $|z - z_1| \leq \rho$. Applicando il Teorema I.32, si ha

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + |z_1 - z_0| e^{i\theta})\, d\theta,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è $\leq u(z_0)$, è continua ed è minore di $u(z_0)$ per almeno un valore di $\theta$. Quindi la parte a destra è minore di $u(z_0)$, una contraddizione. Di conseguenza, $u(z) = u(z_0)$ se $|z - z_0| \leq \varepsilon$. In tal caso $E$ è aperto. Siccome $E$ è aperto e chiuso in $\Omega$ e $\Omega$ è connesso, abbiamo $E = \Omega$ e $u(z) = u(z_0)$ per ogni $z \in \Omega$. □

Se la $f$ è analitica in an aperto $\Omega$ contenente il disco $\overline{B_R(0)}$ e non ha zeri, allora $\log(|f|)$ è armonica nel tale disco. Secondo il Teorema I.32 si ha

$$\log(|f(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(Re^{i\theta})|)\, d\theta. \tag{I.9}$$

Nel seguente teorema si generalizza il risultato al caso in cui la $f$ ha zeri all'interno del disco $\overline{B_R(0)}$.

**Teorema I.34 (Formula di Jensen)** *Sia la $f$ analitica in un aperto che contiene il disco $\overline{B_R(0)}$. Siano $z_1, \ldots, z_n$ gli zero della $f$ (ciascuno con la propria molteplicità) in $B_R(0)$. Allora*

$$\log(|f(z)|) = -\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(Re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{I.10}$$

*dove $f(0) \neq 0$.*

*Dimostrazione.* Per $|\zeta| < 1$ la trasformazione di Möbiusxi $z \mapsto (z - \zeta)(1 - \overline{\zeta} z)^{-1}$ trasforma il disco $B_1(0)$ e la sua chiusura in se stesso. Quindi

$$z \mapsto \frac{R^2(z - z)k)}{R^2 - \overline{z_k} z}$$

trasforma il disco $B_R(0)$ e la sua chiusura in se stesso. Dunque la funzione

$$F(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{R^2 - \overline{z_k} z}{R(z - z_k)}$$

è analitica in an apero contenente $\overline{B_R(0)}$, non ha zeri in $B_R(0)$ e verifica $|F(z)| = |f(z)|$ per $|z| = R$. Applicando la (I.9) alla funzione $F$ otteniamo

$$\log(|F(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|F(Re^{i\theta})|)\, d\theta,$$

dove

$$F(0) = f(0) \prod_{k=1}^{n} \left(-\frac{R}{z_k}\right).$$

Di conseguenza risulta la (I.10). □

Sia $n_f(t)$ il numero degli zeri della $f$ nel disco $B_t(0)$. Enumerando gli zeri tali che $0 < |z_1| < \ldots < |z_n| < R$, otteniamo

$$n_f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq |z_1|, \\ 1, & |z_1| < t \leq |z_2|, \\ \vdots \vdots \vdots & \\ n-1, & |z_{n-1}| < t \leq |z_n|, \\ n, & |z_n| < t \leq R. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n_f(t)}{t}\, dt &= \int_{|z_1|}^{|z_2|} \frac{dt}{t} + \int_{|z_2|}^{|z_3|} \frac{2\, dt}{t} + \ldots + \int_{|z_{n-1}|}^{|z_n|} \frac{(n-1)\, dt}{t} + \int_{|z_n|}^{R} \frac{n\, dt}{t} \\ &= \log \frac{|z_2|}{|z_1|} + 2 \log \frac{|z_3|}{|z_2|} + \ldots + (n-1) \log \frac{|z_n|}{|z_{n-1}|} | \log \frac{R}{|z_n|} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \log |z_k| + n \log R = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{R}{|z_k|}. \end{aligned}$$

Quindi la formula di Jensen (I.10) ammette la forma alternativa

$$\int_0^R \frac{n_f(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(Re^{i\theta})|\, d\theta - \log(|f(0)|), \tag{I.11}$$

dove $f(0) \neq 0$.

# Capitolo II

# Singolarità e Serie di Laurent

In questi capitolo discutiamo le serie di Laurent, le varie singolarità e il calcolo dei residui. Dimostriamo in particolare il Teorema di Casorati-Weierstrass sulle singolarità essenziali, il principio dell'argomento e il Teorema di Rouché.

## 1 Classificazione dei Punti Singolari

Le funzioni analitiche possono presentare dei punti di *singolarità*, ossia dei punti nei quali si verifica un comportamento non ordinario. Un punti $z_0$ è definito *ordinario* se esiste un suo intorno nel quale la funzione è analitica, ossia se esiste un $\delta > 0$ tale che la funzione è analitica per ogni $z$ con $|z - z_0| < \delta$. Diversamente $z_0$ è definito *singolare*, ossia rappresenta un punto di singolarità per $f$. I punti di singolarità possono essere di vario tipo.

a. **Poli**: Un punto $z_0$ è un *polo* di ordine $n$ se esiste un intero positivo $n$ (necessariamente unico) tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \alpha \neq 0,$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Se $n = 1$ il polo è detto semplice.

b. **Singolarità eliminabili**: Un punto $z_0$ rappresenta una *singolarità eliminabile* per $f$ se $f(z_0)$ non è definito, ma il limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ esiste finito.

c. **Singolarità essenziali**: Un punto $z_0$ rappresenta una *singolarità essenziale* per $f$ se essa è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ e non esiste alcun intero positivo $n$ tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \alpha \neq 0.$$

d. **Singolarità isolate**: Un punto $z_0$ rappresenta una *singolarità essenziale* per $f$ se essa è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Ci sono due tipi di singolarità isolata: il polo e la singolarità essenziale.

Nel caso di un punto di diramazione $z_0$ non esiste alcun $\delta > 0$ tale che la $f$ è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Invece in un tale intorno la $f$ ha più di un valore, come evidenziato dalle funzioni $\sqrt{z}$ e $\log(z)$ per $z_0 = 0$.

In modo analogo si possono classificare le singolarità all'infinito. Una funzione $f$ definita per $|z| > R$ (cioè, in un intorno di $\infty$) ha una singolarità di un certo tipo se $g(z) = f(1/z)$ ha lo stesso tipo di singolarità in $z_0 = 0$. In particlare, i polinomi di grado $n$ hanno un polo di ordine $n$ all'infinito, mentre una funzione intera che non è polinomio ha una singolarità essenziale all'infinito.

**Teorema II.1 (Serie di Laurent)** *Sia $f(z)$ analitica per $R_1 < |z-z_0| < R_2$. Allora*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

*dove la convergenza è assoluta e uniforme per $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$ per qualunque $\rho_1, \rho_2$ tali che $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$. Inoltre,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz, \tag{II.1}$$

*dove $\gamma$ è la circonferenza $|z - z_0| = \rho$ con orientamento orario per qualunque $\rho \in (R_1, R_2)$.*

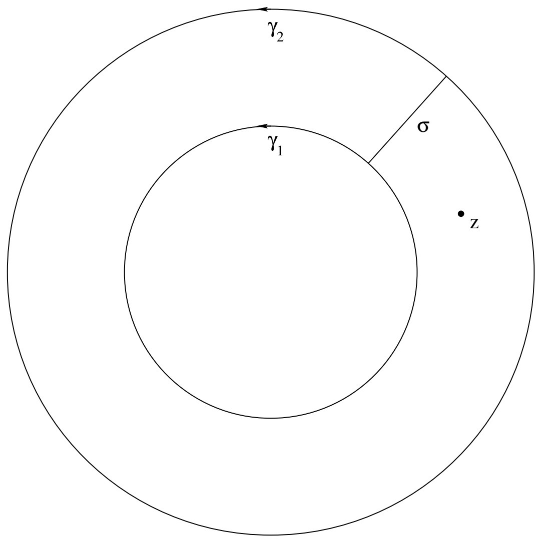
Sono ammessi i valori $R_1 = 0$ e $R_2 = +\infty$ per i raggi delle circonferenze.

*Dimostrazione.* Siano $\rho_1, \rho_2$ costanti positive tali che $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$. Allora le circonferenze $\gamma_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho_j\}$ per $j = 1, 2$, con l'orientamento antiorario, sono curve chiuse e omotope. Dal Teorema di Cauchy segue che $\int_{\gamma_1} g(z)\, dz = \int_{\gamma_2} g(z)\, dz$ per qualunque funzione analitica $g : \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \to \mathbb{C}$. In particolare, le costanti $a_n$ definite dalla (II.1) non dipendono dal raggio $\rho$ della circonferenza $\gamma$.

Definiamo ora le due funzioni $f_1$ e $f_2$ nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad |z - z_0| > \rho_1, \\ f_2(z) &= +\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad |z - z_0| < \rho_2. \end{aligned}$$

Allora $f_1(z)$ è analitica per $|z - z_0| > \rho_1$ e $f_2(z)$ è analitica per $|z - z_0| < \rho_2$.




Se $R_1 < |z-z_0| < R_2$, scegliamo $\rho_1, \rho_2$ tali che $R_1 < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R_2$. Sia $\gamma_j(t) = z_0 + \rho_j e^{it}$ ($j = 1, 2,\ 0 \leq t \leq 2\pi$). Si scelga anche un segmento $\sigma(t) = z_0 + [(1-t)\rho_1 + t\rho_2]e^{i\theta_0}$ ($0 \leq t \leq 1$) che non contiene il punto $z$. Allora la curva chiusa $\gamma = \gamma_2 - \sigma - \gamma_1 + \sigma$ è contraibile. Anche $n(\gamma_2; z) = 1$ e $n(\gamma_1; z) = 0$. Applicando la Formula Integrale di Cauchy risulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \text{(II.2)} \\ &= f_2(z) + f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

dove $f_2(z)$ viene sviluppata in una serie di potenze in $(z - z_0)$ (con raggio di convergenza $\geq \rho_2$) e $f_1(z)$ in una serie di potenze in $1/(z - z_0)$ (con raggio di convergenza $\geq (1/\rho_1)$). In tal caso sostituiamo nella (II.2)

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n$$

se $|z - z_0| < |w - z_0| = \rho_2$ e

$$\frac{-1}{w-z_0} = \frac{-1}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^m = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n (w-z_0)^{-(n+1)}$$

per $|z-z_0| > |w-z_0| = \rho_1$. Così otteniamo l'espressione (II.1) per i coefficienti $a_n$. $\square$

**Corollario II.2** *Sia $z_0$ una singolarità isolata e sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ la sua serie di Laurent per $0 < |z - z_0| < R$. Allora:*

*a. $z_0$ è una singolarità eliminabile se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.*

*b. $z_0$ è un polo di ordine $m$ se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$.*

*c. $z_0$ è una singolarità essenziale se $a_n \neq 0$ per un numero infinito di pedici negativi $n$.*

Dimostriamo ora un risultati sorprendente sul comportamento di una funzione analitica in un intorno di una singolarità essenziale. Osserviamo che una funzione analitica $f$ con polo a $z_0$ verifica

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

**Teorema II.3 (Casorati-Weierstrass)** *Sia $z_0$ una singolarità essenziale di $f$. Allora per un $\delta > 0$ abbastanza piccolo l'insieme dei valori $\{f(z) : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ è denso in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la $f$ è analitica in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. In tal caso bisogna dimostrare che per $c \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ esiste $z$ con $0 < |z - z_0| < \delta$ tale che $|f(z) - c| < \varepsilon$. Supponiamo ora che l'affermazione sia falsa. Allora esistono $c \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ per $0 < |z - z_0| < \delta$. In tal caso

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - c}{z - z_0} \right| = +\infty,$$

che implica che $(f(z) - c)/(z - z_0)$ ha un polo in $z_0$. Se $m$ fosse l'ordine del polo, allora $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m [f(z) - c] = 0$. Quindi

$$|z - a_0|^m |f(z)| \leq |z - z_0|^m |f(z) - c| + |z - z_0|^m |c|$$

implica che $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$. Di conseguenza, $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ ha una singolarità eliminabile in $z_0$. Contraddizione. $\square$

In altre parole, per qualunque $c \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con limite $z_0$ tale che $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = c$. Si può infatti dimostrare, secondo il cosiddetto Teorema di Picard [6, Theorem 9.16], che per un $\delta > 0$ abbastanza piccolo l'insieme dei valori $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ coincide con tutto il piano complesso con l'eccezione di al massimo un punto. Per esempio, $f(z) = e^z$ ha una singolarità essenziale all'infinito, mentre per $0 \neq c \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^z = c$ ha almeno una soluzione in ogni intorno dell'infinito.

## 2 Residui

Sia $f$ una funzione analitica nel disco $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ privato del suo centro $z_0$. Allora la $f$ è sviluppabile in serie di Laurent, ossia è possibile scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

dove per qualsiasi $\rho \in (0, \delta)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Il coefficiente

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\, dz$$

si dice *residuo* della funzione $f$ in $z_0$, ossia

$$f(z) = \mathrm{Res}_{z_0}(f).$$

Se la $f$ ha un polo di ordine $m$ in $z_0$, allora

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Nel caso di un polo semplice risulta

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

**Teorema II.4 (Teorema dei residui)** *Sia $f$ una funzione analitica in $\Omega$ con l'eccezione dei punti isolati $z_1, \ldots, z_m$. Sia $\gamma$ una curva chiusa e rettificabile in $\Omega$ che non passa per i punti $z_1, \ldots, z_m$ e è contraibile (in $\Omega$). Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma; z_j) Res_{z_j}(f).$$

Dimostriamo il Teorema dei Residui soltanto nel caso in cui le singolarità isolate $z_1, \ldots, z_m$ sono poli della $f$. Nella dimostriamo apparirà una somma finita che nel caso più generale sarebbe una serie infinita. Per giustificare la convergenza di quest'ultima ci vorrebbe il Teorema di Mittag-Lefler.

*Dimostrazione.* Sia $\mu_j$ l'ordine del polo $z_j$ ($j = 1, \ldots, m$). Allora esiste una funzione analitica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ e costanti $a_{jk}$ ($j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, \mu_j$) tali che

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}.$$

Di conseguenza,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} a_{jk} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_j)^k} = \sum_{j=1}^{m} a_{j1}\, n(\gamma; z_j).$$

Infine osserviamo che $a_{j1} = \mathrm{Res}_{z_j}(f)$ ($j = 1, \ldots, m$). □

Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$. Una funzione $f$ definita e analitica in $\Omega$ con l'eccezione di poli si dice *funzione meromorfa* in $\Omega$. Ponendo $f(z_j) = \infty$ in ogni poli, si produce una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$.

**Teorema II.5 (Principio dell'argomento)** *Sia $f$ una funzione meromorfa in $\Omega$ con poli $p_1, \ldots, p_m$ (di ordine $\mu_1, \ldots, \mu_m$) e zeri $z_1, \ldots, z_n$ (di ordine $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$). Sia $\gamma$ una curva chiusa e rettificabile in $\Omega$ che non passa per i poli e zeri e è contraibile. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j n(\gamma; z_j) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k n(\gamma; p_k). \tag{II.3}$$

*Dimostrazione.* Esiste una funzione analitica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ senza zeri tali che

$$f(z) = g(z) \frac{(z - z_1)^{\zeta_1} \ldots (z - z_n)^{\zeta_n}}{(z - p_1)^{\mu_1} \ldots (z - p_m)^{\mu_m}}.$$

Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\zeta_j}{z - z_j} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k}{z - p_k},$$

che implica la (II.3). □

**Teorema II.6 (Rouché)** *Siano $f$ e $g$ funzioni meromorfe in $\Omega$ e $\overline{B_{z_0}(R)} \subset \Omega$. Supponiamo che la circonferenza $\gamma = \{z \in \Omega : |z - z_0| = R\}$ non contenga alcun polo o zero delle funzioni $f$ e $g$ e che*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \qquad |z - z_0| = R.$$

*Allora*

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

*dove $Z_f$ e $Z_g$ sono il numero di zeri di $f$ e $g$ all'interno del disco $B_{z_0}(R)$ e $P_f$ e $P_g$ sono il numero di poli di $f$ e $g$ all'interno del disco $B_{z_0}(R)$, conteggiati per molteplicità.*

*Dimostrazione.* Chiaramente $h = f/g$ è una funzioni meromorfa in $\Omega$ con un numero finito di poli e zeri, tutti fuori della circonferenza $\gamma$. Siccome

$$|h(z) - 1| < 1, \qquad z \in \gamma,$$

abbiamo $h[\gamma] \subset B_1(1)$. Osserviamo ora che $\log(z)$ è una funzione analitica in $B_1(1)$ che verifica $\log(1) = 0$. Allora $\log(h)$ è una funzione analitica in un intorno della circonferenza $\gamma$ e $h'/h$ è una sua primitiva. Dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz \\ &= (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g), \end{aligned}$$

che implica il teorema. □

Passiamo ora ad una seconda dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra.

**Corollario II.7 (Teorema fondamentale dell'algebra)** *Un polinomio di grado $\geq 1$ ha almeno uno zero.*

*Dimostrazione.* Sia $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, dove $0 \neq a_n \in \mathbb{C}$, un polinomio di grado $n$. Sia $g(z) = a_n z^n$. Allora per $|z| = R$ risulta

$$\left| \frac{f(z) - g(z)}{g(z)} \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j| R^j}{|a_n| R^n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} R^{j-n},$$

dove l'ultima parte è minore di 1 per $R$ abbastanza grande. Siccome $f$ e $g$ non hanno poli, la $f$ ha esattamente $n$ zeri di modulo minore di $R$ per $R$ abbastanza grande. □

# Capitolo III

# Fattorizzazioni delle Funzioni Analitiche

In questo capitolo discutiamo i Teoremi di Riemann e di Hadamard sulla rappresentazione moltiplicativa delle funzioni analitiche.

## 1 Prodotti Infiniti

**Definizione III.1** Sia $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di numeri complessi. Si dice che il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ esiste e che $z$ è il suo valore se

$$z = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} (z_1 z_1 \dots z_{n-1} z_n).$$

Quindi il prodotto infinito è il limite dei corrispondenti prodotti parziali.

Supponiamo ora che $z_n \neq 0$ per $n \in \mathbb{N}$ e che $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ esista e sia diversa da zero. Sia $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ il prodotto parziale $n$-esimo. Allora

$$z_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to \frac{z}{z} = 1, \qquad n \to \infty.$$

Quindi $z_n \to 1$ è una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ di numeri $z_n$ diversi da zero converga ad un numero complesso diverso da zero.

Dall'esempio $z_n = a$ per un'opportuna $0 \neq a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$, per cui $p_n = a^n$ e quindi $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, si vede che, oltre l'esistenza del prodotto infinito $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$, anche $z \neq 0$ è una condizione necessaria affinché $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Applicando la funzione logaritmica si può tradurre il prodotto infinito $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ di numeri diversi da zero in una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$. Per evitare problemi con il punto di diramazione della funzione logaritmica, supponiamo che $\mathrm{Re}\, z_n > 0$ e consideriamo la funzione analitica $\log : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\} \to \mathbb{C}$ tale che $\log(1) = 0$ e $\exp(\log(z)) = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\, z > 0$.

**Proposizione III.2** *Sia $\mathrm{Re}\, z_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge ad un numero diverso da zero se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ è convergente.*

*Dimostrazione.* Sia $s$ tale che $z = e^s$ e $|\mathrm{Im}\, s| < (\pi/2)$. Sia $p_n = z_1 \dots z_n$. Allora

$$s_n \stackrel{\text{def}}{=} \log(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \log(z_k).$$

Se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ con somma $s$, allora

$$p_n = \exp(\sum_{k=1}^{n} \log(z_k)) = \exp(s_n) \to e^s \neq 0.$$

D'altra parte, supponiamo che $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ abbia un limite diverso da zero $z = |z|e^{i\theta}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$. Allora $s_n = \log(|p_n|) + i\theta_n + 2\pi i k_n$, dove $\theta - \pi < \theta_n \leq \theta + \pi$ e $k_n \in \mathbb{Z}$. In tal caso $s_n - s_{n-1} = \log(z_n) \to \log(1) = 0$, mentre $[\log(|p_n|) + i\theta_n] - [\log(p_{n-1})| + i\theta_{n-1} \to 0$. Di conseguenza, $(k_n - k_{n-1}) \to 0$ e dunque $k_n = k$ è costante per $n \geq n_0$. Ciò implica che $s_n \to \log(|z|) + i\theta + 2\pi i k$; in altre parole, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ è convergente. □

Consideriamo la serie di potenze

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

con raggio di convergenza uguale ad 1. Allora per $|z| \leq \frac{1}{2}$ si ha

$$\left| 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2},$$

quest'ultima disuguaglianza soltanto per $|z| \leq \frac{1}{2}$. Dunque

$$-\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \leq \frac{1}{2}, \qquad |z| \leq \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza,

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|, \qquad |z| \leq \frac{1}{2}.$$

Ora è immediato il seguente risultato.

**Proposizione III.3** *Sia* $\mathrm{Re}\, z_n > -1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$$

*è assolutamente convergente se e solo se il prodotto infinito* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *è assolutamente convergente.*

Non è immediata la definizione della convergenza assoluta di un prodotto infinito. Ovviamente è convergente il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$ se $z_n = (-1)^n$, ma il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ stesso non è convergente. In altre parole, se volessimo far seguire la convergenza di un prodotto infinito dalla sua convergenza assoluta, ci vuole un pò di cautela nel definire la sua convergenza assoluta.

**Definizione III.4** Sia $\mathrm{Re}\, z_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ si dice *assolutamente convergente* se è assolutamente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$. In tal caso, grazie alla Proposizione III.2, un prodotto infinito assolutamente convergente è convergente.

**Corollario III.5** *Se* $\mathrm{Re}\, z_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora il prodotto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *è assolutamente convergente se e solo se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - 1)$ *è assolutamente convergente.*

Passiamo ora alla convergente uniforme in $x \in \Xi$, dove $\Xi$ è un sottoinsieme del piano complesso.

**Lemma III.6** *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni complesse su* $\Xi$ *che converge uniformemente a* $f$ *in* $x \in \Xi$. *Supponiamo che* $\mathrm{Re}\, f(x) \leq a$ *per ogni* $x \in \Xi$. *Allora* $\exp(f_n(x)) \to \exp(f(x))$ *uniformemente in* $x \in \Xi$.

*Dimostrazione.* Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|e^z - 1| < \varepsilon e^{-a}$ per $|z| < \delta$. Scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ per ogni $x \in \Xi$ e $n \geq n_0$. Dunque

$$\begin{aligned} |\exp(f_n(x)) - \exp(f(x))| &= \left| \frac{\exp(f_n(x))}{\exp(f(x))} - 1 \right| \exp(\mathrm{Re}\, f(x)) \\ &< \varepsilon e^{-a} \exp(\mathrm{Re}\, f(x)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Lemma III.7** *Sia* $\Xi$ *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{C}$ *e sia* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni complesse continue tali che* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *converge assolutamente e uniformemente in* $x \in \Xi$. *Allora il prodotto infinito*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

*converge assolutamente e uniformemente in $x \in \Xi$. Inoltre, $f(x) = 0$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ con $g_n(x) = -1$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ sia assolutamente convergente, uniformemente in $x \in \Xi$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|g_n(x)| < \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$ e $x \in \Xi$. Ciò implica che per tali $(n, x)$ abbiamo $\operatorname{Re}(1+g_n(x)) > 0$ e $|\log(1 + g_n(x))| \leq \frac{3}{2}|g_n(x)|$. Allora

$$h(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \log(1 + g_n(x))$$

converge uniformemente in $x \in \Xi$. Siccome $h$ è continua e $\Xi$ è compatto, $h$ è limitata, che implica l'esistenza di un'opportuna $a$ tale che $\operatorname{Re} h(x) < a$ per $x \in \Xi$. Grazie al Lemma III.6 risulta la convergenza del prodotto infinito

$$\exp(h(x)) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} (1 + g_n(x)),$$

uniformemente in $x \in \Xi$. Infine

$$f(x) = (1 + g_1(x)) \dots (1 + g_{n_0}(x)) \exp(h(x)).$$

Quindi $f(x) = 0$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ con $g_n(x) = -1$. □

**Lemma III.8** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$ e sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche in $\Omega$ tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ uniformemente in $z \in \Xi$ per ogni compatto $\Xi$ in $\Omega$. Allora $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è analitica.*

*Dimostrazione.* Sia $z \in \Omega$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset \Omega$. Allora secondo il Teorema Integrale di Cauchy abbiamo

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Siccome $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente in $z \in \overline{B_\varepsilon(z)} \subset \Omega$, risulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

In altre parole, la $f$ è analitica in $B_\varepsilon(z)$. □

**Teorema III.9** *Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche in $\Omega$, nessuna di loro $\equiv 0$. Se è assolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-1)$ uniformemente in ogni compatto di $\Omega$, allora $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge ad una funzione analitica in $\Omega$ uniformemente in ogni compatto di $\Omega$. Inoltre, se $f(a)=0$, allora $f_n(a)=0$ per un numero finito di indici $n$, mentre la molteplicità dello zero $a$ della $f$ vale la somma delle molteplicità degli zeri $a$ delle $f_n$.*

*Dimostrazione.* Sia la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-1)$ assolutamente convergente, uniformemente in ogni compatto di $\Omega$. Allora, grazie al Lemma III.7, il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge assolutamente, uniformemente in ogni compatto di $\Omega$. Inoltre, Lemma III.8 implica l'analiticità della $f$.

Supponiamo che $f(a)=0$ e che $\overline{B_a(\varepsilon)} \subset \Omega$ per un opportuno $\varepsilon > 0$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-1)$ converge uniformemente in $z \in \overline{B_a(\varepsilon)} \subset \Omega$. Dunque, grazie al Lemma III.7, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(z) = f_1(z)\ldots f_n(z)g(z)$ e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \overline{B_a(\varepsilon)} \subset \Omega$. Quindi la molteplicità dello zero $a$ della $f$ vale la somma delle molteplicità degli zeri $a$ delle $f_n$. □

# 2 Teorema di Weierstrass

Un polinomio non costante $p$ può essere fattorizzato nel seguente modo:

$$p(z) = c(z-a_1)\ldots(z-a_n),$$

dove $0 \neq c \in \mathbb{C}$, $n$ è il grado e $a_1, \ldots, a_n$ sono gli zeri (ciascuno con la propria molteplicità). Un risultato analogo vale per le funzioni intere con un numero finito di zeri. Una tale funzione $f$ ammette la fattorizzazione

$$f(z) = e^{g(z)}(z-a_1)\ldots(z-a_n),$$

dove $g$ è una funzione intera e $a_1, \ldots, a_n$ sono gli zeri (ciascuno con la propria molteplicità). Per generalizzare il risultato al caso in cui il numero di zeri è infinito ci vogliono i prodotti infiniti. Purtroppo ci sono casi in cui il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(z-a_n)$ non converge. In tal caso bisogna modificare i fattori $(z-a_n)$ per arrivare ad un prodotto infinito convergente.

Definiamo ora i cosiddetti *fattori elementari*:

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1-z, \\ E_p(z) &= (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right), \end{aligned}$$

dove $p = 1, 2, 3, \ldots$. Allora $E_p(z/a)$ ha uno zero semplice in $a$ e nessun altro zero.

**Lemma III.10** *Per* $|z| \leq 1$ *e* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *si ha* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

*Dimostrazione.* Per $p = 0$ il risultato è banale. Per $p \geq 1$ consideriamo la serie di potenze

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Allora

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \\ &= \left\{-1 + (1-z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1})\right\} \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right), \end{aligned}$$

che implica $a_1 = \ldots = a_p = 0$ e $a_k \leq 0$ per $k \geq p+1$. Di conseguenza, per $|z| \leq 1$ risulta

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left|\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k\right| = |z|^{p+1} \left|\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1}\right| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -|z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \\ &= |z|^{p+1} (1 - E_p(1)) = |z|^{p+1}. \end{aligned}$$

□

**Teorema III.11** *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di numeri complessi tali che* $a_n \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. *Supponiamo che* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *è una successione di interi non negativi tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty \qquad \text{(III.1)}$$

*per ogni* $r > 0$. *Allora il prodotto infinito*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{(III.2)}$$

*converge uniformemente in* $z \in \Xi$ *per ogni compatto* $\Xi$ *in* $\mathbb{C}$. *La funzione* $f$ *è intera che non ha altri zeri che gli* $a_n$, *di molteplicità pari al numero di volte in cui viene ripetuta* $a_n$.

*Dimostrazione.* Il Lemma III.10 implica che

$$\left|E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)-1\right| \leq \left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

per $|z| \leq r \leq |a_n|$. Per $r > 0$ esiste $n_0$ (che dipende da $r$) tale che $|a_n| \geq r$ per ogni $n \geq n_0$. Per ogni $r > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |E_{p_n}(z/a_n) - 1|$ viene maggiorata termine a termine dalla serie (III.1) per $z \in \overline{B_0(r)}$. Il Teorema III.9 implica che il prodotto infinito in (III.2) è assolutamente convergente, uniformemente in $z \in \overline{B_0(r)}$ per ogni $r > 0$. Inoltre, la $f$ risulta funzione intera. □

Siccome $|a_n| > 2r$ per ogni $n$ tranne un numero finito, abbiamo per tale $n$

$$\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Quindi si verifica la condizione sufficiente (III.1) per $p_n = n - 1$.

**Teorema III.12 (Weierstrass)** *Sia $f$ una funzione intera. Siano $m$ l'ordine dello zero della $f$ in zero (dove $m = 0$ se $f(0) \neq 0$) e $a_n$ gli altri zeri della $f$ (ciascuno con la propria molteplicità). Allora esistono una funzione intera $g$ e interi $p_n$ tali che*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Il prodotto è finito se la $f$ ha soltanto un numero finito di zeri.

*Dimostrazione.* Secondo il Teorema III.11 si possono scegliere gli interi $p_n$ tali che

$$h(z) = z^m \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

ha gli stessi zeri della $f$ con le stesse molteplicità. Dunque $f/h$ ha delle singolarità eliminabili in zero (soltanto se $m \geq 1$) e nei punti $a_n$. Quindi $f/h$ è una funzione intera senza zeri. Siccome il piano complesso è semplicemente connesso, esiste una funzione intera $g$ tale che $e^g = (f/h)$. □

Se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/|a_n|)$, allora si può prendere $p_n = 0$ dappertutto. Questa situazione si verifica nel caso degli zeri delle funzioni intere $\sin(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ e $\cos(\sqrt{z})$. Ciò vuol dire che esistono funzioni intere $g$ e $h$ tali che

$$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right),$$

$$\cos(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!} = e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right).$$

Tra poco vedremo che $g(z) \equiv h(z) \equiv 0$. Invece, se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/|a_n|^{p+1})$ per un opportuno $p = 0, 1, 2, \ldots$, si può prendere $p_n = p$ dappertutto.

# 3 Crescita delle Funzioni Intere

Sia $f$ una funzione intera. Poniamo

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

Secondo il Principio del Massimo la funzione $M_f(r)$ è crescente in $r$. Infatti, se $f$ non è una funzione costante, $M_f(r)$ è strettamente crescente in $r$. Per dimostrare la continuità di $M_f(r)$, prendiamo $r_1, r_2$ con $0 < r_1 < r_2$ e scegliamo $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ tale che $M_f(r_2) = |f(r_2 e^{i\theta_0})|$; in tal caso

$$0 < M_f(r_2) - M_f(r_1) \leq |f(r_2 e^{i\theta_0})| - |f(r_1 e^{i\theta_0})| < \varepsilon$$

se $r_2 - r_1 < \delta(\varepsilon)$. Di conseguenza, $M_f(r)$ dipende in modo continuo da $r$.

**Proposizione III.13** *Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $M_f(r) \leq cost.r^n$ per $r > 0$, allora la $f$ è un polinomio di grado $\leq n$.*

*Dimostrazione.* Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{III.3}$$

per $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione

$$g(z) = \frac{f(z) - [a_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n]}{z^{n+1}}$$

è una funzione intera. Per $r > 1$ abbiamo

$$M_g(r) \leq \frac{M_f(r)}{r^{n+1}} + \frac{|c_0| + |c_1| r + \ldots + |c_n| r^n}{r^{n+1}},$$

che tende a zero se $r \to +\infty$. Secondo il Teorema di Liouville risulta $g(z) \equiv 0$ e quindi $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$. □

Una funzione intera $f$ si dice di *ordine finito* se esiste $k > 0$ tale che

$$M_f(r) \leq e^{r^k}, \qquad r \geq r_0(k).$$

Il limite inferiore di tutte tali $k$ si dice *ordine* della $f$. In tal caso, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $r_0 > 0$ e una successione $0 < r_1 < r_2 < \ldots \to +\infty$ tali che

$$e^{r_j^{\rho-\varepsilon}} \leq M_f(r_j) \text{ per } j = 1, 2, 3, \ldots; \quad M_f(r) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} \text{ per } r > r_0.$$

Dunque

$$(\rho-\varepsilon) \leq \frac{\log\log M_f(r_j)}{\log r_j} \text{ per } j = 1, 2, 3, \ldots; \quad \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \leq \rho+\varepsilon \text{ per } r > r_0.$$

Di conseguenza,

$$\rho = \max\lim_{r\to+\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}. \tag{III.4}$$

Per $f(z) = \cos(\sqrt{z})$ e $g(z) = \sin(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ risultano

$$\begin{aligned} M_f(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{r}) = \frac{e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}}}{2}, \\ M_g(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)!} = \frac{\sinh(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} = \frac{e^{\sqrt{r}} - e^{-\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Quindi ambedue le funzioni hanno ordine $\rho = \frac{1}{2}$.

Rappresentando una funzione intera $f$ dalla sua serie di potenze (III.3), si ha

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta.$$

Quindi

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi r\, \frac{M_f(r)}{r^{n+1}} = \frac{M_f(r)}{r^{n+1}}. \tag{III.5}$$

**Proposizione III.14** *L'ordine di una funzione intera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ verifica*

$$\rho = \max\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log(1/|c_n|)}. \tag{III.6}$$

*Dimostrazione.* Essendo la $f$ di ordine finito, abbiamo $M_f(r) \leq \exp(Ar^k)$ per ogni $r > 0$ e quindi $|c_n| \leq r^{-n}\exp(Ar^k)$ per $r > 0$. Quest'ultima espressione assume il suo massimo per $r = (n/Ak)^{1/k}$ e quindi

$$|c_n| \leq \left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k}. \tag{III.7}$$

D'altra parte, sia vera la (III.7) per $n \geq n_0(k, A)$. Per $n > m_r = [2^k eAr^k]$ e $r > 0$ sufficientemente grande si ha grazie alla (III.7)

$$|c_n z^n| = |c_n| r^n \leq \left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k} \left(\frac{n}{eAk} 2^{-k}\right)^{n/k} = 2^{-n}, \qquad |z| = r$$

e dunque

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{m_r} |c_n| r^n + \sum_{n=m_r+1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{m_r} |c_n| r^n + 2^{-m_r}, \qquad |z| = r.$$

Ora sia $\mu(r) = \max_n |c_n| r^n$. Allora

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq (1 + m_r)\mu(r) + 2^{-m_r} \leq (1 + 2^k eAkr^k)\mu(r) + 2^{-m_r}.$$

Siccome $\mu(r) \leq \max_n \{(eAk/n)^{n/k} r^n$ e quest'ultima espressione assume il suo massimo per $n = Akr^k$, abbiamo $\mu(r) \leq \exp(Ar^k)$, che implica

$$M_f(r) \leq (1 + 2^k eAkr^k) e^{Ar^k} + 2^{-m_r} \leq (2 + 2^k eAkr^k) e^{Ar^k} \leq e^{Br^k}$$

per un'opportuna costante $B > A > 0$. $\square$

Consideriamo $f(z) = \cosh(\sqrt{z})$, dove $c_n = (-1)^n/(2n)!$ Allora $\log(1/|c_n|) = \log[(2n)!] = \sum_{k=1}^{2n} \log k$. Calcolando gli integrali $\int_1^{2n} \log x \, dx$ e $\int_1^{2n+1} \log x \, dx$ utilizzando le somme di Riemann inferiori e superiori, otteniamo

$$\int_1^{2n} \log x \, dx < \sum_{k=1}^{2n} \log k < \int_1^{2n+1} \log x \, dx,$$

oppure

$$2n \log(2n) - 2n + 1 < \sum_{k=1}^{2n} \log k < (2n+1) \log(2n+1) - 2n.$$

Dunque

$$\frac{n \log n}{(2n+1)\log(2n+1) - 2n} < \frac{n \log n}{\log(1/|c_n|)} < \frac{n \log n}{2n \log(2n) - 2n + 1}.$$

Siccome le parti a sinistra e destra tendono a $\frac{1}{2}$ se $n \to \infty$, otteniamo $\rho = \frac{1}{2}$. Di conseguenza, $\cosh(\sqrt{z})$ è una funzione intera di ordine $\frac{1}{2}$. Nella stessa maniera si dimostra che $\sin(\sqrt{z})/\sqrt{z})$ (dove $c_n = (-1)^n/(2n+1)!$) è una funzione intera di ordine $\frac{1}{2}$.

**Definizione III.15** Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di numeri complessi diversi da zero tali che $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. Allora

$$\inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} < +\infty \right\}$$

si dice *esponente di convergenza* della successione. L'esponente di convergenza vale $+\infty$ se è divergente $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\lambda}$ per ogni $\lambda > 0$.

Per $a_n = (n^2\pi^2)^{-1}$ abbiamo esponente di convergenza $\frac{1}{2}$. Noi collegheremo l'ordine di una funzione intera $f$ ha l'esponente di convergenza della successione dei suoi zeri diversi da zero.

**Proposizione III.16** *Data una successione* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di numeri complessi diversi da zero tali che* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$*, sia* $n(r) = \#\{k : |a_k| < r\}$*. Allora il suo esponente di convergenza vale*

$$\rho_1 = \max_{r\to+\infty}\lim \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

*Dimostrazione.* Ovviamente, per $\lambda > \rho_0$, essendo $\rho_0$ l'esponente di convergenza,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} = \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^{\lambda}}.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t^{\lambda}} = \frac{n(r)}{r^{\lambda}} + \lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt,$$

quindi è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt. \tag{III.8}$$

Dunque per $\varepsilon > 0$ esiste $r_0(\varepsilon)$ tale che per $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$\varepsilon > \lambda \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt \geq \lambda n(r) \int_r^{\infty} \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{n(r)}{r^{\lambda}},$$

oppure $r^{-\lambda} n(r) \to 0$ se $r \to +\infty$. Di conseguenza, $\rho_1 \leq \lambda$ e quindi $\rho_1 \leq \rho_0$.

D'altra parte, per $t > 0$ abbastanza grande si ha

$$n(t) \leq t^{\rho_1 + (\varepsilon/2)}.$$

Quindi l'integrale generalizzato (III.8) converge per $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$. Di conseguenza, $\rho_0 \leq \rho_1$. □

Stimiamo ora $E_p(u)$.

**Lemma III.17** *Per* $p = 1, 2, 3, \ldots$ *e* $u \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$\log(|E_p(u)|) \leq 3e(2 + \log p)\frac{|u|^{p+1}}{1 + |u|}.$$

*Per* $p = 0$ *abbiamo*

$$\log(|E_0(u)|) \leq \log(1 + |u|).$$

*Dimostrazione.* Siccome $E_0(u) = 1 + u$, l'ultima parte del lemma segue subito. Ora sia $p \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned}
\log(|E_p(u)|) &= \mathrm{Re}\left[\log(1-u) + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right] \\
&= -\mathrm{Re}\left[\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{u^k}{k}\right] \leq \frac{|u|^k}{k} \leq \frac{|u|^{p+1}}{(p+1)(1-|u|)} \leq |u|^{p+1}
\end{aligned}$$

per $|u| \leq (p/(p+1))$. Per $|u| > (p/(p+1))$ la disuguaglianza $\log(1+|u|) \leq |u|$ implica

$$\begin{aligned}
\log(|E_p(u)|) &\leq 2|u| + \frac{|u|^2}{2} + \ldots + \frac{|u|^p}{p} \\
&= |u|^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}|u|^{-1} + \ldots + \frac{1}{2}|u|^{2-p} + 2|u|^{1-p}\right) \\
&\leq |u|^p\left[2\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p-k}\right] \\
&\leq |u|^p\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\left(2 + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k}\right) \\
&\leq |u|^p\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\left(2 + \int_1^p \frac{dx}{x}\right) \\
&\leq |u|^p e(2 + \log p) \leq \frac{|u|^p}{1+|u|}3e(2 + \log p).
\end{aligned}$$

□

**Lemma III.18** *Se è convergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)}$, *allora il corrispondente prodotto infinito* $\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n)$ *verifica la disuguaglianza*

$$\log(|\Pi(z)|) \leq k_p\left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}}\,dt + r\int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}}\,dt\right),$$

*dove* $k_0 = 1$, $k_p = 3e(p+1)(2 + \log p)$ *per* $p \in \mathbb{N}$, $r = |z|$ *e* $z \in \mathbb{C}$.

*Dimostrazione.* Dal Lemma III.17 segue per $p = 1, 2, 3, \dots$

$$\log(|\Pi(z)|) \leq 3e(2+\log p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{p+1}}{|a_n|^p(|a_n|+r)} = 3e(2+\log p) r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^p(t+r)}.$$

Utilizzando $\lim_{r\to+\infty} r^{-(p+1)} n(r) = 0$ [che segue dalla convergenza della serie] e integrando per parti risulta per $p = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \log(|\Pi(z)|) &\leq 3e(2+\log p) r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{pr + (p+1)t}{t^{p+1}(t+r)^2} n(t)\, dt \\ &\leq 3e(2+\log p)(p+1) r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t+r)}\, dt \\ &\leq 3e(2+\log p)(p+1) r^p \left( \int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}}\, dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}}\, dt \right). \end{aligned}$$

□

**Teorema III.19 (Borel)** *L'intero non negativo $p$ nel prodotto infinito*

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n) \tag{III.9}$$

*verifica $p \leq \rho_1$, dove $\rho_1$ è l'esponente di convergenza della successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

*Dimostrazione.* Dal Lemma III.18 segue

$$\log(|\Pi(z)|) \leq C_\lambda k_p r^p \left( \int_0^r t^{\lambda-p-1}\, dt + r \int_r^{\infty} t^{\lambda-p-2}\, dt \right) = B_\lambda C_\lambda r^\lambda,$$

dove

$$B_\lambda = k_p \left( \frac{1}{\lambda - p} + \frac{1}{p+1-\lambda} \right).$$

In altre parole, l'ordine $p$ del prodotto $\Pi(z)$ verifica $p \leq \lambda$ per ogni $\lambda > \rho_1$, cioè $p \leq \rho_1$. □

Ora dimostriamo che l'esponente di convergenza $\rho_1$ della successione degli zeri di una funzione intera $f$ verifica $\rho_1 \leq \rho$, dove $\rho$ è l'ordine della $f$.

**Lemma III.20** *Sia $f$ analitica in un intorno del disco $\overline{B_{er}(0)}$ e sia $f(0) = 1$. Allora*

$$n_f(r) \leq \log M_f(er).$$

*Dimostrazione.* Dalla (I.11) segue

$$n_f(r) = n_f(r) \int_r^{er} \frac{dt}{t} \leq \int_r^{er} \frac{n_f(t)}{t}\, dt \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(ere^{i\theta})|)\, d\theta \leq \log M_f(er),$$

che dimostra il lemma. □

**Teorema III.21** *L'esponente di convergenza della successione degli zeri di una funzione intera è al massimo uguale al suo ordine.*

*Dimostrazione.* Supponiamo prima che $f(0) = 1$. Dal Lemma III.20 segue che

$$\rho_1 = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log n_r(r)}{\log r} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M_f(er)}{\log er} = \rho,$$

che dimostra il teorema. Per un valore di $f(0)$ qualsiasi consideriamo

$$f_\lambda(z) = (\lambda!) z^{-\lambda} \frac{f(z)}{f^{(\lambda)}(0)}$$

al posto della $f$, poichè la $f_\lambda$ ha lo stesso ordine e lo stesso esponente di convergenza della $f$. □

**Teorema III.22 (Hadamard)** *Sia $f$ una funzione intera di ordine finito $\rho$. Allora*

$$f(z) = z^m\, e^{P(z)} \prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

*dove $m$ è l'ordine dello zero di $f$ in zero, $a_n$ sono gli altri zeri e $P(z)$ è un polinomio di grado $\leq p \leq \rho$.*

*Dimostrazione.* Per l'ordine $p$ nel prodotto (III.9) abbiamo $p \leq \rho_1$, secondo il Teorema III.19. D'altra parte, $\rho_1 \leq \rho$, l'ordine della funzione intera $f$, secondo il Teorema III.21. Quindi $p \leq \rho$, l'ordine della $f$.

Ci rimane dimostrare che la funzione $g(z)$ nell'esponente è un polinomio di grado $q$ con $q \leq \rho$. Sia

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{z^m \Pi(z)},$$

una funzione intera senza zeri. Quindi $\psi(z) = e^{g(z)}$ per una funzione intera $g$. Allora la $\psi$ ha ordine $\leq \rho$ e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, verifica

$$\log(|\psi(z)|) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \qquad |z| = r,$$

per $r$ abbastanza grande. Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$M_g(r) \leq r^{\rho+2\varepsilon}$$

per $r$ abbastanza grande e quindi la $g$ è un polinomio di grado $\leq \rho$. □

Se l'ordine $\rho \in (0,1)$, il Teorema di Hadamard implica la rappresentazione

$$f(z) = \text{cost.} z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

dove il numero di zeri è per forza infinito. Nel caso contrario la $f$ sarebbe un polinomio. Si vede subito che la costante vale $\lim_{z\to 0}(z^{-m}f(z))$. Applicando il Teorema di Hadamard a due funzioni intere note di ordine $\frac{1}{2}$, troviamo

$$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right), \qquad \cos(\sqrt{z}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right).$$

Di conseguenza,

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \qquad \cos(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right). \tag{III.10}$$

Per $z = (\pi/2)$ risulta l'illustre formula di Wallis (1656)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{2.2.4.4.6.6.\ldots.(2m)(2m)}{1.3.3.5.5.7.\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

**Esempio III.23** Consideriamo ora la funzione intera di ordine 1

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

dove $\gamma$ è un'opportuna costante tale che $\Gamma(1) = 1$. In altre parole,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty} E_1(-z/n).$$

Grazie al Lemma III.10 e al Teorema III.11, il prodotto infinito converge uniformemente in $z$ in ogni compatto del piano complesso. Gli zeri della funzione intera $1/\Gamma(z)$ sono $-1, -2, -3, \ldots$, essendo tutti semplici. Siccome $\Gamma(1) = 1$, scegliamo $\gamma = -\log(c)$, dove

$$c = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-1/n} > 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\sum_{k=1}^{\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-1/k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - \log(n+1)\right),
\end{aligned}$$

la cosiddetta costante di Eulero [$\gamma \approx 0.5772$]. Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= z\,e^{\gamma z} \lim_{n\to\infty} \frac{z+k}{k} e^{-z/k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!} e^{z(\gamma-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!} n^{-z}\, e^{z(\gamma-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}+\log(n))} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\,n^z}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\frac{z}{\Gamma(z+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\,n^z}\,\frac{z+1+n}{n} = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= z \lim_{n\to\infty} \frac{(z+1)\ldots(z+n)}{n!}\,\frac{(1-z)(2-z)\ldots(n-z)}{n!}\,\underbrace{\frac{n+1-z}{n^z\,n^{1-z}}}_{\to 1} \\
&= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.
\end{aligned}$$

# Capitolo IV

# Approssimazione Razionale

In questo capitolo discutiamo l'approssimazione razionale delle funzioni analitiche (ossia il cosiddetto Teorema di Runge) e il Teorema di Mittag-Lefler sulla costruzione delle funzioni meromorfe delle sue parti principali.

## 1 Teorema di Runge

L'obiettivo è la dimostrazione del Teorema di Runge sull'uniforme approssimazione delle funzioni analitiche da quelle razionali. Iniziamo prima con un lemma sul riempiemento dagli aperti da unasuccessione di compatti.

**Proposizione IV.1** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$. Allora esiste una successione $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ di compatti con le seguenti proprietà:*

(*a*) *Per $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K_n$ è contenuto nella parte interna di $K_{n+1}$.*

(*b*) *Ogni compatto $K$ in $\Omega$ è contenuto in un opportuno $K_n$.*

(*c*) *Ogni componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ contiene un componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.*

(*d*) *$\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

*Dimostrazione.* Sia

$$K_n = \overline{B_n(0)} \cap \left\{ z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Allora $K_n \subset \Omega$ e $K_n$ è chiuso e limitato e quindi compatto. Inoltre,

$$K_n \subset \underbrace{B_{n+1}(0) \cap \left\{ z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{n+1} \right\}}_{\text{aperto in } \Omega} \subset K_{n+1}. \qquad \text{(IV.1)}$$

Quindi, se $K$ è un compatto in $K$, gli aperti in (IV.1) costituiscono un ricoprimento aperto di $K$ da una successione crescente di aperti. Dunque esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$K \subset B_{m+1}(0) \cap \left\{ z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{m+1} \right\} \subset K_{m+1}.$$

□

**Teorema IV.2 (Runge)** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$ e sia $E \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tale che la sua chiusura $\overline{E}$ ha un'intersezione non vuota con ogni componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Allora per ogni funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$, ogni compatto $K \subset \Omega$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione razionale $R(z)$ con i suoi poli in $E$ tale che*

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

**Corollario IV.3** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$ tale che $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ è connesso. Allora per ogni funzione analitica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ esiste una successione $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ di polinomi tale che $p_n(z)$ tende a $f(z)$ uniformemente in $z$ in ogni compatto di $\Omega$.*

Il Corollario IV.3 è immediato dal Teorema IV.2 (prendendo $E = \{\infty\}$ and utilizzando che le funzioni razionali con un singolo polo all'infinito sono i polinomi non costanti). La dimostrazione del Teorema di Runge IV.2 richiede la dimostrazione di due lemmi chiave.

**Lemma IV.4** *Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva rettificabile e sia $K$ un compatto disgiunto da $\gamma[0,1]$. Per $f : \gamma[0,1] \to \mathbb{C}$ continua e $\varepsilon > 0$, esiste una funzione razionale $R(z)$ con tutti i suoi poli sulla curva $\gamma[0,1]$ tale che*

$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - R(z) \right| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

*Dimostrazione.* Siccome $\gamma[0,1] \cap K = \emptyset$, esiste un numero $r$ tale che $0 < r < \operatorname{dist}(K, \gamma)$. Ne risulta per $t, s \in [0,1]$ e $z \in K$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| &\le \frac{1}{r^2} \left| f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(s))\gamma(t) - z[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))] \right| \\
&\le \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))|\, |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{1}{r^2} |\gamma(t)|\, |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \\
&+ \frac{|z|}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \\
&\le \frac{c}{r^2} \left( |\gamma(t) - \gamma(s)| + 2|f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))| \right),
\end{aligned}$$

dove $K \cup \gamma[0,1] \cup \mathrm{Im}(f) \subset B_c(0)$. Grazie all'uniforme continuità di $\gamma$ e $f \circ \gamma$, esistono $0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Var}(\gamma)}, \qquad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \; z \in K.$$

Sia

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_{j-1})) \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{\gamma(t_{j-1}) - z},$$

una funzione razionale che ha i suoi poli nei punti $\gamma(0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1})$. Allora per $z \in K$ risulta

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw - R(z) \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1})) - z} \right] d\gamma(t) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Var}(\gamma)} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} d|\gamma|(t) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma IV.5** *Sia $K$ un compatto in $\mathbb{C}$ e siano $a, b$ due punti in $\mathbb{C} \setminus K$ tali che*

$$|a - b| \leq \frac{1}{2} dist(b, K).$$

*Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni funzione razionale $R(z)$, che ha il punto $a$ come il suo unico polo, esiste una funzione razionale $Q(z)$, che ha il punto $b$ come il suo unico polo e verifica*

$$|Q(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

*Dimostrazione.* **Caso $R(z) = (z - a)^{-n}$ per $n \in \mathbb{N}$.** Per ipotesi,

$$\left| \frac{a - b}{z - b} \right| \leq \frac{1}{2}, \qquad z \in K.$$

Quindi

$$\frac{1}{(z - a)^n} = \frac{1}{(z - b)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + n - 1}{k} \left( \frac{a - b}{z - b} \right)^k, \tag{IV.2}$$

la quale viene maggiorata (per $z \in K$) dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + n - 1}{k} \frac{1}{2^k},$$

mentre

$$\frac{\binom{k+n}{k+1}2^{-k-1}}{\binom{k+n-1}{k}2^{-k}} = \frac{1}{2}\frac{k+n}{k+1} \to \frac{1}{2}, \qquad k \to +\infty.$$

Quindi la serie di funzioni in (IV.2) è uniformemente convergente in $z \in K$. Dunque per $N$ abbastanza grande la funzione razionale

$$Q(z) = \frac{1}{(z-b)^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n-1}{k}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$$

ha il punto $b$ come il suo unico polo e verifica $|Q(z) - R(z)| < \varepsilon$ per $z \in K$.

**Caso generale**. Se

$$R(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{(z-a)^j} + p(z),$$

dove $p(z)$ è un polinomio, allora per $j = 1, \ldots, m$ esiste una funzione razionale $Q_j(z)$ con il suo unico polo a $b$ tale che

$$\left|\frac{1}{(z-a)^j} - Q_j(z)\right| < \frac{\varepsilon}{m|r_j|}, \qquad z \in K.$$

Se $r_j = 0$, scegliamo ovviamente $Q_j(z) \equiv 0$. Allora

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{m} r_j Q_j(z) + p(z)$$

è una funzione razionale con il suo unicopolo a $b$ tale che

$$|Q(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

□

Dimostriamo infine il Teorema di Runge IV.2.

**Dimostrazione** (**del Teorema IV.2**) Costruiamo prima una successione $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ di compatti in $\Omega$ come nella Proposizione IV.1. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $K$ è contenuto nella parte interna di $K_N$. Poniamo

$$\begin{aligned} H = &\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus K_N) \geq \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z, K)\} \\ &\cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus K_N) \geq \frac{1}{2}(K, \mathbb{C}\setminus K_N)\}. \end{aligned}$$

Allora $H$ è chiuso e
$$K \subset H \subset \text{int}(K_N),$$
la parte interna di $K_N$. Dalla compattezza di $K_n$ segue quella di $H$. Dal Lemma IV.4 segue l'esistenza di una funzione rzionale $Q(z)$ con tutti i suoi poli contenuti in $\text{int}(K_N) \setminus H$ tale che
$$|f(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in H.$$
Scriviamo ora $Q(z)$ come la somma $Q_1(z) + \ldots + Q_m(z)$ di funzioni razionali $Q_j(z)$ con un singolo polo. Sia $a \in \text{int}(K_N) \setminus H$ il polo di $Q_1(z)$.

Dalla compattezza della frontiera $\partial K_N$ di $K_N$ segue l'esistenza di $b \in \partial K_N$ tale che $|a - b| = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus K_N)$. Siccome $a \notin H$, abbiamo
$$|a - b| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N) \leq \frac{1}{2}\text{dist}(b, K);$$
l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che $\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N) = \text{dist}(K, \partial K_N)$. Scegliamo ora $b' \in \mathbb{C} \setminus K_N$ tale che $|b - b'| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N)$, il quale implica che
$$|b - b'| < \frac{1}{2}\text{dist}(b', K).$$
Sia $D$ il componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus K_N$ che contiene il punto $b'$. Secondo la costruzione della Proposizione IV.1, $D$ contiene un componente connesso di $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$; in particolare, $D \cap \overline{E} \neq \emptyset$. Scegliamo ora $c \in D \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

**Caso** $c \neq \infty$. Siccome $b'$ e $c$ appartengono allo stesso aperto connesso (e quindi connesso per archi) $D$ in $\mathbb{C}_\infty$, esistono $s_2, \ldots, s_p \in D$ tali che $s_2 = b'$, $s_p = c$ e
$$|s_k - s_{k+1}| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N), \qquad 2 \leq k \leq p - 1. \tag{IV.3}$$
Siano $s_0 = a$ e $s_1 = b$. Scegliamo $s_{p+1} \in E$ tale che
$$|c - s_{p+1}| < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus K_N). \tag{IV.4}$$
Allora
$$|s_k - s_{k+1}| < \frac{1}{2}\text{dist}(s_{k+1}, K). \tag{IV.5}$$
Infatti per $2 \leq k \leq p - 1$ la (IV.5) segue da (IV.3)-(IV.4) e da $\{s_k : 2 \leq k \leq p + 1\} \subset \mathbb{C} \setminus K_N$. Per $k = 0, 1$ la (IV.5) coincide con le stime precedenti per $|a - b|$ e $|b - b'$, rispettativamente.

Applicando il Lemma IV.5 troviamo le funzioni razionali $S_1(z), \ldots, S_{p+1}(z)$ tali che $s_k$ è l'unico polo di $S_k(z)$ e
$$|S_k(z) - S_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{2m(p+1)}, \qquad z \in K,\ 0 \leq k \leq p,$$

mentre $S_0(z) = Q_1(z)$. Sia $R_1(z) = S_{p+1}(z)$. Allora $R_1(z)$ è una funzione razionale con l'unico polo $s_{p+1}$ appartenente ad $E$ e tale che

$$|Q_1(z) - S_1(z)| \leq \sum_{k=0}^{p} |S_k(z) - S_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

**Caso** $c = \infty$. Si segua la stessa procedura utilizzando la distanza lungo la sfera Riemanniana $\mathbb{C}_\infty$ anziché quella nel piano complesso.

Per concludere la dimostrazione applichiamo la stessa procedura a tutti i termini $Q_1(z), \ldots, Q_m(z)$ per arrivare a funzioni razionali $R_1(z), \ldots, R_m(z)$ con tutti i loro poli in $E$ tali che

$$|Q_j(z) - R_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in K.$$

Poniamo ora $R(z) = R_1(z) + \ldots + R_m(z)$. Allora $R(z)$ ha tutti i suoi poli in $E$ e

$$|R(z) - f(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

■

## 2 Teorema di Mittag-Lefler

Dimostriamo ora il seguente teorema.

**Teorema IV.6 (Mittag-Lefler)** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{C}$, $\{z_k\}$ una successione in $\Omega$ senza punti di accumulazione all'interno di $\Omega$, e*

$$S_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} A_{jk}(z - z_k)^{-j}.$$

*Allora esiste una funzione meromorfa $f$ in $\Omega$ i cui poli sono esattamente i punti $z_k$ e le cui parti principali in $z_k$ sono esattamente $S_k(z)$.*

*Dimostrazione.* Costruiamo i sottoinsiemi compatti $K_n$ di $\Omega$ come nella Proposizione IV.1. Allora ogni $K_n$ contiene soltanto un numero finito di punti $z_k$. Definiamo gli insiemi di interi $I_n$ (disgiunti tra loro) nel seguente modo:

$$I_1 = \{k : a_k \in K_1\}, \qquad I_n = \{k : a_k \in K_n \setminus K_{n-1}\},$$

per $n \geq 2$. In altre parole, $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Sia

$$f_n(z) = \sum_{k \in I_n} S_k(z),$$

dove $f_n(z) = 0$ se $I_n = \emptyset$. Allora $f_n$ è una funzione razionale con poli in $K_n \setminus K_{n-1}$. Siccome $f_n$ è analitica in un intorno di $K_{n-1}$, grazie al Teorema di Runge esiste una funzione razionale $R_n(z)$ con poli in $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tale che

$$|f_n(z) - R_n(z)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad z \in K_{n-1}.$$

Sia

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n(z) - R_n(z)]. \tag{IV.6}$$

Allora la $f$ è la funzione meromorfa enunciata nel teorema.

Infatti, sia $K$ un compatto contenuto in $\Omega \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Allora $K \subset K_N$ per un $N \in \mathbb{N}$. Ne risulta che

$$|f_n(z) - R_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n \geq N,\ z \in K.$$

Quindi la serie di funzioni (IV.3) è uniformemente convergente in $z$ in ogni compatto di $\Omega \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Siccome ogni suo termine è analitico in $\Omega \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, ne segue che la $f$ è meromorfa in $\Omega$. Inoltre, per $k \in \mathbb{N}$ fisso esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|a_j - a_k| < \varepsilon$ per $j \neq k$. Dunque $f(z) - S_k(z)$ è analitica in $z \in B_{a_k}(\varepsilon)$. Di conseguenza, $a_k$ è un polo della funzione $f$ e $S_k(z)$ è la corrispondente parte principale. $\square$

Qual'è la funzione meromorfa (in $\mathbb{C}$) più semplice che ha poli semplici a tutti gli interi $n$ con parte principale $1/(z-n)$? Siccome per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-n)^{-1}$ è divergente, non possiamo semplicemente prendere la somma delle parti principali. La soluzione del problema è

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \tag{IV.7}$$

dove $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Siccome [vedi la (III.10)]

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

ne segue facilmente che $f(z) = \pi \mathrm{cotan}(\pi z)$.

**Esempio IV.7** Dimostriamo ora di nuovo che la parte a destra della (IV.7) è uguale a $\pi\mathrm{cotan}(\pi z)$. Infatti, sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $z \in \mathbb{C}$

con poli semplici in $z_1, \ldots, z_N$ e corrispondenti residui $a_1, \ldots, a_N$. Allora per $C_N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_N\}$ con $R_N = \max(|z_1|, \ldots, |z_N|)$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{z_n - z},$$

dove abbiamo applicato il Teorema Integrale di Cauchy alla funzione analitica $g(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{N} (a_n/(z - z_n))$. Dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{z f(w)}{w(w - z)}\, dw = f(z) - f(0) + \sum_{n=1}^{N} a_n \left( \frac{1}{z_n - z} - \frac{1}{z_n} \right). \qquad \text{(IV.8)}$$

Consideriamo ora una funzione meromorfa $f(z)$ in $z \in \mathbb{C}$ con poli semplici in $z = z_n$ con corrispondenti residui $a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Sia $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ una successione di raggi tali che $|z_j| > R_N > |z_k|$ per $j > N \geq k$ e $f(z)$ è limitata in $z \in \cup_{N=1}^{\infty} C_N$. In tal caso l'integrale nella parte a sinistra della (IV.8) si annulla (per $z \in \mathbb{C}$ fisso) se $N \to +\infty$. Se è convergente la serie a destra (per $z \neq z_n$), risulta

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right).$$

Discutiamo ora la funzione $f(z) = \pi \text{cotan}(\pi z) - (1/z)$ e $R_N = N + \frac{1}{2}$. Allora $f(0) = 0$ e

$$\pi \text{cotan}(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \right),$$

implicando la (IV.7).

# Bibliografia


[1] M.J. Ablowitz and A.S. Fokas, *Complex Variables*: *Introduction and Applications*, Second ed., Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.

[3] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable* II, Graduate Texts in Mathematics **159**, Springer, Berlin, 1995.

[4] Enrico Giusti, *Analisi Matematica* 1-2 (due volumi), Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[5] B.Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Transl. Math. Monographs **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.

[6] A.I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vols. 1-3, Chelsea Publ., New York, 1965.

[7] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third ed., McGraw-Hill, New York, 1976. Esiste la traduzione italiana.

[8] Sebastiano Seatzu, *Dispense di Matematica Applicata*, Cap. I: *Analisi Complessa*, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari, 2007.

[9] William T. Shaw, *Recovering holomorphic functions from their real or imaginary parts without the Cauchy-Riemann equations*, SIAM Review **46**(4), 717–728 (2004).