Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y^{(2)} = 0.$$

Soluzione: Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ si arriva all'equazione caratteristica $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, cioè $\lambda^2(\lambda+1)^3 = 0$ con lo zero doppio $\lambda = 0$ e lo zero triplo $\lambda = -1$. Quindi $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + c_5 x^2 e^{-x}$.

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{1}{x}\, y' - 3\frac{1}{x^2}\, y = 2x^3,$$

osservando che $y_1(x) = (1/x)$ e $y_2(x) = x^3$ sono soluzioni della corrispondente equazione omogenea. **Soluzione**: Utilizzando il metodo della variazione dei parametri poniamo $y(x) = c_1(x)x^{-1} + c_2(x)x^3$, dove

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & x^3 \\ -x^{-2} & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x^3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice Wronskiana vale $4x$ e quindi

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4x} \begin{pmatrix} 3x^2 & -x^3 \\ x^{-2} & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^5 \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix}.$$

Dunque $c_1(x) = c_1 - \frac{1}{12}x^6$ e $c_2(x) = c_2 + \frac{1}{4}x^2$. Dunque

$$y = \left[c_1 - \frac{1}{12}x^6\right] x^{-1} + \left[c_2 + \frac{1}{4}x^2\right] x^3 = c_1 x^{-1} + c_2 x^3 + \frac{1}{6}x^5.$$

2B. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[3^n + 2^n](-5x)^n}{2^n + 5^n},$$

[1] 04.05.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà gli esercizi 2A, 3A e 6A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà gli esercizi 2B, 3B e 6B.

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente? **Soluzione**: Per il raggio di convergenza troviamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \frac{[3^{n+1}+2^{n+1}]5^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} \frac{2^n+5^n}{[3^n+2^n]5^n} \\ &= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{[1+(2/3)^{n+1}][1+(2/5)^n]}{]1+(2/5)^{n+1}][1+(2/3)^n]} = 3,\end{aligned}$$

e dunque $R = \frac{1}{3}$. La serie di potenze è assolutamente convergente se $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ e divergente se $x < -\frac{1}{3}$ e se $x > \frac{1}{3}$. Per $x = \pm\frac{1}{3}$ la serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1+(2/3)^n}{1+(2/5)^n}.$$

Siccome il suo termine generale non tende a zero se $n \to \infty$, è divergente anche per $x = \pm\frac{1}{3}$.

3A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale[2]

$$y' = -\frac{x(y^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si riesce (e poichè si o poichè no) trovare una soluzione $y : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale tale che $y(1) = 1$? **Soluzione**: La separazione delle variabili conduce all'equazione $\frac{1}{y^2+1}\,dy = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Quindi

$$\arctan(y) = \sqrt{1-x^2} + \text{cost.}$$

Dunque $y = \tan(\text{cost.} + \sqrt{1-x^2})$. Malgrado il fatto che l'equazione differenziale è $y' = f(x,y)$ con una f che non è neanche definita in $(x,y) = (1,1)$, esiste la funzione $y = \tan(\frac{\pi}{4} + \sqrt{1-x^2})$ continua per $x \in [-1,1]$ tale che $y' = f(x,y)$ per $x \in (-1,1)$.

3B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = \cosh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}]$ per $-\frac{1}{2}T \le x < \frac{1}{2}T$. $-T/2 < x \le 0$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

[2] La soluzione generale è da rappresentare nella forma $y = F(x, \text{cost.})$.

b. È uniforme (in $x \in \mathbb{R}$) la convergenza della sua serie di Fourier? Poichè si o poichè no?

c. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Siccome la f è pari, abbiamo $b_k = 0$, mentre

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \cosh(x)\,dx = \frac{4}{T}\sinh(T/2);$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \cosh(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx \\
&= \frac{2}{\pi k}\left[\cosh(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{T/2} \sinh(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx \\
&= \left[\frac{T}{\pi^2 k^2}\sinh(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \frac{T}{\pi^2 k^2}\int_0^{T/2} \cosh(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx \\
&= \frac{T}{\pi^2 k^2}(-1)^k \sinh(T/2) - \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} a_k,
\end{aligned}$$

e quindi $a_k = \frac{T}{\pi^2 k^2}(-1)^k \sinh(\frac{T}{2})\left[1 + \frac{T^2}{4\pi^2 k^2}\right]^{-1}$. La somma

$$f(x) \stackrel{?}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)$$

vale $f(x)$ (periodo T). Siccome la funzione f è continua e regolare a tratti, la sua serie di Fourier è uniformemente convergente in $x \in \mathbb{R}$.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\left(e^{2x} + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(1 + 3y^2 - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy.$$

a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| > 0\}.$$

Se esiste, costruirne una primitiva.

b. Esiste una primitiva nel dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$? Perchè esiste o perchè non esiste?

Soluzione: La forma differenziale è chiusa, poichè

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+3y^2-\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Siccome $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| > 0\}$ è convesso e quindi semplicemente connesso, è esatta la forma differenziale. Risolvendo le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2x}+\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=1+3y^2-\frac{x}{x^2+y^2},$$

risulta prima

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{2x}+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+g(y),$$

dove $g(y)$ è una costante di integrazione. Sostituendolo nella seconda equazione si ha $g'(y) = 1+3y^2$ e quindi $g(y) = y + y^3 + \text{cost}$. Per $(x,y) \in \Omega$ arriviamo alla primitiva

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{2x}+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+y+y^3+\text{cost}.$$

Per stabilire se è esatta la forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si faccia un'integrazione curvilinea lungo la circonferenza unitaria, dove la forma differenziale ha i componenti

$$\left(e^{2\cos\theta}+\sin\theta, 1+3\sin^2\theta-\cos\theta\right)$$

in coordinate polari. Quest'integrale curvilineo vale

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\left[-\left(e^{2\cos\theta}+\sin\theta\right)\sin\theta+\left(1+3\sin^2\theta-\cos\theta\right)\cos\theta\right]d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2\cos\theta}-\frac{1}{2}\exp(2\sin\theta)+\sin\theta+\sin^3\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\right]_0^{2\pi}=-2\pi. \end{aligned}$$

Di conseguenza, non può essere esatta la forma differenziale nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Calcolare la lunghezza della curva spaziale definita in coordinate cilindriche da

$$\rho(\theta) = e^{-\theta}, \qquad z(\theta) = e^{-\theta}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Soluzione: Lunghezza: $\varphi(\theta) = (e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\sin(\theta), e^{-\theta})$. Dunque

$$L = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \big[(-e^{-\theta}[\cos(\theta) + \sin\theta])^2$$
$$+ (e^{-\theta}[\cos(\theta) - \sin\theta])^2 + (-e^{-\theta})^2\big]^{1/2}\, d\theta = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{3}[1 - e^{-2\pi}].$$

6A. Calcolare il volume del solido rinchiuso tra le coniche di equazione $z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. **Soluzione**: In coordinate cilindriche abbiamo le coniche di equazione $z = 1 + r$ e $z = 4 - 2r$. Cercando l'intersezione risulta $1 + r = 4 - 2r$, cioè $r = 1$ e $z = 2$. Quindi l'intersezione è la circonferenza $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 2\}$. Inoltre, per $0 \le r \le 1$ abbiamo $1 + r \le 4 - 2r$. Per il volume risulta

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,[(4 - 2r) - (1 + r)]\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \big[3r - 3r^2\big]\, dr = \pi. \end{aligned}$$

6B. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(8)} - y = 0.$$

Soluzione: Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ si arriva all'equazione caratteristica $\lambda^8 - 1 = 0$, cioè $z = \cos(\frac{2\pi k}{8} + i \sin\frac{2\pi k}{8})$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Cioè, $z = 1, \frac{1}{2}(1 + i)\sqrt{2}, i, \frac{1}{2}(-1 + i)\sqrt{2}, -1, \frac{1}{2}(-1 - i)\sqrt{2}, -i, \frac{1}{2}(1 - i)\sqrt{2}$. Quindi

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{1}{2}x\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2}) + c_3 e^{\frac{1}{2}x\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2}) + c_4\cos(x)$$
$$+ c_5\sin(x) + c_6 e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{2}x\sqrt{2}) + c_7 e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{2}}\sin(\frac{1}{2}x\sqrt{2}) + c_8 e^{-x}.$$