Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0.$$

Soluzione: Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ si arriva all'equazione caratteristica $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$, cioè $(\lambda^2 + 4)^2 = 0$ con gli zeri doppi $\pm 2i$. Quindi $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 x \cos(2x) + c_4 x \sin(2x)$.

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{1}{x}\, y' + \frac{1}{x^2}\, y = x,$$

osservando che $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x \log(|x|)$ sono soluzioni della corrispondente equazione omogenea. **Soluzione**: Utilizzando il metodo della variazione dei parametri poniamo $y(x) = c_1(x)x + c_2(x)x \log|x|$, dove

$$\begin{pmatrix} x & x\log|x| \\ 1 & 1+\log|x| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice Wronskiana vale x e quindi

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1+\log|x| & -x\log|x| \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\log|x| \\ x \end{pmatrix}.$$

Dunque $c_1(x) = c_1 - \frac{1}{2}x^2 \log|x| + \frac{1}{4}x^2$ e $c_2(x) = c_2 + \frac{1}{2}x^2$. Dunque $y = \left[c_1 - \frac{1}{2}x^2 \log|x| + \frac{1}{4}x^2\right] x + \left[c_2 + \frac{1}{2}x^2\right] x \log|x| = c_1 x + c_2 x \log|x| + \frac{1}{4}x^3$.

2B. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(2n+1)\log(n+2)},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente? **Soluzione**: Per il raggio di convergenza

[1] 18.04.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà gli esercizi 2A, 3A e 6A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà gli esercizi 2B, 3B e 6B.

troviamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+3)\log(n+3)} \frac{(2n+1)\log(n+2)}{3^n} \\ &= 3\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \frac{\log(n+3)}{\log(n+2)} = 3,\end{aligned}$$

e dunque $R = \frac{1}{3}$. La serie di potenze è assolutamente convergente se $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ e divergente se $x < -\frac{1}{3}$ e se $x > \frac{1}{3}$. Per $x = -\frac{1}{3}$ risulta $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, dove $a_n = 1/[(2n+1)\log(n+2)]$ è decrescente e tende a zero; secondo il criterio di Leibniz è convergente. Per $x = \frac{1}{3}$ risulta la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty}$, dove $a_n = f(n)$ per la funzione positiva e decrescente $f(x) = 1/[(2x+1)\log(x+2)]$. Siccome $2(x+2) \geq 2x+1 \geq x+2$ per $x \geq 1$, l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2(x+2)\log(x+2)} \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\log(x+2)},$$

mentre

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)\log(x+2)} = [\log\log(x+2)]_1^{\infty} = +\infty$$

è divergente. Secondo il criterio dell'integrale è anche divergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e quindi la serie di potenze per $x = \frac{1}{3}$.

3A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale[2]

$$y' = \frac{y^3+1}{(x^2+1)y^2}.$$

Qual'è la soluzione di questa equazione differenziale sotto la condizione iniziale $y(0) = -1$? **Soluzione**: La separazione delle variabili conduce all'equazione $\frac{3y^2}{y^3+1}\,dy = \frac{3}{x^2+1}\,dx$. Quindi

$$\log|y^3+1| = 3\arctan(x) + \text{cost.}$$

Applicando l'esponenziazione si ha $y^3 + 1 = c\exp(3\arctan(x))$ per qualche costante $c \neq 0$. Di conseguenza,

$$y = [-1 + c\,\exp(3\arctan(x))]^{1/3},$$

più la soluzione costante $y = -1$ eliminata durante la separazione. Quest'ultima è la soluzione sotto la condizione iniziale $y(0) = -1$.

[2]La soluzione generale è da rappresentare nella forma $y = F(x, \text{cost.})$.

3B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $0 \le x < T/2$ e $f(x) = -x^2$ per $-T/2 < x \le 0$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c. È permessa la sua integrazione termine a termine tra $\hat{x} = 0$ e $\hat{x} = x$ per $x \in (0, \frac{T}{2})$? Poichè si o poichè no?

Soluzione: Siccome la f è dispari, abbiamo $a_0 = 0$ e $a_k = 0$, mentre

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2 \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx \\
&= -\frac{2}{\pi k}\left[x^2\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\right]_0^{T/2} + \frac{4}{\pi k}\int_0^{T/2} x\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx \\
&= \frac{T^2}{2\pi k}(-1)^{k-1} + \left[\frac{2T}{\pi^2 k^2} x \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \frac{2T}{\pi^2k^2}\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx \\
&= \frac{T^2}{2\pi k}(-1)^{k-1} + \frac{T^2}{\pi^3k^3}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} -\dfrac{T^2}{2\pi k}, & k \text{ pari}, \\ \dfrac{T^2}{2\pi k} - \dfrac{2T^2}{\pi^3 k^3}, & k \text{ dispari}. \end{cases}
\end{aligned}$$

La somma

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)$$

vale $f(x)$ (periodo T), tranne nei multipli interi dispari di $\frac{T}{2}$, dove vale zero. Siccome la serie di Fourier è uniformemente convergente in x in tutti gli intervalli chiusi e limitati che non contengono punti di discontinuità della f, si può calcolare l'integrale termine a termine per ogni $x \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\left(x^3 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(e^{2y} + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy.$$

a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

Se esiste, costruirne una primitiva.

b.[*] Esiste una primitiva nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Perchè esiste o perchè non esiste?

Soluzione: La forma differenziale è chiusa, poichè

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2y} + \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Siccome $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ è convesso e quindi semplicemente connesso, è esatta la forma differenziale. Risolvendo le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^3 - \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2y} + \frac{x}{x^2+y^2},$$

risulta prima

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + g(y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + g(y),$$

dove $g(y)$ è una costante di integrazione. Sostituendolo nella seconda equazione si ha $g'(y) = e^{2y}$ e quindi $g(y) = \frac{1}{2}e^{2y} + \text{cost}$. Per $(x,y) \in \Omega$ arriviamo alla primitiva

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4}x^4 - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}e^{2y} + \text{cost}. \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}e^{2y} + \text{cost}. \end{aligned}$$

Per stabilire se è esatta la forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si faccia un'integrazione curvilinea lungo la circonferenza unitaria, dove la forma differenziale ha i componenti

$$\big((\cos\theta)^3 - \sin\theta, \exp(2\sin\theta) + \cos\theta\big)$$

in coordinate polari. Quest'integrale curvilineo vale

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[-\big(\cos^3\theta - \sin\theta\big)\sin\theta + (\exp(2\sin\theta) + \cos\theta)\cos\theta\right] d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4}\cos^4\theta + \frac{1}{2}\exp(2\sin\theta)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Di consequenza, non può essere esatta la forma differenziale nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Calcolare la lunghezza della curva definita in coordinate polari da

$$\rho(\theta) = 1 - \theta^2, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

Soluzione: Lunghezza: $L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$. Siccome $\rho(\theta) = -2\theta$, segue

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(1-\theta^2)^2 + (-2\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (1+\theta^2)\, d\theta = \left[\theta + \frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\left[1 + \frac{\pi^2}{48}\right]. \end{aligned}$$

6A. Calcolare il volume del solido rinchiuso tra le coniche di equazione $z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = \frac{1}{4} + x^2 + y^2$. **Soluzione**: In coordinate cilindriche abbiamo le coniche di equazione $z = 1 + r$ e $z = \frac{1}{4} + r^2$. Cercando l'intersezione risulta $1 + r = \frac{1}{4}r^2$, cioè $(r - \frac{1}{2})^2 = 1$ e dunque $r = \frac{3}{2}$ e $z = \frac{5}{2}$. Quindi l'intersezione è la circonferenza $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = \frac{9}{4}, z = \frac{5}{2}\}$. Inoltre, per $0 \le r \le \frac{3}{2}$ abbiamo $\frac{1}{4} + r^2 \le 1 + r$. Per il volume risulta

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{3/2} r\left[(1+r) - (\frac{1}{4} + r^2)\right] dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{3/2} \left[\frac{3}{4}r + r^2 - r^3\right] dr = 2\pi\left[\frac{3}{8}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{3/2} = \frac{45}{32}\pi. \end{aligned}$$

6B. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 8y'' = 0.$$

Soluzione: Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ si arriva all'equazione caratteristica $\lambda^5 + 8\lambda^2 = 0$, cioè $\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$. Gli zeri sono: 0 (doppio), -2, e $1 \pm i\sqrt{3}$. Quindi $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + c_4 e^x \cos(x\sqrt{3}) + c_5 e^x \sin(x\sqrt{3})$.