Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 0.$$

Soluzione: Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ risulta $\lambda(\lambda^2+4)^2 = 0$. Quindi

$$y = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) + c_4 x\cos(2x) + c_5 x\sin(2x).$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = 3x^2(y^2+1)$$

e indicare la soluzione che verifica la condizione $y(\pi) = -1$. **Soluzione**: Dalla relazione $(y'/(y^2+1)) = 3x^2$ risulta $\arctan(y) = x^3 + c$. Quindi $y = \tan(x^3+c)$. Sostituendo $x = \pi$ e $y = -1$ abbiamo $-(\pi/4) = \pi^3 + c$ e quindi $c = -[(\pi/4)+\pi^3]$. Dunque sotto la condizione $y(\pi) = -1$ abbiamo la soluzione $y = \tan(x^3 - (\pi/4) - \pi^3)$.

2B. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = \sinh(x)$ $(-\frac{T}{2} < x \le \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie. **Soluzione**: Abbiamo una funzione dispari: $a_0 = a_k = 0$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sinh(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)dx \\
&= \frac{4}{T}\left[\cosh(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\right]_0^{T/2} - \frac{4k\pi}{T^2}\int_0^{T/2}\cosh(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx \\
&= \frac{4}{T}\left[\cosh(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\right]_0^{T/2} - \frac{4k\pi}{T^2}\left[\sinh(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\right]_0^{T/2} \\
&- \frac{4k^2\pi^2}{T^3}\int_0^{T/2}\sinh(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)dx \\
&= \frac{4}{T}\left[\cosh(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\right]_0^{T/2} - \frac{4k\pi}{T^2}\left[\sinh(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\right]_0^{T/2} - \frac{k^2\pi^2}{T^2}b_k.
\end{aligned}$$

[1] 17.06.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

Quindi

$$b_k = \frac{4T\cosh(T/2)\sin(k\pi/2) - 4k\pi\sinh(T/2)\cos(k\pi/2)}{T^2 + k^2\pi^2},$$

dove $\sin(k\pi/2) = 0$ per k pari, $\sin(k\pi/2) = (-1)^{(k-1)/2}$ per k dispari e $\cos(k\pi/2) = (-1)^k$. La serie converge a $f(x)$ tranne nelle discontinuità $\frac{T}{2} + kT$ per $k \in \mathbb{Z}$ dove la somma vale zero. La convergenza è uniforme in tutti gli intervalli chiusi e limitati che non contengono discontinuità.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 3z = 6$ e interpretare il risultato geometricamente. Poichè è un minimo il punto trovato? **Soluzione**: Sia $H(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 - z^2 - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$. Allora

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2x - \lambda = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 2y - 2\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial z} = -2z - 3\lambda = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 6 - x - 2y - 3z = 0.$$

Quindi $(x,y,z) = (\frac{1}{2}\lambda, \lambda, -\frac{3}{2}\lambda)$, $\lambda = -3$ e $f = -9$. Per vedere che c'è un minimo, sostituiamo il vincolo $x = 6 - 2y - 3z$ nella funzione

$$g(y,z) = f(6 - 2y - 3z, y, z) = 5y^2 + 8z^2 + 12yz - 24y - 36z + 36.$$

Risultano $(\partial g/\partial y) = 10y + 12z - 24$ e $(\partial g/\partial z) = 12y + 16z - 36$; si annullano simultaneamente se e solo se $y = -3$ e $z = \frac{9}{2}$. In tal caso la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

ha soltanto autovalori positivi e quindi abbiamo trovato un minimo.

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

Per quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}? Poichè non esiste la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? **Soluzione**: Troviamo prima la matrice Jacobiana

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

con determinante $\det J = 9(x^2-y^2)^2 + 36x^2y^2 = 9(x^2+y^2)^2$. Quindi si può applicare il Teorema delle Funzioni Inverse nelle immagini di tutti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ per cui $\det J \neq 0$, cioè per $(x,y) \neq (0,0)$ oppure per $(u,v) \neq (0,0)$. Per ogni punti $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esistono un intorno U e una funzione bigettiva $g : U \to X$ (con $X \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) di classe C^1 tali che $g(f(x,y)) = (x,y)$ per $(x,y) \in X$ e $f(g(u,v)) = (u,v)$ per $(u,v) \in U$. Per dimostrare l'impossibilità di scegliere $U = X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, basta dimostrare l'esistenza di più di un punto (x,y) con immagine $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per esempio, $f(1,0) = f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) = (1,0)$. Più generalmente, abbiamo

$$u + iv = (x+iy)^3$$

e quindi per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esistono tre punti diversi $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tali che $f(x,y) = (u,v)$.

5. Calcolare l'area della porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra l'iperboloide $z = 2xy$ e sopra il piano xy. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato. **Soluzione**: La superficie è definita da $\varphi(x,y) = (x, y, 4-x^2-y^2)$ per $(x,y) \in D$, dove $(x,y) \in D$ se e solo se $z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0$ e $4 - x^2 - y^2 \geq 2xy$. In altre parole,

$$D = \{(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4, |x+y| \leq 2\}.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x & -2y \end{pmatrix},$$

$(A,B,C) = (2x, 2y, 1)$ e $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy = 2\iint_{D\cap\{(x,y):y\geq 0\}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy \\
&= 2\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr + 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2/(\cos\theta+\sin\theta)} r\sqrt{1+4r^2}\,dr \\
&= \pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2 + 2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^{2/(\cos\theta+\sin\theta)} \\
&= \frac{\pi}{12}(17\sqrt{17}-1) + \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sqrt{16+(\cos\theta+\sin\theta)^2}}{\cos\theta+\sin\theta}\right)d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{12}(17\sqrt{17}-1) + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\sqrt{17(1+u^2)^2+4u(1-u^2)}}{(1+u^2)(1-u^2+2u)}\,du,$$

dove abbiamo sostituito $u = \tan(\theta/2)$ nell'ultimo integrale.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y, z, x)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato. Spiegare poichè si trova lo stesso risultato per $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma$ se $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. **Soluzione**: Scegliendo $\nu = (0, 0, 1)$ nell'apice $(0, 0, 9)$ della superficie paraboloide, possiamo convertire l'integrale su S in un integrale curvilineo lungo la circonferenza $x^2+y^2 = 9$ nel piano xy con orientamento antiorario. Risulta

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma &= \oint_{\partial S} (F_1dx + F_2dy + F_3dz) = \oint_{\partial S} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} (3\sin\theta)\,d(3\cos\theta) = -9\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta \\ &= -9\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = -9\pi.\end{aligned}$$

Il Teorema di Stokes implica che si può cambiare S nel disco $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9\}$ con $\nu = (0, 0, 1)$, poichè c'è la stessa curva di frontiera. Siccome $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}} = (-1, -1, -1)$, abbiamo $(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu) = -1$ e quindi $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma = -9\pi$ (meno l'area del disco).

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\cosh(t)\cos(t), \cosh(t)\sin(t), t), \qquad 0 \leq t \leq \ln(2).$$

Soluzione: Si ha

$$\varphi'(t) = (-\cosh(t)\sin(t)+\sinh(t)\cos(t), \cosh(t)\cos(t)+\sinh(t)\sin(t), 1)$$

e quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[\cosh^2(t) + \sinh^2(t)][\sin^2(t) + \cos^2(t)] + 1} = \sqrt{2}\,\cosh(t).$$

Dunque

$$L = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{2}\,\cosh(t)\,dt = \sqrt{2}[\sinh(t)]_0^{\ln(2)} = \sqrt{2}\sinh(\ln(2)) = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$