Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} = 64y.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = 2x\cos^2(y).$$

Quali sono le sue soluzioni costanti?

2B. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = (\frac{T}{2} - |x|)^2$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (u^2 \cos v, u^2 \sin v \sin w, u^2 \sin v \cos w). \end{aligned}$$

Per quali punti $(u, v, w) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}?

5. Calcolare l'area della porzione del piano di equazione $x + 2y + 3z = 6$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\text{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (x, 2z, 3y),$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 9, z \geq 5\}.$$

Specificare la direzione del versore normale.

[1] 22.09.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), \cosh(t)), \qquad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Stabilire se la curva è chiusa, regolare, semplice.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.