Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 2y^{(3)} + y' = 0.$$

2. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n \log(n+1)}{3^{n+1} - 2^n},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente? Qual'è il suo raggio di convergenza?

3. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \frac{T}{2}, \\ -x^2, & -\frac{T}{2} < x < 0, \end{cases}$$

dove $\operatorname{sgn}(x) = 1$ per $x > 0$ e $\operatorname{sgn}(x) = -1$ per $x < 0$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   c. In quali sottointervalli di $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ è uniformemente convergente la serie di Fourier della f e poichè?

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}\, dx + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}\, dy + 3z^2\, dz.$$

   a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
   b. Costruirne una primitiva nel dominio $[\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}] \times \mathbb{R}$ se esiste. Se non esiste, dimostrarne la non esistenza.

5. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(z) = (\cos(z), \sin(z), \cosh(z)), \qquad 0 \le z \le \ln(5).$$

[1] 29.05.2006

6. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(8)} - y'' = 0.$$

Punteggio massimo:

esercizio	punteggio
1	4
2	6
3	6
4	5
5	4
6	5
totale	30