ANALISI DI FOURIER

Sia $T > 0$. Una funzione f, definita per $x \in \mathbb{R}$, si dice *periodica di periodo* T, se

$$f(x+T) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Se una funzione è periodica di periodo T, essa è anche periodica di periodo $2T, 3T, \ldots, kT, \ldots$.

Siano a, b due numeri reali e sia $k \in \mathbb{N}$. La funzione

$$s(x) = a\,\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \tag{2}$$

è periodica di periodo T. Più precisamente, essendo

$$\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{T}[x + \frac{T}{k}]\right), \tag{3}$$

e analogamente per $\mathrm{sen}\,(\frac{2\pi k}{T}x)$, la funzione $s(x)$ in (2) verifica la relazione

$$s(x) = s\left(x + \frac{T}{k}\right), \tag{4}$$

ed è perciò periodica di periodo T/k.

Si dimostra facilmente che l'integrale

$$\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(x)\,dx$$

non dipende da α se f è una funzione periodica di periodo T. Infatti, se $\alpha \notin [0, T)$, allora esiste un unico $n \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha - nT \in [0, T)$. In tal caso

$$\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{T+\alpha} f(x+nT)\,dx = \int_{\beta}^{T+\beta} f(x)\,dx,$$

dove $\beta = \alpha - nT$. Quindi si può supporre che $\alpha \in [0, T)$. In tal caso

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(x)\,dx &= \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{T+\alpha} f(x)\,dx - \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \\ &= \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{T+\alpha} f(x+T)\,dx - \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \\ &= \int_0^T f(x)\,dx,\end{aligned}$$

grazie alla periodicità di f.

Particolarmente interessanti per le applicazioni alla fisica ed all'analisi dei segnali sono combinazioni lineari di funzioni del tipo in (2), cioè della forma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

che prendono il nome di *polinomi trigonometrici*, dove a_0 e a_k, b_k, per $k = 1, 2, \ldots, n$, sono numeri reali, detti *coefficienti di Fourier* del polinomio trigonometrico. Evidentemente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, s_n è una funzione periodica di periodo T.

Si calcolino ora i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx &= \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \\ \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx &= 0, \\ \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi l}{T}x\right) dx &= \begin{cases} 1, & k = l = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \\ \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi l}{T}x\right) dx &= \begin{cases} 1, & k = l = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}\end{aligned}$$

Di conseguenza, per $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ si ha

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_n(x)\,dx,\\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_n(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx,\\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_n(x)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Inoltre,

$$
\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_n(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left\{|a_k|^2 + |b_k|^2\right\}.
$$

Fissati $a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}$, supponiamo che la serie, detta *trigonometrica* o *di Fourier* di coefficienti a_0, a_k, b_k,

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right\}, \tag{6}
$$

sia convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, per la periodicità di s_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche la somma $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ sarà una funzione periodica di periodo T. Qualunque sia la funzione f, si definiscono i suoi *coefficienti di Fourier* nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx,\\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx,
\end{aligned}
$$

dove $k = 1, 2, 3, \ldots$. Per qualsiasi funzione f tale che $|f|^2$ è integrabile in $(0, T)$ secondo Riemann,[1] vale l'*uguaglianza di Parseval*

$$
\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{|a_k|^2 + |b_k|^2\right\}. \tag{7}
$$

[1] Quindi, anche per le funzioni f continue in $[0, T]$ e con soltanto un numero finito di discontinuità, tutte di prima specie.

In altre parole, se è integrabile secondo Riemann la funzione $|f|^2$, è convergente la serie in (7).

Partendo dalla funzione f e calcolando i suoi coefficienti di Fourier, si possono definire i suoi polinomi trigonometrici approssimanti s_n, definita da (5). Siccome ovviamente è integrabile secondo Riemann la funzione $|f - s_n|^2$ se lo è la f, abbiamo

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x) - s_n(x)|^2\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{|a_k|^2 + |b_k|^2\right\}. \tag{8}$$

Dunque la parte a sinistra di (8) tende a zero se $n \to \infty$, grazie alla convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$.

Se la funzione f ̀periodica di periodo T e pari, allora $b_k = 0$ per $k \in \mathbb{N}$, mentre per $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx. \end{aligned}$$

D'altra parte, se f è periodica di periodo T e dispari, allora $a_0 = 0$ e $a_k = 0$ per $k \in \mathbb{N}$, mentre per $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx.$$

Un primo criterio di convergenza per la serie di Fourier (6) è contenuto nel seguente teorema.

TEOREMA 1 *Sia la funzione f tale che è convergente la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|). \tag{9}$$

Allora è continua la funzione f ed è totalmente convergente la sua serie di Fourier (6).

Esistono funzioni continue f di periodo T che hanno una serie di Fourier divengente per ogni $x \in \mathbb{R}$. In tal caso non vale (9).

Dimostrazione. Chiaramente la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$ implica la convergenza totale della serie in (6) e dunque la sua convergenza uniforme in $x \in \mathbb{R}$. Poichè ogni termine della serie è continuo, è continua anche la sua somma $s(x)$. Risulta che le funzioni f e s hanno gli stessi coefficienti di Fourier, e quindi[2] si ha $f(x) = s(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. □

Abbiamo già indicato che non basta la continuità della funzione f per garantire la sua convergenza. Infatti, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2 *Sia f una funzione di classe C^1. Allora la sua serie di Fourier* (6) *è totalmente convergente.*

Questo teorema vale anche se la funzione f è continua e *regolare a tratti*, cioè se f è continua e se esistono punti $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_{m-1} < c_m = T$ tali che la f è di classe C^1 in ciascun sottointervallo $[c_{j-1}, c_j]$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Dimostrazione. Sicuramente la derivata della f è tale che $|f'|^2$ è integrabile secondo Riemann in $[0, T]$. Scrivendo α_0 e α_k, β_k per $k \in \mathbb{N}$ per i coefficienti di Fourier della f', si ha

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + \beta_k \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right\}, \tag{10}$$

dove $\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\,dx = \frac{2}{T}[f(T) - f(0)] = 0$, per motivi di periodicità. Inoltre,

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f'(x)|^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2).$$

Calcolando la primitiva termine a termine[2] risulta

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{T}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -k\beta_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + k\alpha_k \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right\}, \tag{11}$$

e quindi i coefficienti di Fourier della f sono

$$a_k = -\frac{k\beta_k T}{2\pi}, \qquad b_k = \frac{k\alpha_k T}{2\pi}.$$

[2]Questo passaggio non viene dimostrato in dettaglio.

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) &= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k(|\alpha_k|+|\beta_k|)\\ &\leq \frac{T}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)\right]^{1/2} < +\infty.\end{aligned}$$

Dalla convergenza della serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ e dal Teorema 1 segue che è totalmente convergente la serie di Fourier della f. $\square$

Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$; se per $x \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\lim_{h\to 0^+} f(x+h)$$

lo indicheremo con $f(x+)$. Se esiste il limite

$$\lim_{h\to 0^-} f(x+h)$$

lo indicheremo con $f(x-)$.

Si ricordi che una funzione f definita in $x \in \mathbb{R}$ e periodica di periodo T si dice *regolare a tratti* se esistono punti $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_{m-1} < c_m = T$ tali che la f è di classe C^1 in ciascun sottointervallo $[c_{j-1}, c_j]$ $(j = 1, \ldots, m)$. Una funzione regolare a tratti può avere un numero finito di discontinuità di prima specie in $[0, T]$, mentre $f(0)$ e $f(T)$ possono essere diversi.

TEOREMA 3 *Sia f una funzione periodica di periodo T, regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a*

$$\frac{1}{2}\left[f(x+)+f(x-)\right], \tag{12}$$

cioè alla media fra il limite destro e il limite sinistro di f in x. In particolare, la serie di Fourier di f converge nei punti x in cui f è continua.

Non dimostreremo il Teorema 3. Invece metteremo in evidenza la sua importanza tramite alcuni esempi.

ESEMPIO 4 Sia f la funzione periodica di periodo T prolungando su $\mathbb{R}$ la funzione g data da

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

I coefficienti di Fourier di f sono allora

$$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi},$$

e quindi la serie di Fourier di f è data da

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left((2l+1)\frac{2\pi x}{T}\right)}{2l+1}.$$

L'uguaglianza di Parseval implica

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2},$$

e quindi $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ovviamente la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ che non sono multipli interi di $\frac{T}{2}$. In quest'ultimi punti la somma vale $\frac{1}{2}$, grazie al Teorema 3. Infine, sostituendo $x = T/4$ nella serie di Fourier di f, si ottiene

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1},$$

e quindi $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4}$.

ESEMPIO 5 Sia f la funzione periodica di periodo T prolungando su $\mathbb{R}$ la funzione g data da $g(x) = |x|$ per $-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2}$. Poichè f è pari, risulta $b_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre $a_0 = \frac{T}{2}$ e, per $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x| \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{\pi k}x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + \frac{T}{\pi^2 k^2}\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]_0^{T/2} = \frac{T}{\pi^2 k^2}\left[(-1)^k - 1\right]. \end{aligned}$$

L'uguaglianza di Parseval implica

$$\frac{T^2}{6} = \frac{T^2}{8} + \frac{T^2}{\pi^4}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)^4},$$

e quindi $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. La serie di Fourier di f è data da

$$\frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} \cos\left(\frac{2\pi(2l+1)}{T} x\right).$$

Siccome f è continua e regolare a tratti, la serie di Fourier è totalmente convergente in $x \in \mathbb{R}$ con somma $f(x)$. In particolare, per $x = \frac{T}{2}$ risulta

$$\frac{T}{2} = \frac{T}{4} + \frac{2T}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2},$$

e quindi $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

ESEMPIO 6 Sia f la funzione periodica di periodo T prolungando su $\mathbb{R}$ la funzione g data da $g(x) = x$ per $-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2}$. Poichè f è dispari, risultano $a_0 = 0$ e $a_k = 0$ per $k \in \mathbb{N}$. Per $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx \\ &= \left[-\frac{2}{\pi k} x \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + \frac{T}{\pi^2 k^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]_0^{T/2} = \frac{T}{\pi k} (-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza di Parseval implica

$$\frac{T^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2}{\pi^2 k^2},$$

e quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Inoltre, la serie di Fourier di f ha la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{T}{\pi k} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right).$$

Secondo il Teorema 3 la sua somma vale $f(x)$, tranne nei punti x che sono multipli dispari di $T/2$ (dove la somma vale 0).

ESEMPIO 7 Sia f la funzione periodica di periodo T prolungando su $\mathbb{R}$ la funzione g data da $g(x) = -1$ per $-\frac{T}{2} \leq x < 0$ e $g(x) = 1$ per $0 \leq x < \frac{T}{2}$.

Siccome f è dispari, abbiamo $a_0 = 0$, $a_k = 0$ per $k \in \mathbb{N}$ e

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx = \frac{2}{\pi k} \left\{1 - (-1)^k\right\} = \begin{cases} 0, & k \text{ pari}, \\ \dfrac{4}{\pi k}, & k \text{ dispari}. \end{cases}$$

L'uguaglianza di Parseval implica

$$2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2l+1)^2},$$

e quindi $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. La serie di Fourier di f ha la forma

$$\frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(2l+1)}{T} x\right).$$

Questa serie converge a $f(x)$ se x non è un multiplo intero di $T/2$¿ Se lo è, la somma è zero. Sostituendo $x = T/4$ otteniamo $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4}$.