Calcolare l'area di una superficie

1.* Calcolare l'area della porzione del piano $x + 2y + z = 5$ sopra il cono $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

2. Calcolare l'area della porzione del piano $3x + 2y + z = 7$ all'interno al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3. Calcolare l'area della porzione della paraboloide $z = x^2 + y^2$ tra i piani orizzontali $z = 0$ e $z = 1$.

4. Calcolare l'area della porzione della paraboloide ellittica $z = 2x^2 + y^2$ tra i piani orizzontali $z = 0$ e $z = 1$. Basta impostare l'integrale che rappresenta l'area se sembra infattibile con metodi elementari..

5. Calcolare l'area della iperboloide $z = x^2 - y^2$ tra i piani orizzontali $z = -1$ e $z = 1$.

6.* Calcolare l'area della porzione del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ all'interno alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. Calcolare l'area della porzione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ all'interno al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e sopra il piano $z = 0$.

8. Calcolare l'area della porzione della sfera $x^2 + y^2 + x^2 = 4$ all'interno al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

9. Calcolare l'area della parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ all'interno al prisma verticale la cui base è il triangolo limitato dalle rette $y = x$, $x = 0$ e $y = 1$ nel piano $z = 0$.

10. Calcolare l'area della porzione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ tra i piani orizzontali $z = 2$ e $z = 6$.

11.* Trovare l'area della porzione del piano $x + y + z = 4$ all'interno al cono $x = \sqrt{3(y^2 + z^2)}$.

12. Calcolare l'area della paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ sopra il piano $z = 0$.

13. Calcolare l'area della porzione della iperboloide $z = xy$ sopra il primo quadrante $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ e sotto il piano orizzontale $z = 3$.

14. Calcolare l'area della iperboloide $z = xy$ all'interno al cilindro $x^2+y^2 = 1$ e sopra il primo quadrante $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

15. Calcolare l'area della porzione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ sopra il settore $\{(x,y) : x \leq y \leq x\sqrt{3}, x \geq 0\}$.

Sia U una funzione di classe C^2 definita in un dominio T di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

si chiama il *gradiente* della U. Definendo la sua *divergenza*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

si verifica facilmente che

$$\Delta \boldsymbol{F} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} \boldsymbol{F} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Introduciamo ora, per una funzione $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : T \to \mathbb{R}^3$ di classe C^2, il suo *rotore*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

dove $\boldsymbol{e}_x = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_y = (0,1,0)$ e $\boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$. Allora

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Inoltre, se $U : T \to \mathbb{R}$ è di classe C^2, si ha

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial z}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial y}}{\partial z}, \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial z}}{\partial x}, \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial y}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x}}{\partial y} \right) = (0,0,0).$$

Sia ora $F_1dx+F_2dy+F_3dz$ una forma differenziale, dove $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è di classe C^1. Allora la forma differenziale si dice *esatta* se esiste una funzione U di classe C^2 (la cosiddetta primitiva o il cosiddetto potenziale) tale che $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$. In tal caso

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = (0, 0, 0).$$

D'altra parte, se $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ verifica l'equazione $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (0, 0, 0)$, allora

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

e quindi $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ è una forma differenziale chiusa. Ogni forma differenziale chiusa di classe C^1 in un dominio stellato[1] è esatta.

Sia ora $F_1dx+F_2dy+F_3dz$ una forma differenziale, dove $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è di classe C^1. Allora la forma differenziale è detta di avere il *potenziale vettore* $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ se $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. In tal caso $\boldsymbol{A}$ è di classe C^2 e

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0.$$

La forma differenziale si dice *solenoidale* se $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Quindi, se $\boldsymbol{F}$ è di classe C^1 e la sua corrispondente forma differenziale ha un potenziale vettore, allora la forma differenziale è solenoidale. Ogni forma differenziale solenoidale di classe C^1 in un dominio stellato[1] ha il potenziale vettore.

Abbiamo ora i seguenti teoremi:

1. *Teorema della divergenza oppure Teorema di Gauss*: Sia T un dominio limitato in $\mathbb{R}^3$ che è decomponibile in un numero finito di sottodomini normali rispetto ai tre assi e di cui bordo ∂T è una superficie regolare a tratti.[2] Allora

$$\iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial T} (\boldsymbol{F}, \nu) \, d\sigma,$$

dove ν è il versore normale esterno.

[1] Un dominio T si dice *stellato* se esiste $\boldsymbol{x}_0 \in T$ tale che $T = \{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0 : \boldsymbol{x} \in T, 0 \leq t \leq 1\}$. Più in generale, si può richiedere che il dominio T sia non bucato.

[2] Più in generale, T deve essere decomponibile in un numero finito di sottodomini semplici rispetto ai tre assi, mentre ∂T è unione disgiunta di un numero finito di superficie chiuse e regolari a tratti. Quindi T può avere un numero finito di buchi.

2. *Teorema di Stokes*: Sia S una superficie regolare a tratti in $\mathbb{R}^3$ di cui bordo è una curva chiusa e semplice.[3] Allora

$$\iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \nu)\, d\sigma = \int_{\partial S} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)\,,$$

dove il versore normale ν alla superficie S e l'orientamento della curva sono collegati tramite la regola del cavatappi. In particolare, per una curva chiusa nel piano $z = 0$ con orientamento antiorario si ha $\nu = (0, 0, 1)$.

3. *Teorema di Green*: Nel caso particolare in cui $F_3 = 0$, F_1 e F_2 non dipendono dalla variabile z e S è un dominio nel piano $z = 0$, risultano $\nu = (0, 0, 1)$ e

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

In tal caso risulta

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial S} (F_1 dx + F_2 dy)\,,$$

dove l'orientamento della curva chiusa ∂S è antiorario.

Applicare i Teoremi di Gauss e di Stokes

16. Sia S l'emisfera $\{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$, dove $\boldsymbol{F} = (y + z, z + x, x + y)$. Quale sarebbe il risultato se S fosse la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ sopra il piano $z = 0$?

17. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ se $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ e S è la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. In generale, dimostrare che il volume di un dominio limitato T in $\mathbb{R}^3$ con bordo ∂T regolare a tratti è uguale a $\frac{1}{3} \iint_{\partial T} (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$.

[3] Più in generale, S viene parametrizzata da una funzione iniettiva $\Phi : D = \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ di classe C^2, dove D è decomponibile in un numero finito di domini normali rispetto ai due assi e ∂D è costituito da un numero finito di curve chiuse e semplici.

18. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ se $\boldsymbol{F} = (x^3, y^3, z^3)$ e S è la superficie dell'ellissoide di equazione $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

19. Sia S la superficie composta dalla porzione del cilindro tra i piani orizzontali $z = 0$ e $z = 1$ e dal disco $\{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ per $\boldsymbol{F} = (y, z, x)$, osservando che $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

20.* Sia S la porzione della superficie toroidale $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$ sopra il piano $z = 0$. Osservando che $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 1$ per $\boldsymbol{F} = (z, y, x)$, si calcoli $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$.

21. Sia S la porzione della paraboloide ellittica $z = 4 - x^2 - 4y^2$ sopra il piano $z = 0$. Osservando che $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ per $\boldsymbol{F} = (z, 0, 0)$, si calcoli $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$.

22. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \{(y + z)dx + (z + x)dy + (x - y)dz\},$$

dove γ è la circonferenza intersezione tra la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il piano $x = y$, sia direttamente, sia applicando il Teorema di Stokes.

23. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ per $\boldsymbol{F} = (x + y, z - y, x^3 y)$ e $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 9\}$.

24. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ per $\boldsymbol{F} = (x, y, z^3)$ e $S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16\}$.

25. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ per $\boldsymbol{F} = (4xz, -y^2, yz)$ e S la porzione delsuperficie cubica $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ fuori del piano xz.

26. Verificare il Teorema della divergenza se $\boldsymbol{F} = (4x, -2y^2, z^2)$ e T è il solido all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e tra i piani orizzontali $z = 0$ e $z = 3$.

27. Verificare il Teorema di Stokes per $\boldsymbol{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2 z)$ e S la porzione della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sopra il piano $z = 0$.

28. Verificare il Teorema della divergenza per $\boldsymbol{F} = (2x^2 y, -y^2, 4xz^2)$ e T il solido nel primo ottante limitato da $y^2 + z^2 = 9$ e $x = 2$.

29. Verificare il Teorema di Stokes per $\boldsymbol{F} = (y - z + 2, yz + 4, -xz)$ e S la porzione della superficie cubica $\{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \{0, 2\}$ fuori del piano $z = 0$.

30. Verificare il Teorema di Stokes per $\boldsymbol{F} = (xz, -y, x^2 y)$ e S la porzione della frontiera del solido limitato da $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x+y+2z = 8$ fuori del piano xz.

31. Calcolare $\iint_S (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}, \nu) d\sigma$ per $\boldsymbol{F} = (2yz, -x - 3y + 2, x^2 + z)$ e S la superficie di intersezione dei cilindri $x^2 + y^2 = R^2$ e $x^2 + z^2 = R^2$ all'interno al primo ottante.